Ратушняк С.П.

НЕПЕРЕРВНА НІДЕ НЕ МОНОТОННА ФУНКЦІЯ, ОЗНАЧЕНА В ТЕРМІНАХ ЛАНЦЮГОВОГО А-ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

У роботі вивчаються структурні та варіаційні властивості одного континуального класу ніде не монотонних неперервних функцій необмеженої варіації, означених рівностями

$$f(x = \Delta^{A_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots},$$

$$\beta_1 = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha_1 = 2, \\ 0 & \text{при } \alpha_1 \neq 2, \end{cases} \quad \beta_{n+1} = \begin{cases} \beta_n & \text{при } \alpha_n + \alpha_{n+1} \neq 2, \\ 1-\beta_n & \text{при } \alpha_n + \alpha_{n+1} = 2, \end{cases} \alpha_n \in \{0,1,2\}, n \in N,$$

аргумент $[0; a_1, a_2, ..., a_n, ...] = \Delta^{A_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ і значення $f(x) = [0; b_1, b_2, ..., b_n, ...] = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$, якої подаються у формі ланцюгового дробу, елементи якого належать три- та двосимвольній множині відповідно, а саме: $a_n = e_{\alpha_n} \in \{e_0, e_1, e_2\}$, $b_n = \tau_{\beta_n} \in \{\tau_0, \tau_1\}$. Досліджувана функція є аналогом функції Буша-Вундерліха та Трибін-функції.

Ключові слова і фрази: ланцюговий дріб, ланцюгове зображення чисел, циліндр, неперервна ніде не монотонна функція, множина рівня функції, функція необмеженої варіації.

Institution of mathematics of NAS Ukraine,
Ukrainian State Dragomanov University, Kyiv, Ukraine
e-mail: *ratush404@gmail.com*

Вступ

Множина неперервних функцій, які не мають проміжків монотонності [10, 16], у просторі $C[0;1]$ є множиною другої категорії Бера і містить всі ніде не диференційовні функції [13]. Тому існує природний інтерес до її представників. Серед них є функції обмеженої і функції необмеженої варіації [3, 6], ніде не диференційовні і майже скрізь у розумінні міри Лебега диференційовні, зокрема функції сингулярні [10] (похідна такої функції рівна нулю майже скрізь). Разом з цим ніде не монотонні функції вивчені недостатньо. В силу об'єктивних причин сьогодні розвиваються в основному індивідуальні теорії ніде не монотонних та недиференційовних функцій (функцій Такагі, Серпінського тощо). Одній з таких присвячена дана робота. В ній розглядається функція, аргумент і

УДК 511.7+519.21
2010 *Mathematics Subject Classification:* 28A80,11K50,26A27, 26A30.
This work was supported by a grant from the Simons Foundation (1030291, S.P.R.).

значення якої подаються у формі ланцюгового дробу: аргумент — A_3-дробом, елементи якого належать триелементній множині $\{e_0, e_1, e_2\}$, а значення функції — A_2-дробом, елементами якого є два додатні числа $\{\tau_0, \tau_1\}$.

«Несамоподібність», що є властивістю ланцюгового зображення чисел [9], створює певні труднощі у розв'язанні метричних задач, але вони долаються біліпшецевістю таких зображень.

Зазначимо, що досліджувана в цій роботі функція є аналогом функції Буша-Вундерліха [1, 5], Трибін-функції [11, 12] та її узагальнень [8, 15, 16].

1 Ланцюгове A_2-зображення чисел відрізка $[\frac{1}{2}; 1]$

Нехай $A_s \equiv \{0, ..., s-1\}$ — алфавіт, $L_s \equiv A_s \times A_s \times \ldots$ — простір послідовностей елементів алфавіту; $0 < \tau_0 < \tau_1$, $\tau_0\tau_1 = \frac{1}{2}$, $A_\tau \equiv \{\tau_0; \tau_1\}$, $L_\tau \equiv A_\tau \times A_\tau \times \ldots$;

Відомо [2], що *для будь-якого* $t \in [\frac{1}{2\tau_1}; \frac{1}{2\tau_0}]$ *існує послідовність* $(b_k) \in L_\tau$ *така, що*

$$t = \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + ...}} \equiv [0; b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots]. \tag{1}$$

Нескінченний ланцюговий дріб (1) називається *ланцюговим* A_τ*-дробом*, а його символічний запис $[0; b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots]$ — *ланцюговим* A_2*-зображенням* числа x.

Існують числа, що мають два представлення A_τ-дробом. Вони мають вигляд

$$[0; b_1, b_2, ..., b_m, \tau_0, (\tau_0, \tau_1)] = [0; b_1, b_2, ..., b_m, \tau_1, (\tau_1, \tau_0)],$$

решта чисел мають єдине представлення A_τ-дробом (тут круглі дужки символізують період). Їх називають A_τ*-бінарними* числами. Решта чисел мають єдине представлення. Їх називають A_τ*-унарними* числами. Множина A_τ-бінарних чисел є зліченною всюди щільною у відрізку $[\frac{1}{2\tau_1}; \frac{1}{2\tau_0}]$ [9].

Представлення числа A_τ-дробом легко кодується засобами алфавіту A_2, а саме:

$$x = [0; b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots] \equiv \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots},$$

де $\beta_k = i$, якщо $b_k = \tau_i$, $k \in N$, $i \in A_2$, тобто $b_k = \tau_{\beta_k}$. Запис $\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots}$ називається A_2*-зображенням числа* x.

Означення 1. *A_2-циліндром рангу m з основою $c_1...c_m$ називається множина $\Delta^{A_2}_{c_1\ldots c_m}$ усіх чисел t, що мають зображення $t = \Delta^{A_2}_{c_1\ldots c_m\beta_1\beta_2\ldots}$, де* $(\beta_n) \in L_2$.

Безпосередньо з наведеного означення A_2-циліндра маємо

1) $\Delta^{A_2}_{c_1\ldots c_m} = \Delta^{A_2}_{c_1\ldots c_m 0} \cup \Delta^{A_2}_{c_1\ldots c_m 1}$;

2) A_2-циліндр $\Delta^{A_2}_{c_1\ldots c_m}$ є відрізком з кінцями: $\Delta^{A_2}_{c_1\ldots c_m(01)}$ і $\Delta^{A_2}_{c_1\ldots c_m(10)}$, причому який з них лівий, а який правий залежить від парності (непарності) числа m.

3) довжина циліндра $\Delta^{A_2}_{c_1\ldots c_m}$ обчислюється за формулою

$$|\Delta^{A_2}_{c_1\ldots c_m}| = \frac{2\tau_1 - 2\tau_0}{(q_{m-1} + 2\tau_0 q_m)(q_{m-1} + 2\tau_1 q_m)} \le \frac{1}{q^2_{m-1}},$$

де q_m — знаменник m-го порядку підхідного дробу, тобто знаменник раціонального числа, що є значенням виразу $[0; a_1, a_2, ..., a_m]$, який обчислюється за формулами $q_0 = 1$, $q_1 = b_1$, $q_{n+1} = b_{n+1}q_n + q_{n-1}$, де $b_n = \tau_{c_n}$.

2 Ланцюгове A_3-зображення числа

Нехай $0 < e_0 < e_1 < e_2$, $A_e \equiv \{e_0, e_1, e_2\}$, $L \equiv A_e \times A_e \times ....$ Розглядається множина E значень усіх ланцюгових дробів за елементами множини A_e. Легко показати, що

$$\min E = [0; (e_{s-1}, e_0)] = \frac{\sqrt{e_0 e_{s-1}(e_0 e_{s-1} + 4)} - e_0 e_{s-1}}{2e_{s-1}} \equiv d_0,$$

$$\max E = [0; (e_0, e_{s-1})] = \frac{\sqrt{e_0 e_{s-1}(e_0 e_{s-1} + 4)} - e_0 e_{s-1}}{2e_0} \equiv d_1.$$

Теорема 1. *[14] Якщо виконуються умови $e_0 e_2 = \frac{4}{3}$ і $2e_1 = e_0 + e_2$, то множина значень ланцюгових дробів за елементами множини A_e збігається з відрізком $[d_0; d_1]$.*

Тоді [7] *для будь-якого числа $x \in [\frac{2}{3e_2}; \frac{2}{3e_0}]$ існує послідовність $(a_k) \in L_e$ така, що*

$$x = [0; a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...]. \tag{2}$$

Вираз виду (2) називається *ланцюговим A_e-зображенням* числа x.

У роботі [14] показано, що при виконанні умов теореми 1, існують числа, які мають два A_3-зображення. Це числа виду:

$$[0; a_1, a_2, ..., a_m, e_i, (e_0, e_2)] = [0; a_1, a_2, ..., a_m, e_{i+1}, (e_2, e_0)], i \in \{0, 1\}. \tag{3}$$

Їх називають *A_e-бінарними* числами. Множина A_e-бінарних чисел є зліченною всюди щільною у відрізку $[\frac{2}{3e_2}; \frac{2}{3e_0}]$. Решта чисел мають єдине зображення. Їх називають *A_e-унарними* числами.

Ланцюгове A_e-зображення $[0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots]$ числа x засобами класичного трисимвольного алфавіту $A_3 = \{0, 1, 2\}$ можна перекодувати у A_3-зображення:

$$x = [0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots] \equiv \Delta^{A_3}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots},$$

де $\alpha_k = i$, якщо $a_k = e_i$, $k \in N$, $i \in A_3$, тобто $a_k = e_{\alpha_k}$. Зображення $\Delta^{A_3}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}$ називатимемо *A_3-зображенням числа x*.

Означення 2. *A_3-циліндром рангу m з основою $c_1...c_m$ називається множина $\Delta^{A_3}_{c_1...c_m}$ усіх чисел x, що мають зображення $x = \Delta^{A_3}_{c_1...c_m \alpha_1 \alpha_2 ...}$,* де $(\alpha_n) \in L_3$.

A_3-циліндри мають наступні властивості:

1) $\Delta^{A_3}_{c_1...c_m} = \bigcup\limits_{i=0}^{2} \Delta^{A_3}_{c_1...c_m i}$;

2) A_3-циліндр $\Delta^{A_3}_{c_1...c_m}$ є відрізком з кінцями: $\Delta^{A_3}_{c_1...c_m(e_0 e_2)}$ і $\Delta^{A_3}_{c_1...c_m(e_2 e_0)}$, причому який з них лівий, а який правий залежить від парності (непарності) числа m;

3) довжина циліндра $\Delta^{A_3}_{c_1\ldots c_m}$ обчислюється за формулою

$$|\Delta^{A_3}_{c_1\ldots c_m}| = \frac{6e_2 - 6e_0}{(2q_{m-1} + 3e_0q_m)(2q_{m-1} + 3e_2q_m)},$$

де q_m — знаменник значення ланцюгового дробу $[0; a_1, ..., a_m]$ і $a_n = e_{c_n}$, $e_{c_n} \in A_e$, $n = \overline{1, m}$.

3 Основний об'єкт дослідження

Розглядається функція f, означена рівностями

$$f(x = \Delta^{A_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}, \quad \text{де} \tag{4}$$

$$\beta_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_1 = 2, \\ 0, & \text{якщо } \alpha_1 \neq 2, \end{cases} \qquad \beta_{n+1} = \begin{cases} \beta_n, & \text{якщо } \alpha_n + \alpha_{n+1} \neq 2, \\ 1 - \beta_n, & \text{якщо } \alpha_n + \alpha_{n+1} = 2, \end{cases} n \in N. \tag{5}$$

Лема 1. *Означення функції f рівностями* (4) *і* (5) *є коректним.*

Доведення. Коректність означення функції рівністю (4) могла би порушуватись в A_3-бінарних точках:

$$\Delta^{A_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n c(02)} = \Delta^{A_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n[c+1](20)}, \text{ де } c \in \{0, 1\}, \alpha_n \in \{0, 1, 2\},$$

якби ця формула давала б різні значення для різних зображень. Покажемо, що це не так. Розглянемо

$$f(\Delta^{A_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n c(02)}) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_n\beta_{n+1}(\beta_{n+2}[1-\beta_{n+2}])},$$

$$f(\Delta^{A_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n[c+1](20)}) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_n\beta'_{n+1}(\beta'_{n+2}[1-\beta'_{n+2}])}.$$

Очевидно, що $c + 0 \neq 2$ і $c + 1 + 2 \neq 2$, а тому $\beta_{n+2} = \beta_{n+1}$ і $\beta'_{n+2} = \beta'_{n+1}$, а отже,

$$\Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_n\beta_{n+1}(\beta_{n+1}[1-\beta_{n+1}])} = \Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_n\beta'_{n+1}(\beta'_{n+1}[1-\beta'_{n+2}])}, \tag{6}$$

оскільки, якщо $\beta_{n+1} = \beta'_{n+1}$, то (6) очевидна, а якщо $\beta_{n+1} \neq \beta'_{n+1}$, тобто $\beta_{n+1} = 1 - \beta'_{n+1}$, то рівність (6) правильна, як рівність двох A_2-бінарних зображень. □

Теорема 2. *Функція f є неперервною ніде не монотонною функцією.*

Доведення. Неперервність функції f в A_3-бінарних точках є наслідком коректності означення функції. Доведемо неперервність функції в A_3-унарних точках відрізка $[d_0; d_1]$.

Розглянемо довільно вибрану A_3-унарну точку $x_0 = \Delta^{A_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$. Нехай $f(x_0) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_m\ldots}$. Якщо $x \neq x_0$, то існує номер k такий, що $\alpha_k(x) \neq \alpha_k(x_0)$, але $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_0)$ $i = \overline{1, k-1}$, причому умова $x \to x_0$ рівносильна умові $k \to \infty$. З означення функції бачимо, що для довільного достатньо близького до x_0 числа x існує m, таке що $f(x) \in \Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_m}$. Тоді

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |\Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_m}|.$$

Оскільки $|\Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_m}| \to 0$ при $m\to\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)| \le \lim_{m\to\infty}|\Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_m}| = 0.$$

Тому $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)| = 0$ і $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Таким чином функція f є неперервною в точці x_0. Оскільки x_0 — довільна A_3-унарна точка, то функція f неперервна на всій множині A-унарних чисел. Для доведення ніде не монотонності функції f досить довести, що вона немонотонна в довільному інтервалі. Оскільки для довільного $(a;b)\subset[0;1]$ легко вказати A_3-циліндр, що цілком йому належить, то достатньо довести немонотонність функції на довільному циліндрі $\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_m}$. Виберемо три точки x_1, x_2, x_3, що належать одному циліндру $\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_m}$. Нехай

$$x_1 = \Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_m1(02)},\quad x_2 = \Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_m11(02)},\quad x_3 = \Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_m12(02)}.$$

Згідно правил порівняння чисел за їх A_3-зображеннями маємо, що $(x_1-x_2)(x_2-x_3)>0$. Тоді

$$f(x_1) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_m uu([1-u]u)},\quad f(x_2) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_m u[1-u]([1-u]u)},\quad f(x_3) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_m uu([1-u]u)},$$

де $u\in A_2$. Звідки бачимо, що $(f(x_1)-f(x_2))(f(x_2)-f(x_3))<0$, а тому на циліндрі $\Delta^{A}_{c_1c_2\ldots c_m}$ функція f немонотонна. В силу довільності вибору циліндра $\Delta^{A}_{c_1c_2\ldots c_m}$ функція f є ніде не монотонною в усій області визначення. □

4 Множини рівнів функції f

Означення 3. *Множиною рівня $y_0\in E_f$ функції f називається множина точок $x\in D_f$ така, що $f^{-1}(y_0)=\{x\in D_f:\ f(x)=y_0\}$.*

Лема 2. *Образом A_3-циліндра рангу k при відображенні f є A_2-циліндр того ж рангу, причому кількість прообразів циліндра $\Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_k}$ дорівнює*

$$N_k \equiv N(\Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_k}) = 2^{k-\beta_1-\sum\limits_{i=1}^{k-1}|\beta_{i+1}-\beta_i|}. \tag{7}$$

Доведення. Розглянемо циліндр $\Delta^{A_3}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ і точку, що йому належить $x_0=\Delta^{A_3}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\gamma_1\gamma_2\ldots}$. Нехай $y_0=f(x_0)=\Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_k t_1\ldots}$, тоді існує деякий циліндр рангу k такий, що містить y_0, тобто $y_0\in\Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_k}$. Покажемо, що існують точки циліндра $\Delta^{A_3}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$, образи яких є кінцями циліндра $\Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_k}$. Такими є точки $x_1=\Delta^{A_3}_{\alpha_1\ldots\alpha_k([2-\alpha_k]\alpha_k)}$ і $x_2=\Delta^{A_3}_{\alpha_1\ldots\alpha_k(\alpha_k[2-\alpha_k])}$, оскільки

$$f(x_1)=\Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_k(\beta_k[1-\beta_k])},\quad f(x_2)=\Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_{k-1}\beta_k([1-\beta_k]\beta_k)}.$$

В силу неперервності функції f, циліндр $\Delta^{A_3}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ повністю відобразиться в $\Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_k}$.

Для доведення другої частини леми використаємо метод математичної індукції. Прообразами циліндрів 1-го рангу є:

$$f^{-1}(\Delta^{A_3}_1)=\Delta^{A_2}_2,\quad f^{-1}(\Delta^{A_3}_0)=\{\Delta^{A_2}_1,\Delta^{A_2}_0\}.$$

Прообразами циліндрів 2-го рангу є:

$$f^{-1}(\Delta^{A_3}_{10}) = \Delta^{A_2}_{20},\ f^{-1}(\Delta^{A_3}_{11}) = \{\Delta^{A_2}_{21}, \Delta^{A_2}_{22}\};$$

$$f^{-1}(\Delta^{A_3}_{00}) = \{\Delta^{A_2}_{10}, \Delta^{A_2}_{12}, \Delta^{A_2}_{00}, \Delta^{A_2}_{01}\},\ f^{-1}(\Delta^{A_3}_{01}) = \{\Delta^{A_2}_{11}, \Delta^{A_2}_{02}\}.$$

При $k = 1$ рівність (7) виконується.

Припустимо, що вона виконується для $k = n$. Розглянемо $k = n+1$. Циліндр $\Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_n}$ згідно з припущенням має N_n прообразів. Якщо $\beta_{n+1} = \beta_n$, то згідно означення функції кількість прообразів не зміниться, тобто

$$N_n \equiv N(\Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_n}) = 2^{n-\beta_1-\sum\limits_{i=1}^{n-1}|\beta_{i+1}-\beta_i|-|\beta_{n+1}-\beta_n|} = N_{n+1} = N(\Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_n\beta_n}).$$

Якщо $\beta_{n+1} \neq \beta_n$, то кількість альтернатив на $(n+1)$-ому кроці подвоюється, тобто

$$N(\Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_n[1-\beta_n]}) = 2N(\Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_n}) = 2\cdot 2^{n-\beta_1-\sum\limits_{i=1}^{k-1}|\beta_{i+1}-\beta_i|} = 2^{n-\beta_1-\sum\limits_{i=1}^{k-1}(|\beta_{i+1}-\beta_i|)-|[1-\beta_k]-\beta_k|} =$$
$$= 2^{n-\beta_1-\sum\limits_{i=1}^{k}|\beta_{i+1}-\beta_i|}. \qquad \square$$

Лема 3. *Множина рівня* $y_0 = \Delta^{A_2}_{(0)}$ *є континуальною ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.*

Доведення. Згідно з означенням функції множину рівня $y_0 = \Delta^{A_2}_{(0)}$ можна задати

$$f^{-1}(y_0) = \{x \in [d_0; d_1]:\ x = \Delta^{A_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},\ \text{де}\ \alpha_1 \in \{0,1\}, \alpha_{n+1} + \alpha_n \neq 2\},$$

тобто жодна пара цифр (α_{n+1}, α_n) зображення аргумента f не дорівнює жодній з комбінацій (20), (02), (11).

Для доведення континуальності множини f^{-1} покажемо, що існує відображення між точками множини рівня $f(\Delta^{A_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})$ і точками $z = \Delta^2_{z_1z_2\ldots z_n\ldots}$, де $z_n \in \{0,1\}$, одиничного відрізка $[0;1]$. Таким може бути відображення h:

$$h(\alpha_n, \alpha_{n+1}) = z_n = \begin{cases} 0, & \text{якщо}\ \alpha_n + \alpha_{n+1} \in \{0,4\}, \\ 1, & \text{якщо}\ \alpha_n + \alpha_{n+1} \in \{1,3\}. \end{cases}$$

З еквівалентності множин $f^{-1}(y_0)$ і $[0;1]$ маємо їх рівнопотужність.

Доведемо нуль-мірність множини рівня $f^{-1}(y_0)$. Розглянемо множину F, таку що

$$F = \{x:\ x = \Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}, \overline{c_{2k+1}c_{2k+2}} \neq \overline{11}, k \in Z_0\}.$$

Очевидно, що $f^{-1}(y_0) \subset F$. Тому коли $\lambda(F) = 0$, то $\lambda(f^{-1}(y_0)) = 0$. Нехай

$$F_0 \equiv [d_0; d_1],\ F_m = \{x:\ x = \Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots},\ \overline{c_{2k+1}c_{2k+2}} \neq \overline{11}, k \in \overline{0, m-1}\}.$$

Тоді мають місце включення $F \subset F_{m+1} \subset F_m \subset \ldots \subset F_0$, і $(F_{m+1} \setminus F_m) \cap F = \varnothing$, $F = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} F_m = \lim\limits_{m\to\infty} F_m$. В силу монотонності міри Лебега і $\lambda(F) \leq \lambda(F_m)$, $m \in N$ маємо, що $\lambda(F) = \lim\limits_{m\to\infty} \lambda(F_m)$. Оскільки $F_1 = [d_0; d_1] \setminus \Delta^{A_3}_{11}$, то $\lambda(F_1) > 0$. Подамо міру Лебега множини F_m у вигляді:

$$\lambda(F_m) = \frac{2}{e_2 - e_0}\frac{\lambda(F_m)}{\lambda(F_0)} = \frac{2}{e_2 - e_0}\frac{\lambda(F_m)}{\lambda(F_{m-1})} \cdot \frac{\lambda(F_{m-1})}{\lambda(F_{m-2})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(F_1)}{\lambda(F_0)}.$$

Тоді

$$\lambda(F) = \lim_{m\to\infty} \lambda(F_m) = \frac{2}{e_2 - e_0}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda(F_m)}{\lambda(F_{m-1})}.$$

Оскільки $F_{m-1} \setminus F_m \equiv \overline{F}_m$, то $F_m = F_{m-1} \setminus \overline{F}_m$, а тому

$$\lambda(F) = \frac{2}{e_2 - e_0}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda(F_{m-1} \setminus \overline{F}_m)}{\lambda(F_{m-1})} = \frac{2}{e_2 - e_0}\prod_{m=1}^{\infty}(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_m)}{\lambda(F_{m-1})}).$$

Відомо [9], що існують такі числа C_1 і C_2, що метричне відношення довжин циліндрів відокремлене від нуля та одниці, тобто

$$0 < C_1 < \frac{|\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_k11}|}{|\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_k}|} < C_2 < 1.$$

Тоді

$$\frac{\lambda(\overline{F}_m)}{\lambda(F_{m-1})} \geq 1 - C_2 > 0.$$

А отже, $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda(\overline{F}_m)}{\lambda(F_{m-1})} = \infty$. А тому, оскільки не виконується необхідна умова збіжності нескінченного добутку, то

$$\frac{2}{e_2 - e_0}\prod_{m=1}^{\infty}(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_m)}{\lambda(F_{m-1})}) = 0.$$

Отже, $\lambda(F) = 0$, а тому $\lambda(f^{-1}(y_0)) = 0$.

Для доведення ніде не щільності множини $f^{-1}(y_0)$ покажемо, що для довільного циліндра $\Delta^{A_3}_{c_1\ldots c_m}$ існує інтервал, що йому належить, який не містить точок множини $f^{-1}(y_0)$. Таким інтервалом є $\nabla^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_m ij}$, де $(i,j) \in \{(0,2),(2,0),(1,1)\}$ і $\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_m} \setminus \nabla^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_m ij} = \{\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_m ij(e_0e_2)}, \Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_m ij(e_2e_0)}\}$. □

Зауваження 1. *Зазначимо, що останні множини є предметом інтересу при дослідженні розв'язків динамічних рівнянь на часових шкалах [4].*

Зауваження 2. *Якщо $\Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_k} = f(\Delta^{A_3}_{\alpha_1\ldots\alpha_k})$, то найменше і найбільше значення f на циліндрі $\Delta^{A_3}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ дорівнює $\min\Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_m}$ і $\max\Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_m}$. Таким чином, коливання (різниця максимума і мінімума) функції f на A_3-циліндрі дорівнює довжині його образу $|\Delta^{A_2}_{\beta_1\ldots\beta_k}|$.*

Теорема 3. *Функція f має необмежену варіацію.*

Доведення. Враховуючи зауваження 2, варіація $V(f)$ функції f є більшою, ніж сумарна довжина V_k образів усіх A_3-циліндрів рангу k для будь-якого $k \in N$, тобто

$$V(f) > V_k = \sum_{\alpha_1=0}^{1} \sum_{\alpha_2=0}^{1} ... \sum_{\alpha_k=0}^{1} |f(\Delta^{A_3}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k})|.$$

Оскільки існує лише один A_2-циліндр 2-го рангу $\Delta^{A_2}_{10}$, що є образом циліндра 2-го рангу $\Delta^{A_3}_{20}$, а решта циліндрів є образом принаймні трьох циліндрів 2-го рангу і це стосується довільного циліндра $\Delta^{A_2}_{\alpha_1...\alpha_{2m}}$, то, враховуючи автомодельність графіка функції і біліпшецевість основного метричного відношення для A_3-зображення чисел, існує номер m такий, що

$$V_m > m(\tau_0 - \tau_1) - |f(\Delta^{A_3}_{\underbrace{20...20}_{m}})| > 2.$$

За індукцією $V_{2^k m} > 2^{k+1}$, а тому $\lim\limits_{k\to\infty} V_{2^k m} = \infty$, отже, f має необмежену варіацію. □

Список літератури

[1] *Bush K.A.* Continuous functions without derivatives // Amer. Math. Monthly. — 1952. — 58, no. 4. — P. 222-225.

[2] *Dmytrenko S. O., Kyurchev D. V., Prats'ovytyi M. V.* A_2-continued fraction representation of real numbers and its geometry // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009. — №4. — P. 541-555. https://doi.org/10.1007/s11253-009-0236-7

[3] *Pratsiovytyi M.V.,Goncharenko Ya.V., Dmytrenko S.O., Lysenko I.M.,Ratushniak S.P.,* About one class of function with fractal properties // Bukovynian Mathematical Journal. 2021, T. 6, № 1 — P.273–283. (in Ukrainian)

[4] *Stanzhytskyi O.M.* Investigation of invariant sets of Ito stochastic systems with the use of Lyapunov functions // Ukrainian Mathematical Journal, 2001, 53 (11), Pages: 1882 - 1894.

[5] *Wunderlich W.* Eine uberall stetige und nirgends differenziebare funktion// Elem. Math. — 1952. – no. 7. — Pp. 73-79.

[6] *Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Lysenko I.M., Ratushniak S.P.* Continued A_2-fractions and singular functions // *Mat. Stud.*, 58, 2022. — C.3–12.

[7] *Працьовитий М.В., Гончаренко Я.В., Дрозденко В.О.* Канторвали як множини неелементарних ланцюгових дробів з обмеженим алфавітом // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. 2021, Т. 16, № 3. — С.210–218.

[8] *Працьовитий М.В., Барановський О.М., Маслова Ю.П.* Узагальнення Трибін-функції // Нелінійні коливання, 2019, Т. 22, № 3. — С.380–390.

[9] *Працьовитий М. В.* Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. — Київ: Наукова думка, 2022. — 316с.

[10] *Працьовитий М.В.* Ніде не монотонні сингулярні функції // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки, 2011.— №12. — С. 24–36.

[11] *Працевитый Н.В.* Непрерывные канторовские проекторы // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — Киев: КГПИ, 1989. — С.95–105.

[12] *Працьовитий М.В., Панасенко О.Б.* Фрактальні властивості одного класу однопараметричних неперервних ніде не диференційовних функцій // Науковий часопис НПУ імену М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2006. — № 7. — С. 160–167.

[13] *Працьовитий М.В., Ратушняк С.П.* Неперервна ніде не диференційовна функція з фрактальними властивостями, визначена в термінах Q_2-зображення // *Нелінійні коливання*, Т.23. №2, 2020. — С.231–252.

[14] *Працьовитий М.В., Чуйков А.С., Кюрчев Д.В.* Ланцюгові A_3-дроби: основи метричної теорії. // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. 2017. Т.14, № 4. С. 19–110.

[15] *Працьовитий М.В., Чуйков А.С.* Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах нега-трійкових і ланцюгових A_2-дробів. Зб. праць Ін-ту математики НАН України. 2018. Т.15, № 1. С. 147–161.

[16] *Ратушняк С.П.* Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах ланцюгового A_2-зображення чисел // *Буковинський математичний журнал*, Т.11. №1, 2023. — С.126–133.

Список літератури

[1] *Bush K.A.* Continuous functions without derivatives // Amer. Math. Monthly. — 1952. — 58, no. 4. — P. 222-225.

[2] *Dmytrenko S. O., Kyurchev D. V., Prats'ovytyi M. V.* A_2-continued fraction representation of real numbers and its geometry // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009. — №4. — P. 541-555. https://doi.org/10.1007/s11253-009-0236-7

[3] *Pratsiovytyi M.V.,Goncharenko Ya.V., Dmytrenko S.O., Lysenko I.M.,Ratushniak S.P.,* About one class of function with fractal properties // Bukovynian Mathematical Journal. 2021, T. 6, № 1 — P.273–283. (in Ukrainian)

[4] *Stanzhytskyi O.M.* Investigation of invariant sets of Ito stochastic systems with the use of Lyapunov functions // Ukrainian Mathematical Journal, 2001, 53 (11), Pages: 1882 - 1894.

[5] *Wunderlich W.* Eine uberall stetige und nirgends differenziebare funktion// Elem. Math. — 1952. – no. 7. — Pp. 73-79.

[6] *Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Lysenko I.M., Ratushniak S.P.* Continued A_2-fractions and singular functions // *Mat. Stud.*, 58, 2022. — C.3–12.

[7] *Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Drozdenko V.O.* Cantorvals as sets of non-elementary continued fractions with a bounded alphabet // Proceedings of the Institute of Mathematics of the NationalAcademy of Sciences of Ukraine. 2021, Vol. 16, № 3. — P.210–218. (in Ukrainian)

[8] *Pratsiovytyi M.V., Baranovsky O.M., Maslova Yu.P.* Generalization of the Tribune function // Nonlinear oscillations, 2019, Vol. 22, № 3. — P.380–390. (in Ukrainian)

[9] *Pratsiovytyi M.V.* Two-character encoding systems of real numbers and their application. — Kyiv: Scientific opinion, 2022. — 316p. (in Ukrainian)

[10] *Pratsiovytyi M.V.* There are no monotonic singular functions // Scientific journal of M.P. Dragomanov National University. Series 1. Phys.-math. of science, 2011.— №12. — P. 24–36. (in Ukrainian)

[11] *Pratsiovytyi M.V.* Continuous cantor projectors // Research methods of algebraic and topological structures. — Kyiv: KSPI, 1989. — P.95–105. (in Russian)

[12] *Pratsiovytyi M.V., Panasenko O.B.* Fractal properties of one class of one-parameter continuous nowhere differentiable functions // Scientific journal of M.P. Dragomanov National University. Series 1. Phys.-math. of science. – K.: NPU named after M.P. Drahomanova, 2006. — № 7. — P. 160–167. (in Ukrainian)

[13] *Pratsiovytyi M.V., Ratushniak S.P.* A continuous nowhere differentiable function with fractal properties defined in terms of the Q_2-image // *Nonlinear oscillations*, Vol.23. №2, 2020. — P.231–252. (in Ukrainian)

[14] *Pratsiovytyi M.V., Chuikov A.S., Kyurchev D.V.* Chained A_3-fractions: basics of metric theory. // Proceedings of the Institute of Mathematics of the NationalAcademy of Sciences of Ukraine. 2017. Vol.14, № 4. P. 19–110. (in Ukrainian)

[15] *Pratsiovytyi M.V., Chuikov A.S.* A continuous nowhere monotone function defined in terms of nega-triple and chain A_2-fractions. Proceedings of the Institute of Mathematics of the NationalAcademy of Sciences of Ukraine. 2018. Vol.15, № 1. P. 147–161. (in Ukrainian)

[16] *Ratushniak S.P.* Continuous nowhere monotonic function defined it term continued A_2-fractionsrepresentation of numbers // *Bukovinian Math. Journal*, Vol.11. №1, 2023. — P.126–133. (in Ukrainian)

Надійшло 25.12.2023

Ratushniak S.P. *Continuous nowhere monotonic function, defined by terms continued A-representations of numbers*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 2 (2023), 236–245.

We study structural and variational properties of one continued class of nowhere monotonic continuous functions unbounded variational, defined equality

$$f(x = \Delta^{A_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots},$$

$$\beta_1 = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha_1 = 2, \\ 0 & \text{if } \alpha_1 \neq 2, \end{cases} \quad \beta_{n+1} = \begin{cases} \beta_n & \text{if } \alpha_n + \alpha_{n+1} \neq 2, \\ 1 - \beta_n & \text{if } \alpha_n + \alpha_{n+1} = 2, \end{cases} \alpha_n \in \{0, 1, 2\}, n \in N,$$

argument and values of which presented by form continued fraction. Elements a_n of continued fraction $[0; a_1, a_2, ..., a_n, ...]$, consist to three- and two-symbol sets ($A_e = \{e_0, e_1, e_2\}$ $A_\tau = \{\tau_0, \tau_1\}$) corresponding. The function is analog of Bush-Wunderlich function and Tribin-function.