

ГОРОШКЕВИЧ С.<sup>1</sup>, КАРЛОВА О.О.<sup>1,2</sup>

## ЗЛІЧЕННІ ПРОСТОРИ З ВЛАСТИВІСТЮ ПЕАНО

Одержано необхідні і достатні умови існування неперервної сюр'єкції зліченного регулярного простору на його квадрат.

*Ключові слова і фрази:* властивість Пеано, неперервна сюр'єкція, злічений компактний простір, ранг Кантора-Бендиксона.

---

<sup>1</sup> Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна;

<sup>2</sup> Університет Яна Кохановського в Кельцах, Польща

e-mail: o.karlova@chnu.edu.ua

## 1 ВСТУП

У 1890 році Джузеппе Пеано [8] опублікував приклад неперервної кривої, що проходить через кожен точку квадрата  $[0, 1]^2$ . Криву з такими властивостями називають *кривою Пеано*. Фактично, Пеано побудував неперервне сюр'єктивне відображення з одиничного відрізка  $[0, 1]$  на квадрат  $[0, 1]^2$ . Мотивацією цього дослідження Пеано став один (тепер вже класичний) результат Георга Кантора про те, що множина точок одиничного відрізка має таку ж саму потужність, як і множина точок одиничного квадрата.

Згідно з теоремою Гана-Мазуркевича [3], [6] (див. також доведення в [5, р. 129]) гаусдорфовий топологічний простір  $X$  є неперервним образом одиничного відрізка тоді і тільки тоді, коли  $X$  компактний, метризовний, зв'язний, локально зв'язний і непорожній. Гаусдорфовий неперервний образ відрізка називається *простором Пеано* або *континуумом Пеано*. Серпінський довів, що зв'язний компактний метричний простір  $X$  є континуумом Пеано тоді і тільки тоді, коли для кожного  $\varepsilon > 0$  простір  $X$  можна покрити зв'язними множинами діаметра  $\leq \varepsilon$  [9] (див. також [7]).

З огляду на ці результати природно виникають питання про дослідження незв'язних метричних просторів  $X$ , для яких існує неперервна сюр'єкція між  $X$  та  $X^2$ . Так, Серпінський [9] охарактеризував раціональні числа як метричний злічений простір без ізольованих точок. Гаусдорф [4] описав ірраціональні числа як метричний, сепарабельний, повнометризовний, нульвимірний і ніде не локально компактний простір. Загальний результат на цю тему, з якого випливають обидві теореми, як Серпінського, так і Гаусдорфа, можна знайти в [1, Theorem 1].

---

УДК 515.12

2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C05, 54D30.

З вищезгаданих характеристик впливає, зокрема, що квадрат  $\mathbb{Q}^2$  є неперервним образом множини  $\mathbb{Q}$  (а точніше, гомеоморфний їй), так само, як квадрат ірраціональних чисел гомеоморфний множині ірраціональних чисел.

Таким чином, цікаво було б знайти опис інших незв'язних підмножин числової прямої, крім тих, що гомеоморфні  $\mathbb{Q}$  чи  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , для яких є неперервна сюр'єкція між самою множиною та її квадратом.

В цій статті ми зупинимось на злічених множинах, множина ізольованих точок яких може бути непорожньою. Основним результатом є отримана нами характеристика (Теорема 2): квадрат зліченного регулярного топологічного простору  $X$  буде його неперервним образом тоді і тільки тоді, коли  $X$  не є компактним.

Результати статті доповідалися на міжнародній конференції до 55-річчя факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича [10].

## 2 ДОСТАТНЯ УМОВА ВЛАСТИВОСТІ ПЕАНО ДЛЯ РЕГУЛЯРНИХ ПРОСТОРІВ

Скрізь у статті під *зліченною множиною* ми розуміємо *нескінченну зліченну* множину.

**Означення 1.** Ми кажемо, що топологічний простір  $X$  має *властивість Пеано*, якщо квадрат цього простору є його неперервним образом, тобто, існує неперервна сюр'єкція  $f : X \rightarrow X^2$ .

**Означення 2.** Топологічний простір  $X$  є *зліченно компактним*, якщо кожна його нескінченна підмножина має граничну точку. Це рівносильно тому, що з кожного зліченного відкритого покриття простору  $X$  можна вибрати скінченне підпокриття.

**Означення 3.** Для підмножини  $A$  топологічного простору  $X$  позначимо її похідну множину

$$A^d = \{x \in X : x \in \overline{A \setminus \{x\}}\}.$$

Покладемо  $A^{(0)} = A$ ,  $A^{(1)} = A^d$  і припустимо, що множини  $A^{(\xi)}$  визначені при всіх  $\xi < \alpha$  для деякого ординала  $\alpha < \omega_1$ . Визначимо

$$A^{(\alpha)} = \begin{cases} (A^{(\xi)})^d, & \text{якщо } \alpha = \xi + 1, \\ \bigcap_{\xi < \alpha} A^{(\xi)}, & \text{якщо } \alpha \text{ граничне.} \end{cases}$$

Рангом Кантора-Бендиксона простору  $X$  називається величина

$$r(X) = \min\{\alpha : X^{(\alpha+1)} = X^{(\alpha)}\}.$$

Легко бачити, що якщо  $X$  –  $T_1$ -простір, то множина  $A^d$ , а також всі множини  $A^{(\alpha)}$  замкнені для довільної множини  $A \subseteq X$ . Для  $T_0$ -просторів, які не є  $T_1$ -просторами, це вже не так: нехай  $\mathbb{R}$  – множина всіх дійсних чисел з топологією, породженою інтервалами  $\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$ , і нехай  $A = \{0\}$ ; тоді множина  $A^d = (0, +\infty)$  не є замкненою в цій топології.

**Твердження 1.** Для зліченного регулярного топологічного простору  $X$  наступні умови рівносильні:

(i)  $X$  не є зліченно компактним;

(ii) існує зліченне покриття  $(U_n : n \in \omega)$  простору  $X$ , яке складається з попарно неперетинних відкрито-замкнених множин.

*Доведення.* (i)  $\Rightarrow$  (ii). Припустимо, що  $X$  не є компактним. Тоді в ньому існує нескінченний дискретний підпростір  $A \subseteq X$ . Оскільки  $X$  регулярний, то він лінделефовий [2, 3.8.1] і нульвимірний [2, 6.2.8]. Будучи лінделефовим,  $X$  є паракомпактним і колективно нормальним [2, 5.1.18], тому існує дискретна сім'я  $\mathcal{U} = \{U_a : a \in A\}$  відкрито-замкнених множин в  $X$ , така, що  $a \in U_a$  для кожного  $a \in A$ . Тоді  $\{X \setminus \bigcup \mathcal{U}, U_a : a \in A\}$  є шуканим покриттям.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Нехай  $\mathcal{P} = \{U_n : n \in \omega\}$  є диз'юнктним покриттям простору  $X$  відкрито-замкненими множинами  $U_n$ . Припустимо від супротивного, що  $X$  є компактним. Виберемо довільну точку  $x_n \in U_n$  для кожного  $n \in \omega$ . Оскільки множина  $A = \{x_n : n \in \omega\}$  є нескінченною, то вона має граничну точку  $a \in A^d$ . Припустимо, що  $a \in U_m$  для деякого  $m \in \omega$ . Тоді множина  $\{n : x_n \in U_m\}$  є нескінченною, що суперечить диз'юнктності покриття  $\mathcal{P}$ .  $\square$

**Зауваження 1.** Для зліченного гаусдорфового простору зліченна компактність рівносильна компактності.

**Зауваження 2.** В доведенні імплікації (ii)  $\Rightarrow$  (i) не використовується регулярність простору  $X$ .

**Наслідок 1.** Між довільним зліченим регулярним некомпактним простором  $X$  та довільним зліченим топологічним простором  $Y$  існує неперервна сюр'єкція.

*Доведення.* Розглянемо диз'юнктне покриття  $(U_k : k \in \omega)$  простору  $X$ , яке складається з відкрито-замкнених множин, існування якого гарантує Твердження 1. Нехай  $Y = \{y_n : n \in \omega\}$  – довільна нумерація елементів простору  $Y$ . Тоді відображення  $f : X \rightarrow Y$ , визначене за правилом

$$f(x) = y_n \quad \text{якщо} \quad x \in U_n,$$

є шуканою неперервною сюр'єкцією.  $\square$

З останнього факту негайно випливає наступний наслідок.

**Наслідок 2.** Кожний злічений регулярний некомпактний простір  $X$  має властивість Пеано.

**Зауваження 3.** Нам невідомо, чи існує злічений гаусдорфівий некомпактний простір  $X$  без властивості Пеано.

## 3 НЕОБХІДНА УМОВА ВЛАСТИВОСТІ ПЕАНО

**Теорема 1.** *Нехай  $X$  – злічений гаусдорфовий простір з властивістю Пеано. Тоді  $X$  не є компактним.*

*Доведення.* Міркуючи від супротивного, припустимо, що  $X$  є компактним, і розглянемо неперервну сюр'єкцію  $f : X \rightarrow X^2$ . Позначимо  $Y = X^2$ .

*Крок 1.*  $Y^{(\alpha)} \subseteq f(X^{(\alpha)})$  для кожного  $\alpha \in [0, \omega_1)$ .

*Доведення.* За трансфінитною індукцією. Для  $\alpha = 0$  маємо  $Y^{(0)} = f(X^{(0)})$ . Припустимо, що включення  $Y^{(\xi)} \subseteq f(X^{(\xi)})$  виконується для всіх  $\xi < \alpha$  і нехай  $p \in Y^{(\alpha)}$ .

Розглянемо випадок ізольованого  $\alpha$ , тобто,  $\alpha = \xi + 1$ . Тоді  $p \in \overline{Y^{(\xi)}} \setminus \{p\}$ . Виберемо нескінченну послідовність  $(p_n)$  точок  $p_n \in Y^{(\xi)}$ , таку, що  $p_n \rightarrow p$  і  $p_n \neq p$ . За індуктивним припущенням для кожного  $n \in \mathbb{N}$  існує точка  $x_n \in X^{(\xi)}$  така, що  $p_n = f(x_n)$ . Оскільки  $X$  компактний, множина  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  має граничну точку  $x$ . Тоді  $x \in X^{(\alpha)}$ . З неперервності  $f$  випливає, що

$$f(x) \in \overline{\{p_n : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Оскільки  $X$  гаусдорфовий, то  $f(x) = p$ .

Нехай тепер  $\alpha$  граничне. Тоді  $p \in Y^{(\xi)} \subseteq f(X^{(\xi)})$  для всіх  $\xi < \alpha$ . Виберемо  $x_\xi \in X^{(\xi)} = \overline{X^{(\xi-1)}} \setminus \{x_\xi\}$  так, що  $p = f(x_\xi)$ . Оскільки  $X$  компактний, існує гранична точка  $x$  множини  $\{x_\xi : \xi < \alpha\}$ ,  $x \neq x_\xi$ . З неперервності  $f$  маємо включення  $f(x) \in \overline{\{f(x_\xi) : \xi < \alpha\}} = \{p\}$ .  $\square$

*Крок 2.* Існує  $\alpha < \omega_1$  таке, що множина  $X^{(\alpha)}$  скінченна і непорожня.

*Доведення.* Нехай  $\beta = r(X)$  – ранг Кантора-Бендиксона простору  $X$  і  $\tau(X)$  – топологія простору  $X$ . Покажемо, що  $X^{(\beta)} = \emptyset$ . Від супротивного, припустимо, що існує  $x_0 \in X^{(\beta)}$ . Для кожного  $k \in \omega$  та кожного елемента  $s \in \{0, 1\}^k$  визначимо точку  $x_s^k$  та її відкритий окіл  $U_s^k$  індуктивно наступним чином.

При  $k = 0$  покладемо

$$x_\emptyset^0 = x_0, \quad U_\emptyset^0 = X^{(\beta)}.$$

Використовуючи те, що точка  $x_0$  не є ізольованою, виберемо  $x_1 \in X^{(\beta)}$ ,  $x_1 \neq x_0$ . Оскільки простір  $X^{(\beta)}$  гаусдорфовий, виберемо відкриті неперетинні околи  $U_0$  та  $U_1$  точок  $x_0$  та  $x_1$ , відповідно. Тепер для  $k = 1$  і  $s \in \{0, 1\}$  покладемо

$$x_1^s = x_s, \quad U_1^s = U_s.$$

Нехай для всіх  $0 \leq n < k$  і  $s \in \{0, 1\}^n$  визначені точки  $x_s^n$  та їх відкриті околи  $U_s^n$ . Зафіксуємо  $s \in \{0, 1\}^k$  і визначимо  $x_s^k$  та  $U_s^k$ . Нехай  $s = (t, i)$ , де  $t \in \{0, 1\}^{k-1}$ ,  $i \in \{0, 1\}$ . Покладемо

$$x_{(t,0)}^k = x_t^{k-1}.$$

Оскільки  $x_{(t,0)}^k$  не ізольована, то існує точка  $x_{(t,1)}^k \in U_t^{k-1}$ , така, що  $x_{(t,1)}^k \neq x_{(t,0)}^k$ . З гаусдорфовості  $X^{(\beta)}$  випливає, що існують відкриті неперетинні околи  $U_{(t,0)}^k$  і  $U_{(t,1)}^k$  точок  $x_{(t,0)}^k$  і  $x_{(t,1)}^k$ , відповідно. Без обмеження загальності, можна вважати, що  $U_s^k \subseteq U_t^{k-1}$ .

Визначимо тепер ін'єктивне відображення  $\varphi : \{0, 1\}^\omega \rightarrow X^{(\beta)}$ . Зафіксуємо  $s \in \{0, 1\}^\omega$ . Якщо  $s = (s_0, s_1, \dots, s_n, 0, 0, \dots, 0)$  для деякого  $n$ , то покладемо

$$\varphi(s) = x_{(s_0, s_1, \dots, s_n)}.$$

Інакше, нескінченна послідовність

$$x_{s_0}, x_{(s_0, s_1)}, x_{(s_0, s_1, s_2)}, \dots$$

має граничну точку  $\bar{x}$ . Покладемо в цьому випадку

$$\varphi(s) = \bar{x}.$$

Покажемо, що так визначене відображення  $\varphi$  є ін'єкцією. Нехай  $s, t \in \{0, 1\}^\omega$ ,  $s \neq t$ . Тоді існує таке  $n$ , що  $s_n \neq t_n$ . Оскільки за побудовою  $\varphi(s) \in U_{(s_0, s_1, \dots, s_n)}$ ,  $\varphi(t) \in U_{(t_0, t_1, \dots, t_n)}$  і  $U_{(s_0, s_1, \dots, s_n)} \cap U_{(t_0, t_1, \dots, t_n)} = \emptyset$ , то  $\varphi(s) \neq \varphi(t)$ .

З ін'єктивності відображення  $\varphi$  і незліченності множини  $\{0, 1\}^\omega$  випливає незліченність множини  $X^{(\beta)} \subseteq X$ . А це суперечить умові теореми. Отже,  $X^{(\beta)} = \emptyset$ .

Якщо  $\beta$  – граничне, то  $X^{(\beta)} = \bigcap_{\xi < \beta} X^{(\xi)} = \emptyset$ , що суперечить компактності простору  $X$ , адже  $(X^{(\xi)})_{\xi < \beta}$  – спадна послідовність замкнених множин. Таким чином,  $\beta = \alpha + 1$  для деякого ординала  $\alpha < \omega_1$ . Тоді  $X^{(\alpha)} \neq \emptyset$ . Якщо  $X^{(\alpha)}$  нескінченна, то  $X^{(\alpha+1)}$  була б непорожня за компактністю  $X$ .

Отже,  $X^{(\alpha)}$  – скінченна і непорожня множина. □

*Крок 3.* Якщо  $X^{(\alpha)} \neq \emptyset$ , то множина  $Y^{(\alpha)}$  нескінченна,  $\alpha \geq 0$ .

*Доведення.* Зауважимо, що твердження негайно випливає з включення

$$X^{(\alpha)} \times X \subseteq Y^{(\alpha)}. \quad (1)$$

Покажемо справедливість цього включення індукцією по  $\alpha$ .

При  $\alpha = 0$  включення очевидне. У випадку  $\alpha = 1$  розглянемо довільне  $x \in X^d$  і  $y \in X$ . Легко бачити, що  $(x, y) \in (X^2)^d$ . Припустимо, що включення (1) правильне для всіх  $\xi < \alpha$  і доведемо його для  $\alpha$ . Нехай  $\alpha = \xi + 1$  і  $(x, y) \in X^{(\alpha)} \times X$ . Звідси за припущенням

$$(x, y) \in \overline{X^{(\xi)} \setminus \{x\}} \times X = \overline{(X^{(\xi)} \setminus \{x\}) \times X} \subseteq \overline{Y^{(\xi)} \setminus \{(x, y)\}} \subseteq Y^{(\alpha)}.$$

Аналогічно можна показати, що (1) правильне і для граничного  $\alpha$ . □

Повернемося до доведення теореми. Згідно з кроком 2, існує ординал  $\alpha < \omega_1$ , такий, що множина  $X^{(\alpha)}$  скінченна і непорожня. Тоді образ  $f(X^{(\alpha)})$  є скінченною непорожньою множиною. З кроку 1 випливає, що  $Y^{(\alpha)} \subseteq f(X^{(\alpha)})$ , а значить, множина  $Y^{(\alpha)}$  скінченна. Крок 3 дає рівність  $X^{(\alpha)} = \emptyset$  і суперечність.

Таким чином, простір  $X$  не є компактним. □

## 4 ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

З наслідку 2 і теореми 1 безпосередньо випливає характеристизація злічених регулярних просторів з властивістю Пеано.

**Теорема 2.** Нехай  $X$  – злічений регулярний простір. Тоді наступні умови рівносильні:

- (i)  $X$  має властивість Пеано.
- (ii)  $X$  не є компактним.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Eberhart C. *Some Remarks on the Irrational and Rational Numbers* Amer. Math. Monthly **84** (1) (1977), 32–35.
2. Engelking R. *General Topology*, Revised and completed ed. – Berlin: Heldermann, 1989.
3. Hahn H. *Mengentheoretische charakterisierung der stetigen kurven*, Sitzungsberichte Akad. der Wissenschaften **123** (1914), 24–33.
4. Hausdorff F. *Die schlichten stetigen Bilder des Nullraums*, Fund. Math. **29** (1937) 151–158.
5. Hocking J., Young G. *Topology*, Dover Publishing, New York, 1961.
6. Mazurkiewicz S. *Sur les lignes de Jordan*, Fund. Math. **1** (1920), 166–209.
7. Nadler S., *Continuum Theory*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.
8. Peano G. *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, Mathematische Annalen, **36** (1) (1890), 157–160.
9. Sierpinski W. *Sur une condition pour qu'un continu soit une courbe jordanienne*, Fund. Math. **1** (1920), 44–60.
10. Горошкевич С., Карлова О. *Злічені криві Пеано*, Міжнародна наукова конференція «Математика та інформаційні технології» до 55-річчя факультету математики та інформатики ЧНУ (28-30 вересня 2023 року), Чернівці, Україна.

**Bibliography:**

1. Eberhart C. *Some Remarks on the Irrational and Rational Numbers* Amer. Math. Monthly **84** (1) (1977), 32–35.
2. Engelking R. *General Topology*, Revised and completed ed. – Berlin: Heldermann, 1989.
3. Hahn H. *Mengentheoretische charakterisierung der stetigen kurven*, Sitzungsberichte Akad. der Wissenschaften **123** (1914), 24–33.
4. Hausdorff F. *Die schlichten stetigen Bilder des Nullraums*, Fund. Math. **29** (1937) 151–158.
5. Hocking J., Young G. *Topology*, Dover Publishing, New York, 1961.
6. Mazurkiewicz S. *Sur les lignes de Jordan*, Fund. Math. **1** (1920), 166–209.

7. Nadler S., *Continuum Theory*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.
8. Peano G. *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, Mathematische Annalen, **36** (1) (1890), 157–160.
9. Sierpinski W. *Sur une condition pour qu'un continu soit une courbe jordanienne*, Fund. Math. **1** (1920), 44–60.
10. Horoshkevych S., Karlova O. *Countable Peano curves*, Int. Conf. "Mathematics and informational technologies", dedicated to the 55th anniversary of the Department of Mathematics and Informatics of Yurii Fedkovych Chernivtsi National University (September 28-30, 2023), Chernivtsi, Ukraine (in Ukrainian).

Надійшло 24.12.2023

---

Horoshkevych S., Karlova O.O. *Countable spaces with Peano property*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 2 (2023), 93–99. ■

In 1890, Giuseppe Peano published an example of a continuous curve passing through every point of the square  $[0, 1]^2$ . A curve with such properties is called a Peano curve. In fact, Peano constructed a continuous surjective mapping from the unit segment  $[0, 1]$  to the square  $[0, 1]^2$ . Peano's research was motivated by one result of George Cantor that the set of points of a unit segment has the same cardinality as the set of points of a unit square.

According to the Hahn-Mazurkevich theorem the Hausdorff topological space  $X$  is a continuous image of a unit segment  $[0, 1]$  if and only if when  $X$  is compact, metrizable, connected, locally connected and nonempty. The Hausdorff continuous image of a segment is called *Peano space* or *Peano continuum*. Sierpinski proved that a connected compact metric space  $X$  is a Peano continuum if and only if for every  $\varepsilon > 0$  the space  $X$  can be covered by connected sets of the diameter  $\leq \varepsilon$ .

Therefore, naturally arises question about the investigation of disconnected metric spaces  $X$  for which there is a continuous surjection between  $X$  and  $X^2$ . Sierpinski characterized rational numbers as a metric countable space without isolated points. Hausdorff described irrational numbers as a metric, separable, completely metrizable, zero-dimensional and nowhere locally compact space.

It follows, in particular, that the square  $\mathbb{Q}^2$  is a continuous image of the set  $\mathbb{Q}$  and the square of irrational numbers is a continuous image of the set of irrational numbers. Thus, it would be interesting to find a description of other disconnected subsets of the real line, except those that are homeomorphic to  $\mathbb{Q}$  or  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

In this article we will focus on countable sets such that the set of isolated points of which may not be empty. The main result is the following (see Theorem 2): the square of a countable regular topological space  $X$  is its continuous image if and only if  $X$  is not compact.