Bukovinian Math. Journal. 2023, **11**, 2, 104–113 Буковинський матем. журнал 2023, Т.11, №2, 104–113

Грушка Я.І.

НЕОБХІДНА І ДОСТАТНЯ ОЗНАКА ІСНУВАННЯ ВНУТРІШНЬОГО ЧАСУ НА ОРІЄНТОВАНІЙ МНОЖИНІ

В роботі доведено необхідну і достатню умову існування внутрішнього часу на орієнтованій множині без синхронізації.

Ключові слова і фрази: Орієнтовані множини, внутрішній час, мінливі множини, шоста проблема Гільберта.

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
e-mail: *grushka@imath.kiev.ua*

Вступ

Тематика даної статті тісно пов'язана із теорією мінливих множин. Основною мотивацією для введення мінливих множин послужила шоста проблема Гільберта, тобто проблема математично строгого формулювання основ теоретичної фізики. Ця проблема була поставлена Д. Гільбертом ще в 1900 р., але на сьогодні залишається дуже актуальною [11]. Ідея звернення до теоретико-множинної термінології та інтуїції в цьому контексті виглядає цілком природною, оскільки довільну картину нашої оточуючої "фізичної" дійсності можна уявляти як множину певних об'єктів. Проте, коли ми придивимось уважніше до будь-якої з "множин", які ми зустрічаємо в реальності, то помітимо певні особливості, які відрізняють ці "множини" від тих, що зустрічаються в класичній теорії множин. Наприклад, множина всіх горобців Чернівецької області є множиною в сенсі класичної теорії множин лише тоді, коли ми спостерігаємо цю множину в певний, фіксований, момент часу. Проте, коли ми поглянемо на цю множину протягом певного проміжку часу, то зауважимо, що ця множина не має сталого складу елементів зі сталими властивостями. З інтуїтивної точки зору мінливі множини це — сукупності об'єктів, які, на відміну від елементів звичайних (статичних) множин, можуть перебувати в процесі постійних трансформацій, тобто — змінювати свої властивості, з'являтись чи зникати, розпадатись на декілька частин чи, навпаки, декілька об'єктів можуть зливатись в один. Крім того картина еволюції мінливої множини може залежати від способу

УДК 510.22, 512.562
2010 *Mathematics Subject Classification:* 03E75, 06A06, 06A75.
Автор щиро вдячний **Simons Foundation** за благодійну допомогу науковцям, що працюють в Україні, у складний воєнний час.

спостереження, тобто від системи відліку. Проблема побудови математичної теорії мінливих множин, тобто “множин” із переліченими вище властивостями, в різних формах ставилась, зокрема в роботах [4, 2, 5, 1, 3]. На математично строгому теорія мінливих множин рівні була побудована в роботах [7, 8, 9, 6] та ін. Найбільш повний і систематичний виклад цієї теорії можна знайти в препринті [10].

Орієнтовані множини є базовим найелементарнішим поняттям теорії мінливих множин, і їх можна трактувати як найпримітивніші абстрактні моделі сукупностей мінливих об'єктів, що еволюціонують в рамках однієї (фіксованої) системи відліку. Поняття орієнтованої множини та часу на орієнтованій множині було введено в роботах [8, 7] (див. також [10, розділ 1]).

Означення 1. *Нехай, M — довільна непорожня множина ($M \neq \varnothing$).*

Довільне рефлексивне бінарне відношення $\leftarrowtriangle$ на M (тобто таке, що $\forall x \in M \; x \leftarrowtriangle x$) будемо називати ***орієнтацією****, а пару $\mathcal{M} = (M, \leftarrowtriangle)$ будемо називати* ***орієнтованою множиною****. При цьому множину M будемо називати базовою, або множиною всіх* ***елементарних станів*** *орієнтованої множини $\mathcal{M}$ і будемо позначати її через $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, а відношення $\leftarrowtriangle$ будемо називати* ***напрямним відношенням змін (трансформацій)*** *$\mathcal{M}$ і будемо позначати його через $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$.*

У випадку, коли відомо, про яку орієнтовану множину $\mathcal{M}$ йде мова, в позначенні $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$ символ $\mathcal{M}$ будемо опускати, вживаючи позначення “$\leftarrow$”. Для елементів $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ запис $y \leftarrow x$ слід розуміти, як “елементарний стан y є результатом трансформацій, або “трансформаційним нащадком” елементарного стану x”. Наприклад, уявімо собі, що орієнтована множина $\mathcal{M}$ моделює поведінку деякої популяції горобців за певний проміжок часу $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$. Тоді $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ — це множина всіх станів всіх горобців даної моделі за проміжок часу $\mathcal{T}$ [1]. В такій моделі для елементів $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ запис $x_2 \leftarrow x_1$ природно вживати тоді і тільки тоді, коли x_1 і x_2 є станами **одного й того ж самого** горобця в моменти часу $t_1, t_2 \in \mathcal{T}$ такі, що $\boldsymbol{t_1 \leq t_2}$ (підкреслимо, що тут відношення $\leq$ означає стандартний порядок на полі дійсних чисел $\mathbb{R}$).

Нагадаємо, що лінійно упорядкованою множиною називається довільна упорядкована пара виду $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$, де $\leq$ — рефлексивне, асиметричне та транзитивне бінарне відношення на $\mathbf{T}$, таке, що для довільних $t, \tau \in \mathbf{T}$ має місце хоча б одна з умов $t \leq \tau$ або $\tau \leq t$. Відношення $\leq$ називають нестрогим лінійним порядком на $\mathbf{T}$. Це відношення породжує відношення строгого лінійного порядку на $\mathbf{T}$ таке, що для довільних $t, \tau \in \mathbf{T}$ умова $t < \tau$ виконується тоді і тільки тоді, коли $t \leq \tau$ і $t \neq \tau$.

Означення 2. *Нехай, $\mathcal{M}$ — орієнтована множина і $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина. Відображення $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ називається* ***часом*** *на $\mathcal{M}$, якщо виконуються такі умови:*

[1] З яких конкретно математичних об'єктів складатиметься множина $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ залежить від того, що нас цікавитиме в даній моделі і від рівня деталізації самої моделі. Зокрема, якщо (для простоти) обмежитись примітивною кінематичною моделлю, в якій кожен горобець приймається за матеріальну точку, то елементами $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ (тобто елементарними станами горобців) будуть об'єкти виду $x = (x_1, x_2, x_3)$, а саме, координати центрів мас всіх горобців відносно певної, зручної для нас системи відліку $\mathfrak{l}$ у всі моменти часу $t \in \mathcal{T}$.

1. *Для довільного елементарного стану $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ існує елемент $t \in \mathbf{T}$ такий, що $x \in \psi(t)$.*
2. *Якщо $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \neq x_2$, то існують елементи $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_1 < t_2$ (тобто має місце часова роздільність послідовних неоднакових елементарних станів).*

При цьому:

- *Елементи $t \in \mathbf{T}$ будемо називати* ***моментами часу****.*
- *Пару $\mathcal{H} = (\mathbb{T}, \psi) = ((\mathbf{T}, \leq), \psi)$ будемо називати* ***хронологізацією*** *$\mathcal{M}$.*

Будемо говорити, що орієнтовану множину $\mathcal{M}$ ***можна хронологізувати***, якщо існує хоч одна хронологізація $\mathcal{M}$. Виявляється, що будь-яку орієнтовану множину $\mathcal{M}$ завжди можна хронологізувати. Найпростіший спосіб це зробити — взяти лінійно-упорядковану множину $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$, що містить не менше двох елементів (тобто $\mathbf{card}(\mathbf{T}) \geq 2$) і покласти:

$$\psi(t) := \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \quad (t \in \mathbf{T}).$$

Легко перевірити, що для функції $\psi(\cdot)$ виконуються умови означення 2. Більш нетривіальні способи хронологізації орієнтованих множин розглянуті, наприклад, в роботах [8, 7] (див. також [10, розділ 1]). Зокрема в зазначених роботах було введено поняття внутрішнього часу, а також досліджувалось питання про існування внутрішнього часу на орієнтованій множині з певною умовою на синхронізацію. Зазначимо, що з інтуїтивної точки зору внутрішній час на орієнтованій множині — це такий час, хід якого можна "спостерігати і фіксувати" "живучи всередині" цієї орієнтованої множини (математично строге означення даного поняття буде дано в наступному розділі статті). Повністю розв'язати питання про існування внутрішнього часу на орієнтованій множині із заданою синхронізацією в [8, 7] так і не вдалося. Отримано лише достатні умови на існування такого часу. Проте, виявляється, що, якщо відкинути додаткові умови на синхронізацію, то задача про існування внутрішнього часу на орієнтованій множині без синхронізації досить нескладно розв'язується в повному обсязі. І дана стаття присвячена розв'язанню саме цієї задачі.

1 Основні означення та позначення

В цьому розділі будуть сформульовані найважливіші означення та введені позначення, необхідні для викладу основних результатів.

Позначення 1. *На довільній орієнтованій множині $\mathcal{M}$ введемо додатково наступне бінарне відношення:*

► *Для довільних $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ будемо позначати $y \overset{+}{\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}} x$ тоді і тільки тоді, коли:*

$$y \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} x \quad і \quad x \underset{\mathcal{M}}{\not\leftarrow} y.$$

► *У випадках, коли не виникає непорозумінь замість позначення $y \overset{+}{\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}} x$ будемо використовувати позначення $y \overset{+}{\leftarrow} x$.*

Означення 3. *Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина.*

1) Будемо говорити, що множина $B \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ ***монотонно послідовна*** *множині $A \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ в орієнтованій множині $\mathcal{M}$, якщо існують такі елементи $x \in A$ і $y \in B$, що $y \overset{+}{\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}} x$. В цьому випадку будемо використовувати позначення позначення $B \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow(+)} A$.*

2) Нехай $\mathcal{Q} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — деяка система підмножин множини $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$. Будемо говорити, що множина $B \in \mathcal{Q}$ ***транзитивно монотонно послідовна*** *множині $A \in \mathcal{Q}$ відносно $\mathcal{Q}$ (використовуючи позначення $B \overset{\mathcal{Q}}{\underset{\mathcal{M}}{\twoheadleftarrow(+)}} A$), якщо існує така послідовність множин $C_0, C_1, \cdots, C_n \in \mathcal{Q}$ $(n \in \mathbb{N})$, що $C_0 = A$, $C_n = B$ і для довільного $k \in \overline{1,n}$ $C_k \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow(+)} C_{k-1}$.*

У випадку, коли наперед відомо, про яку орієнтовану множину $\mathcal{M}$ йде мова в позначеннях $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow(+)}$ і $\overset{\mathcal{Q}}{\underset{\mathcal{M}}{\twoheadleftarrow(+)}}$ символ $\mathcal{M}$ будемо опускати, вживаючи, замість них позначення $\leftarrow(+)$ і $\overset{\mathcal{Q}}{\twoheadleftarrow(+)}$ відповідно. Також будемо вживати позначення $B \not\leftarrow(+) A$ у випадку, якщо умова $B \leftarrow(+) A$ не має місця.

Означення 4. *Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина, а $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — час на $\mathcal{M}$ (заданий на лінійно упорядкованій множині $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$).*

Відображення $\mathbf{h} : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ будемо називати ***хронометричним*** *процесом (для часу ψ), якщо:*

1) $\mathbf{h}(t) \subseteq \psi(t)$ для довільного $t \in \mathbf{T}$.

2) Для довільних $t, \tau \in \mathbf{T}$ умова $t < \tau$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{h}(\tau) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow(+)} \mathbf{h}(t)$ і $\mathbf{h}(t) \neq \mathbf{h}(\tau)$, де $\mathbf{h}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{h}(t) \mid t \in \mathbf{T}\}$;

Час ψ на орієнтованій множині $\mathcal{M}$ будемо називати ***внутрішнім***, *якщо для цього часу існує хоч один хронометричний процес.*

Інтуїтивний зміст терміну "внутрішній час" полягає в тому, що якщо час на орієнтованій множині є внутрішнім, його можна "поміряти" в межах цієї орієнтованої множини, використовуючи хронометричний процес в якості "годинника", а стани хронометричного процесу в якості індикаторів моментів часу.

В подальшому буде корисним наступне твердження.

Твердження 1. *Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина, а $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — час на $\mathcal{M}$ (заданий на лінійно упорядкованій множині $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$). Якщо відображення $\mathbf{h} : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ має такі властивості:*

1) $\mathbf{h}(t) \subseteq \psi(t)$ для довільного $t \in \mathbf{T}$;
2) $\mathbf{h}(t) \neq \mathbf{h}(\tau)$ при $t \neq \tau$;
3) якщо $t, \tau \in \mathbf{T}$ і $t \neq \tau$ то має місце хоч одна з умов $\mathbf{h}(\tau) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow(+)} \mathbf{h}(t)$ або $\mathbf{h}(t) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow(+)} \mathbf{h}(\tau)$;
4) якщо $t, \tau \in \mathbf{T}$, $\mathbf{h}(t) \neq \mathbf{h}(\tau)$ і $\mathbf{h}(\tau) \leftarrow(+) \mathbf{h}(t)$ то $t < \tau$,

то $\mathbf{h}$ є хронометричним процесом для часу ψ.

Доведення. Враховуючи умову 1) даного твердження досить довести, що:

(*) Для довільних $t, \tau \in \mathbf{T}$ умова $t < \tau$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{h}(\tau) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow\!(+)} \mathbf{h}(t)$ і $\mathbf{h}(t) \neq \mathbf{h}(\tau)$.

а) Нехай, $\mathbf{h}(\tau) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow\!(+)} \mathbf{h}(t)$ і $\mathbf{h}(t) \neq \mathbf{h}(\tau)$. Тоді існує число $n \in \mathbb{N}$ і існують моменти часу $\tau_0, \dots, \tau_n \in \mathbf{T}$ такі, що $\tau_0 = t$, $\tau_n = \tau$ і $\forall k \in \overline{1,n}$ $(\mathbf{h}(\tau_k) \leftarrow\!(+)\, \mathbf{h}(\tau_{k-1}))$. Звідси, враховуючи умови 2) і 4) даного твердження випливає, що для довільного $k \in \overline{1,n}$ має місце нерівність $\tau_{k-1} \leq \tau_k$. Справді, нехай $k \in \overline{1,n}$. Якщо $\mathbf{h}(\tau_k) \neq \mathbf{h}(\tau_{k-1})$, то з умови 4) даного твердження випливає, що $\tau_{k-1} < \tau_k$. Якщо ж $\mathbf{h}(\tau_k) = \mathbf{h}(\tau_{k-1})$, то з умови 2) даного твердження отримуємо, $\tau_{k-1} = \tau_k$. Оскільки $\mathbf{h}(\tau_0) = \mathbf{h}(t) \neq \mathbf{h}(\tau) = \mathbf{h}(\tau_n)$, то існує номер $k_0 \in \overline{1,n}$ такий, що $\mathbf{h}(\tau_{k_0}) \neq \mathbf{h}(\tau_{k_0-1})$. Для такого номера k_0 на основі умови 4) даного твердження отримаємо нерівність $\tau_{k_0-1} < \tau_{k_0}$. Таким чином маємо, $\tau_0 \leq \tau_1 \leq \cdots \leq \tau_n$, причому для деякого $k_0 \in \overline{1,n}$ має місце строга нерівність $\tau_{k_0-1} < \tau_{k_0}$. Тому $\tau_0 < \tau_n$. І враховуючи, що $\tau_0 = t$ і $\tau_n = \tau$ отримуємо нерівність $t < \tau$. Таким чином справедливе наступне твердження:

(*1) Якщо $\mathbf{h}(\tau) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow\!(+)} \mathbf{h}(t)$ і $\mathbf{h}(t) \neq \mathbf{h}(\tau)$ то $t < \tau$.

б) Нехай $t < \tau$. Тоді, згідно з умовою 2) даного твердження, $\mathbf{h}(t) \neq \mathbf{h}(\tau)$. Припустимо, що умова $\mathbf{h}(\tau) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow\!(+)} \mathbf{h}(t)$ не виконується. Тоді, згідно з умовою 3) даного твердження, маємо, $\mathbf{h}(t) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow\!(+)} \mathbf{h}(\tau)$. Звідси, використовуючи твердження (*1), доведене в пункті а), отримуємо нерівність $\tau < t$, яка суперечить нерівності $t < \tau$. Отже, зроблене припущення — помилкове. Тому виконуються умови $\mathbf{h}(\tau) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow\!(+)} \mathbf{h}(t)$ і $\mathbf{h}(t) \neq \mathbf{h}(\tau)$.

З доведених вище пунктів а) і б) випливає справедливість твердження (*), сформульованого на початку доведення, яке й необхідно було довести. $\square$

2 Тривіально-статичний внутрішній час на статичній орієнтованій множині

Означення 5. *Орієнтовану множину $\mathcal{M}$ будемо називати* ***статичною****, якщо для довільних $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ умова $y \leftarrow x$ має місце тоді і тільки тоді, коли $x = y$. Орієнтовану множину $\mathcal{M}$ будемо називати* ***нестатичною****, якщо вона не є статичною.*

Питання про існування внутрішнього часу на статичній орієнтованій множині розв'язується досить легко. Справді, нехай $\mathcal{M}$ — статична орієнтована множина. Розглянемо довільну одноелементну лінійно упорядковану множину (наприклад $\mathbf{T} = \{1\}$ зі стандартним порядком на множині натуральних чисел, який в даному випадку задається єдиним співвідношенням $1 \leq 1$). Покладемо

$$\psi_{\mathrm{st}}(t) := \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \quad (t \in \mathbf{T}). \tag{1}$$

Тоді відображення $\psi_{\mathrm{st}} : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ буде внутрішнім часом на $\mathcal{M}$ з хронометричним процесом

$$\mathbf{h}_{\mathrm{st}}(t) = \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) = \psi_{\mathrm{st}}(t) \quad (t \in \mathbf{T}). \tag{2}$$

Справді:

а) Перша умова означення 2 для відображення $\psi_{\mathrm{st}}(t)$ виконується тривіальним чином, а виконання другої умови цього означення випливає із включення:

$$\begin{aligned}&\left\{(x_1,x_2)\in\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})^{\times 2}\mid\ (x_2\leftarrow x_1)\,\&\,(x_1\neq x_2)\right\}=\varnothing\subseteq\\&\qquad\subseteq\left\{(x_1,x_2)\in\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})^{\times 2}\mid\exists t_1,t_2\in\mathbf{T}\left((x_1\in\psi_{\mathrm{st}}(t_1))\,\&\,(x_2\in\psi_{\mathrm{st}}(t_2))\,\&\,(t_1<t_2)\right)\right\},\end{aligned}$$

де $\mathcal{X}^{\times 2}=\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ означає декартовий квадрат (довільної) множини $\mathcal{X}$. Отже, відображення ψ_{st} є часом на (статичній) орієнтованій множині $\mathcal{M}$.

б) Умова 1) означення 4 для відображення $\mathbf{h}_{\mathrm{st}}$ випливає з рівності (2), а умова 2) цього означення для $\mathbf{h}_{\mathrm{st}}$ на теоретико-множинній мові переписується у вигляді:

$$\left\{(t,\tau)\in\mathbf{T}^{\times 2}\mid t<\tau\right\}=\left\{(t,\tau)\in\mathbf{T}^{\times 2}\mid\ \left(\mathbf{h}_{\mathrm{st}}(\tau)\overset{\mathbf{h}_{\mathrm{st}}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow(+)}\mathbf{h}_{\mathrm{st}}(t)\right)\&\left(\mathbf{h}_{\mathrm{st}}(t)\neq\mathbf{h}_{\mathrm{st}}(\tau)\right)\right\}. \qquad (3)$$

Рівність (3), очевидно, має місце, оскільки обидві множини в лівій і правій частині цієї рівності є порожніми. Час ψ_{st}, побудований в формулі (1) (на одноелементній лінійно упорядкованій множині) будемо називати ***тривіально-статичним*** часом на орієнтованій множині $\mathcal{M}$. Таким чином маємо наступний висновок:

Твердження 2. *На будь-якій статичній орієнтованій множині $\mathcal{M}$ завжди існує тривіально-статичний внутрішній час.*

Також нескладно переконатися, що в статичній орієнтованій множині може існувати лише тривіально-статичній внутрішній час. Справді, нехай $\psi:\mathbf{T}\to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — внутрішній час на статичній орієнтованій множині $\mathcal{M}$, заданий на лінійно упорядкованій множині $\mathbb{T}=(\mathbf{T},\leq)$. Тоді для часу ψ існує хронометричний процес $\mathbf{h}:\mathbf{T}\to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$. Припустимо, що $\mathbf{card}(\mathbf{T})\neq 1$. Тоді $\mathbf{card}(\mathbf{T})>1$, а отже існують елементи $t_1,t_2\in\mathbf{T}$ такі, що $t_1<t_2$. Оскільки $\mathbf{h}$ — хронометричний процес, то, за означенням 4, з нерівності $t_1<t_2$ випливає співвідношення $\mathbf{h}(t_2)\overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow(+)}\mathbf{h}(t_1)$, тобто (за означенням 3, пункт 2)) існує число $n\in\mathbb{N}$ і існують моменти часу $\tau_0,\ldots,\tau_n\in\mathbf{T}$ такі, що $\tau_0=t_1$, $\tau_n=t_2$ і $\forall k\in\overline{1,n}\ (\mathbf{h}(\tau_k)\leftarrow(+)\,\mathbf{h}(\tau_{k-1}))$. Зокрема маємо $\mathbf{h}(\tau_1)\leftarrow(+)\,\mathbf{h}(\tau_0)$. Тому, за означенням 3, пункт 1), існують такі елементи $x\in\mathbf{h}(\tau_0)$ і $y\in\mathbf{h}(\tau_1)$, що $y\overset{+}{\leftarrow}x$, тобто такі, що $y\leftarrow x$ і $x\not\leftarrow y$ (див. позначення 1). Звідси, в силу рефлексивності відношення $\leftarrow$ на $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, випливає, що $x\neq y$. Отже, в орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існують елементи $x,y\in\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такі, що $y\leftarrow x$ і $x\neq y$, що суперечить умові, що орієнтована множина $\mathcal{M}$ є статичною (див. означення 5). Тому припущення про те, що $\mathbf{card}(\mathbf{T})\neq 1$ є помилковим. Отже, $\mathbf{card}(\mathbf{T})=1$. Тобто, множину $\mathbf{T}$ можна подати у вигляді $\mathbf{T}=\{t_0\}$. Звідси, в силу умови 1 означення 2, маємо $\psi(t_0)=\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$. Тому $\psi(t)=\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ $(\forall t\in\mathbf{T}=\{t_0\})$ тобто, згідно з формулою (1), $\psi(t)=\psi_{\mathrm{st}}(t)\quad(\forall t\in\mathbf{T})$. Отже, внутрішній час ψ є тривіально-статичним. Таким чином ми довели наступне твердження:

Твердження 3. *Будь-який внутрішній час ψ на довільній статичній орієнтованій множині $\mathcal{M}$ є тривіально-статичним.*

3 Існування внутрішнього часу на нестатичній орієнтованій множині.

Таким чином, нетривіальним залишається питання про існування внутрішнього часу в нестатичних орієнтованих множинах. Теорема нижче дає розв'язок цього питання, а також питання про існування невпинного внутрішнього часу. Для формулювання цієї теореми сформулюємо спочатку означення невпинного часу.

Означення 6. *Час $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ на орієнтованій множині $\mathcal{M}$ (де $(\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина) будемо називати* ***невпинним****, якщо не існує моментів часу $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ таких, що $t_1 < t_2$ і для довільного $t \in \mathbf{T}$ такого, що $t_1 \leq t \leq t_2$ має місце рівність $\psi(t) = \psi(t_1)$.*

Теорема 1. *Для довільної нестатичної орієнтованої множини $\mathcal{M}$ наступні твердження рівносильні:*

It1 *На $\mathcal{M}$ існує внутрішній час.*

It2 *На $\mathcal{M}$ існує невпинний внутрішній час.*

It3 *Існує хоч одна пара елементів $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ така, що $y \overset{+}{\leftarrow} x$.*

Доведення. Доведення будемо проводити за схемою **It2⇒It1⇒It3⇒It2**.

It2⇒It1. Імплікація **It2⇒It1** — очевидна.

It1⇒It3. Нехай на нестатичній орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існує внутрішній час ψ, заданий на лінійно упорядкованій множині $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$. Оскільки орієнтована множина $\mathcal{M}$ — нестатична, то (за означенням 5) існують елементи $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такі, що $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \neq x_2$. Оскільки відображення $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ є часом, то (за означенням часу) існують моменти часу $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_1 < t_2$. Отже, лінійно упорядкована множина $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ містить елементи $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $t_1 < t_2$. Нехай, $\mathbf{h}$ — хронометричний процес для внутрішнього часу ψ. Тоді (за означенням 4) з нерівності $t_1 < t_2$ випливає співвідношення $\mathbf{h}(t_2) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow (+)} \mathbf{h}(t_1)$. Останнє співвідношення (за означенням 3, пункт 2)) означає, що існує число $n \in \mathbb{N}$ і існують моменти часу $\tau_0, \ldots, \tau_n \in \mathbf{T}$ такі, що $\tau_0 = t_1$, $\tau_n = t_2$ і $\forall k \in \overline{1,n}$ $(\mathbf{h}(\tau_k) \leftarrow (+) \mathbf{h}(\tau_{k-1}))$. Зокрема маємо $\mathbf{h}(\tau_1) \leftarrow (+) \mathbf{h}(\tau_0)$. Тому, за означенням 3, пункт 1), існують такі елементи $x \in \mathbf{h}(\tau_0)$ і $y \in \mathbf{h}(\tau_1)$, що $y \overset{+}{\leftarrow} x$. Враховуючи, що, за означенням 4 та означенням часу $\mathbf{h}(\tau_i) \subseteq \psi(\tau_i) \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ $(i \in \{0, 1\})$, маємо, $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$. Отже, існують $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такі, що $y \overset{+}{\leftarrow} x$.

It3⇒It2. Нехай в орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існують елементи $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такі, що $y \overset{+}{\leftarrow} x$. Тоді, оскільки (за означенням орієнтованої множини) відношення $\leftarrow$ рефлексивне на $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, маємо $x \neq y$. Розглянемо лінійно упорядковану множину $\mathbf{T} := \{1, 2, 3\}$ зі стандартним відношенням порядку $\leq$ на множині натуральних чисел ($1 \leq 1$, $2 \leq 2$, $3 \leq 3$, $1 < 2$, $2 < 3$, $1 < 3$). Покладемо $\mathbb{T} := (\mathbf{T}, \leq)$. Розглянемо відображення $\psi : \mathbf{T} \to$

$2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$, що задається формулою:

$$\psi(t) := \begin{cases} \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \setminus \{y\}, & t = 1 \\ \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}), & t = 2 \\ \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \setminus \{x\}, & t = 3. \end{cases} \tag{4}$$

Доведемо, що так визначене відображення ψ є часом на орієнтованій множині $\mathcal{M}$.

а) Нехай, $\widetilde{x} \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$. Тоді $\widetilde{x} \in \psi(2)$ (тобто $\forall \widetilde{x} \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})\, \exists \widetilde{t} \in \mathbf{T}\ \left(\widetilde{x} \in \psi\left(\widetilde{t}\right)\right)$.

б) Нехай, $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, $\widetilde{y} \leftarrow \widetilde{x}$ і $\widetilde{x} \neq \widetilde{y}$. Тоді при $\widetilde{x} \neq y$ маємо $\widetilde{x} \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \setminus \{y\} = \psi(1)$, $\widetilde{y} \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) = \psi(2)$, де $1 < 2$. Якщо ж $\widetilde{x} = y$ то маємо $\widetilde{y} \neq x$, бо коли припустити, що $\widetilde{y} = x$, то із співвідношення $\widetilde{y} \leftarrow \widetilde{x}$ отримаємо співвідношення $x \leftarrow y$, яке суперечить співвідношенню $y \overset{+}{\leftarrow} x$, заданому за умовою. Тому в цьому випадку отримаємо $\widetilde{x} \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) = \psi(2)$, $\widetilde{y} \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \setminus \{x\} = \psi(3)$, де $2 < 3$. Отже у всіх випадках для довільних $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ таких, що $\widetilde{y} \leftarrow \widetilde{x}$ і $\widetilde{x} \neq \widetilde{y}$ існують моменти часу $\widetilde{t}_1, \widetilde{t}_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $\widetilde{x} \in \psi\left(\widetilde{t}_1\right)$, $\widetilde{y} \in \psi\left(\widetilde{t}_2\right)$ і $\widetilde{t}_1 < \widetilde{t}_2$.

З пунктів а) і б), за означенням часу, випливає, що відображення ψ є часом на орієнтованій множині $\mathcal{M}$. Доведемо, що час ψ є внутрішнім. Покладемо:

$$\mathbf{h}(t) := \psi(t) \cap \{x, y\} = \begin{cases} \{x\}, & t = 1 \\ \{x, y\}, & t = 2 \\ \{y\}, & t = 3. \end{cases} \tag{5}$$

Тоді $\mathbf{h}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{h}(1), \mathbf{h}(2), \mathbf{h}(3)\} = \{\{x\}, \{x, y\}, \{y\}\}$. Для відображення $\mathbf{h}$, заданого формулою (5) на множині $\mathbf{T} = \{1, 2, 3\}$, маємо:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{h}(2) \leftarrow\!(+)\, \mathbf{h}(1), & \mathbf{h}(1) \not\leftarrow\!(+)\, \mathbf{h}(2); \\ \mathbf{h}(3) \leftarrow\!(+)\, \mathbf{h}(2), & \mathbf{h}(2) \not\leftarrow\!(+)\, \mathbf{h}(3); \\ \mathbf{h}(3) \leftarrow\!(+)\, \mathbf{h}(1), & \mathbf{h}(1) \not\leftarrow\!(+)\, \mathbf{h}(3). \end{array}\right\} \tag{6}$$

З рівності (5) випливає, що відображення $\mathbf{h}$ задовольняє умови 1), 2) твердження 1. А з умов (6) випливає, що це відображення також задовольняє і умови 3) та 4) твердження 1. Отже, згідно з твердженням 1, $\mathbf{h}$ є хронометричним процесом для часу ψ. Тому час ψ є внутрішнім. Оскільки $x \neq y$ то, згідно з формулою (4), для довільних $\tau_1, \tau_2 \in \mathbf{T}$ маємо $\psi(\tau_1) \neq \psi(\tau_2)$ при $\tau_1 \neq \tau_2$. Отже, неможливою є ситуація, коли $t_1 < t_2$ і для довільного $t \in \mathbf{T}$ такого, що $t_1 \leq t \leq t_2$ має місце рівність $\psi(t) = \psi(t_1)$. Тому, за означенням 6, час ψ є невпинним. Отже, час ψ — невпинний і внутрішній. □

Зауваження 1. *1. Якщо орієнтована множина задовольняє умову **It3** теореми 1, то внутрішній час на ній визначається, взагалі кажучи, неоднозначно. Зокрема, якщо крім елементів $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ таких що $y \overset{+}{\leftarrow} x$ існують елементи $x_1, y_1 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такі, що $y_1 \overset{+}{\leftarrow} x_1$ і $\{x, y\} \cap \{x_1, y_1\} = \varnothing$, то конструкція побудови внутрішнього часу в доведенні теореми 1, при застосуванні до елементів x, y та x_1, y_1, дасть два різних внутрішні часи.*

2. Побудувати просто внутрішній час на орієнтованій множині, що задовольняє умову ***It3*** *теореми 1 нескладно. Для цього досить взяти лінійно упорядковану множину* $\mathbf{T} = \{1, 2\}$ *і покласти* $\psi(t) := \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ $(t \in \mathbf{T})$*. Легко бачити, що так визначене відображення* ψ *є часом (див. також [8, формула (1)]). Використовуючи твердження 1 нескладно довести, що хронометричним процесом для часу* ψ *є відображення* $\mathbf{h}(t) = \begin{cases} \{x\}, & t = 1 \\ \{y\}, & t = 2 \end{cases}$*. Підкреслимо, що в імплікації* ***It3⇒It2*** *доводиться існування саме* ***невпинного*** *внутрішнього часу на* $\mathcal{M}$.

Список літератури

[1] Michael Barr, ColinMc larty and Charles Wells. Variable Set Theory. 1986. URL: http://www.math.mcgill.ca/barr/papers/vst.pdf.

[2] A.P. Levich. Time as variability of natural systems: ways of quantitative description of changes and creation of changes by substantial flows. World Scientific, 1995. URL: http://www.chronos.msu.ru/old/EREPORTS/levich1.pdf. doi: 10.1142/9789812832092_0010.

[3] John L. Bell. Abstract and Variable Sets in Category Theory. Polimetrica International Scientific Publisher, 2006. URL: http://publish.uwo.ca/ jbell/Bell2.pdf.

[4] А.П. Левич. Методологические трудности на пути к пониманию феномена времени. Московско-Петербургский Философский Клуб, Москва, 2009. URL: http://www.chronos.msu.ru/old/RREPORTS/levich_trudnosti.pdf.

[5] А.П. Левич. Моделирование “динамических множеств”. МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2009. URL: http://www.chronos.msu.ru/old/RREPORTS/levich_dinamich.html.

[6] Я.I. Грушка. *Видимість у мінливих множинах*. Збірник праць Інституту математики НАН України 2012, **9** (2), 122–145.

[7] Я.I. Грушка. *Мінливі множини та їх властивості*. Доповіді Національної академії наук України 2012, (5), 12–18.

[8] Я.I. Грушка. *Примітивні мінливі множини та їх властивості*. Математичний вісник НТШ 2012, **9** 52–80.

[9] Я.I. Грушка. *Базові мінливі множини та математичне моделювання еволюції систем*. Укр. мат. журн. 2013, **65** (9), 1198–1218. doi: 10.1007/s11253-014-0862-6.

[10] Ya.I. Grushka. Draft introduction to abstract kinematics. (Version 2.0). Preprint: ResearchGate, 2017. URL: https://doi.org/10.13140/RG.2.2.28964.27521. doi: 10.13140/RG.2.2.28964.27521.

[11] A.N. Gorban. *Hilbert's sixth problem: the endless road to rigour*. Phil. Trans. R. Soc. A 2018, **376** (2118), 20170238. doi: 10.1098/rsta.2017.0238.

References

[1] Michael Barr, ColinMc larty and Charles Wells. Variable Set Theory. 1986. URL: http://www.math.mcgill.ca/barr/papers/vst.pdf.

[2] A.P. Levich. Time as variability of natural systems: ways of quantitative description of changes and creation of changes by substantial flows. World Scientific, 1995. URL: http://www.chronos.msu.ru/old/EREPORTS/levich1.pdf. doi: 10.1142/9789812832092_0010.

[3] John L. Bell. Abstract and Variable Sets in Category Theory. Polimetrica International Scientific Publisher, 2006. URL: http://publish.uwo.ca/ jbell/Bell2.pdf.

[4] Levich A.P. Methodological difficulties in the way to understanding the phenomenon of time. Moscow-Petersburg Philosophical Club, Moscow, 2009. URL: http://www.chronos.msu.ru/old/RREPORTS/levich_trudnosti.pdf.

[5] Levich A.P. Modeling of "dynamic sets". MGTU named after N.E. Bauman, Moscow, 2009. URL: http://www.chronos.msu.ru/old/RREPORTS/levich_dinamich.html.

[6] Ya.I. Grushka. *Visibility in changeable sets*. Proceedings of Institute of Mathematics NAS of Ukraine 2012, **9** (2), 122–145.

[7] Ya.I. Grushka. *Changeable sets and their properties*. Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine 2012, (5), 12–18.

[8] Ya.I. Grushka. *Primitive changeable sets and their properties*. Mathematics Bulletin of Science Association of Taras Shevchenko 2012, **9** 52–80.

[9] Ya.I. Grushka. *Base Changeable Sets and Mathematical Simulation of the Evolution of Systems*. Ukrainian Mathematical Journal 2013, **65** (9), 1198–1218. doi: 10.1007/s11253-014-0862-6.

[10] Ya.I. Grushka. Draft introduction to abstract kinematics. (Version 2.0). Preprint: ResearchGate, 2017. URL: https://doi.org/10.13140/RG.2.2.28964.27521. doi: 10.13140/RG.2.2.28964.27521.

[11] A.N. Gorban. *Hilbert's sixth problem: the endless road to rigour*. Phil. Trans. R. Soc. A 2018, **376** (2118), 20170238. doi: 10.1098/rsta.2017.0238.

Надійшло 27.11.2023

Grushka Ya.I. *Necessary and sufficient condition for the existence of internal time on an oriented set*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 2 (2023), 104–113.

The notion of oriented set is the most elementary technical notion of the theory of changeable sets, which is needed for the general definition of changeable set notion. The main motivation for building the theory of changeable sets was the sixth Hilbert problem, that is, the problem of mathematically rigorous formulation of the fundamentals of theoretical physics.

From the formal point of view oriented set is the simplest relation system with one reflexive binary relation. Oriented sets may be interpreted as simplest abstract models of sets of changing objects, evolving in the framework of the single (specified) reference frame. From the other hand in the framework of oriented sets we can give the mathematically strict and abstract definition of the notion of time as some mapping from some linearly ordered set to the power set of the set of elementary states of oriented set. Internal time may be considered as most natural time for an oriented set. From intuitive point of view internal time is the time, which can be "observed from the inside" of the oriented set. In the present paper we solve the problem of the existence of internal time on an oriented set without any synchronization. We prove necessary and sufficient condition for the existence of such time.