Дронь В.С.

ПРО КЛАСИЧНИЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА

Дослідження присвячене ультрапараболічним рівнянням з двома групами просторових змінних, які з'являються в задачах, що описують азійські опціони на ринку фінансових послуг. Клас цих рівнянь за виконання певних умов є узагальненням добре відомого виродженого параболічного рівняння дифузії з інерцією А.М.Колмогорова. Раніше для рівнянь з цього класу було побудовано так званий фундаментальний L-розв'язок. У цій роботі для таких рівнянь побудовано і досліджено класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші. На коефіцієнти рівняння було накладено спеціальні умови Гельдера відносно просторових змінних.

Ключові слова і фрази: ультрапараболічне рівняння типу Колмогорова, фундаментальний розв'язок задачі Коші, азійські опціони, спеціальні умови Гельдера.

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 3b Naukova str., 79060, Lviv, Ukraine
e-mail: *vdron@ukr.net*

Вступ

На фінансовому ринку облігації та акції, зазвичай, називаються первинними фінансовими активами. На ринку вторинних цінних паперів (деривативів) платіжні зобов'язання – це інструменти з часом виконання T, за якими виплачується певна винагорода [12, С. 356]. Європейське платіжне зобов'язання або європейський опціон залежить лише від основних цін в момент T. Наприклад, європейський опціон купівлі зі страйковою ціною K і датою виконання T на одиницю акції $S = S_t$, $t \leq T$ – це контракт, який дає його покупцю (власнику опціону) право купити одиницю основного (первинного) активу S у момент часу T за погодженою ціною K.

УДК 517.956.4
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K70.
Світлій пам'яті професора Степана Дмитровича Івасишена, який був ініціатором і натхненником цього дослідження.

У праці [2] Ф.Блек і М.Шоулс довели, що справедлива ціна європейський опціону як функція ціни активу і часу $V(S_t,t)$ за деяких припущень щодо фінансового ринку є розв'язком такого диференціального рівняння з частинними похідними:

$$-rV(S,t)+\frac{\partial V(S,t)}{\partial t}+rS\frac{\partial V(S,t)}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V(S,t)}{\partial S^2}=0,\quad (S,t)\in\mathbb{R}^+\times(0,T),\qquad (1)$$

з кінцевою умовою $V(S_T,T)=\max\{S_T-K,0\}$, де r – безризикова відсоткова ставка, σ – волатильність, тобто міра варіативності ціни акції.

На відміну від європейського опціону, виплата за азійським деривативом залежить від усієї траєкторії значення ціни, а не лише від кінцевого значення. Одним із методів дослідження варіантів азійських опціонів є включення змінних, що залежать від траєкторії ціни, до простору станів. Це вперше було зроблено в працях [15, 1].

Наприклад, якщо ціна азійського опціону також залежать від середньої ціни первинного активу $A_t=\frac{1}{t}\int\limits_0^t S_\tau d\tau$, $t\le T$, то для V як функції уже від трьох величин $V=V(S_t,A_t,t)=V(S,A,t)$ отримується таке рівняння з частинними похідними:

$$\frac{\partial V(S,A,t)}{\partial t}+rS\frac{\partial V(S,A,t)}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V(S,A,t)}{\partial S^2}-rV(S,A,t)+\frac{1}{t}(S-A)\frac{\partial V(S,A,t)}{\partial A}=0,$$
$$(S,A,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times(0,T),\qquad (2)$$

з кінцевою умовою $V(S_T,A_T,T)=g(S_T,A_T)$, де g залежить від типу опціону. Наприклад, для азійського опціону купівлі з усередненою ціною і виплатою K: $g(S_T,A_T)=\max\{A_T-K,0\}$.

Зуважимо, що рівння (2) має тип рівняння дифузії з інерцією, фундаментальний розв'язок якого у явному вигляді побудував А.М.Колмогоров у праці [11].

Тобто, як бачимо, розширення простору станів за рахунок включення змінних, що залежать від траєкторії ціни, призводить до вироджених рівнянь з частинними похідними, які не є рівномірно параболічними.

У загальному випадку математичні моделі опціонів зводяться до фінансової моделі марковського типу, динаміка в якій визначається стохастичним диференціальним рівнянням в N-вимірному просторі станів

$$dX_t=(BX_t+b(t,X_t))dt+\sigma(t,X_t)dW_t,\qquad (3)$$

де W_t – d-вимірний стандартний вінерівський процес, $d\le N$, $\sigma=\sigma(t,x)$ – матриця розміру $N\times d$, $B=(b_{ij})$ – стала матриця розміру $N\times N$, вектор $b=(b_1,...,b_N)$ такий, що $b_{d+1}=...=b_N=0$.

За певних припущень на матриці σ,B,b в праці [13] доведено існування та єдиність слабкого розв'язку рівняння (3), а в [3] доведено, що густина ймовірностей переходу цього розв'язку є фундаментальним розв'язком задачі Коші (далі - ФРЗК) для рівняння

$$L_1u:=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u(t,u)+\sum_{i,j=1}^{N}b_{ij}x_j\partial_{x_i}u(t,x)+\sum_{i=1}^{d}b_i(t,x)\partial_{x_i}u(t,x)+\partial_tu(t,x)=0,\qquad (4)$$

де елементи матриці $(a_{ij}(t,x))_{i,j=1}^{d}$ визначаються через елементи матриці $\sigma(t,x)$. Зауважимо, що при цьому на елементи матриці σ та вектора b, зокрема, ставилися умови обмеженості і неперервності за Гельдером, а накладені на матрицю B умови еквівалентні тому, що для оператора L_1 з фіксованими в кожній точці (t,x) коефіцієнтами виконується умова гіпоеліптичності Л. Хермандера.

Математичні моделі опціонів досліджувалися у багатьох працях. Рівняння типу (4), які є ультрапараболічними рівняннями типу Колмогорова, у дещо загальнішому вигляді

$$L_2u := \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u + \sum_{i=1}^{p_0} a_i(t,x)\partial_{x_i}u + c(t,x)u + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}x_i\partial_{x_j}u - \partial_t u = 0, \qquad (5)$$

де $1 \le p_0 < N$, матриця $A_0 := (a_{i,j})_{i,j=1}^{p_0}$ симетрична та додатно визначена, а матриця $B := (b_{i,j})_{i,j=1}^{N}$ зі сталими дійсними едементами має вигляд

$$\begin{pmatrix} * & B_1 & O & ... & O \\ * & * & B_2 & ... & O \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ * & * & * & ... & B_r \\ * & * & * & ... & * \end{pmatrix},$$

вивчалися рядом італійських математиків, зокрема, у працях [14, 5, 6]. Тут B_j – матриці розміру $p_{j-1} \times p_j$, ранг яких дорівнює p_j, де p_0, p_1, ..., p_r – натуральні числа такі, що $p_0 \ge p_1 \ge ... \ge p_r \ge 1$, $p_0 + p_1 + ... + p_r = N$, O – нульові матриці відповідних розмірів, а $*$-блоки є довільними.

У рівнянні (5) за вказаних умов на матрицю B оператор L_2 є гіпоеліптичним, а також інваріантним відносто деякої групи розширень. Відповідно до цієї групи в [14] введено спеціальну умову B-гельдеровості, яка накладається на коефіцієнти a_{ij}, a_i та c.

Серед основних задач дослідження моделей азійських опціонів при їх зведенні до ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова є побудова, дослідження існування, єдності та властивостей (наприклад, таких як невід'ємність, властивість нормальності, формула згортки) ФРЗК як густини ймовірностей переходу між станами стохастичного процесу, заданого відповідним стохастичним диференціальним рівнянням типу (3).

1 Рівняння з двома групами просторових змінних

У випадку двох груп просторових змінних рівняння (5) можна записати у такому вигляді:

$$Lu(t,x) := (S_B - A(t,x,\partial_{x_1}))u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (6)$$

якщо n_1, n_2 – натуральні числа такі, що $n_2 \le n_1$, $n := n_1 + n_2$; $x := (x_1, x_2)$, $x_i := (x_{i1}, ..., x_{in_j})$, $i \in \{1,2\}$; $\Pi_{(0,T]} := \{(t,x) |\ t \in (0,T], x \in \mathbb{R}^n\}$,

$$S_B := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2}\left(\sum_{s=1}^{n_1} b_{sj}x_{1s}\right)\partial_{x_{2j}}, \qquad (7)$$

$A(t,x,\partial_{x_1}) := \sum\limits_{i,j=1}^{n_1} a_{ij}(t,x)\partial_{x_{1i}}\partial_{x_{1j}} + \sum\limits_{i=1}^{n_1} a_i(t,x)\partial_{x_{1i}} + a_0(t,x).$

Диференціальний вираз (7) у матричній формі має вигляд

$$S_B = \partial_t - (x, BD_x), \tag{8}$$

де B – матриця розміру $n\times n$, яка має таку структуру:

$$B := \begin{pmatrix} O & B^1 \\ O & O \end{pmatrix}, \tag{9}$$

B^1 – матриця, складена з дійсних чисел b_{ij}, $i\in\{1,...,n_1\}$, $j\in\{1,...,n_2\}$, O – нульові матриці відповідних розмірів, $D_x := col(\partial_{x_{11}},...,\partial_{x_{1n_1}},\partial_{x_{21}},...,\partial_{x_{2n_2}})$, $(\cdot,\cdot)$ – калярний добуток в $\mathbb{R}^n$.

Використовуватимемо умови:

$\mathbf{A}_1$. Матриця (9), в якій блок B^1, записаний у вигляді $\begin{pmatrix} B_1^1 \\ B_2^1 \end{pmatrix}$, де B_1^1, B_2^1 – матриці відповідно розмірів $n_2\times n_2$, $(n_1-n_2)\times n_2$, задовольняє умову $\det B_1^1 \neq 0$;

$\mathbf{A}_2$. Існує така стала $\delta>0$, що для кожної точки $(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1\in\mathbb{R}^{n_1}$ виконується нерівність

$$\mathrm{Re}\sum_{i,j=1}^{n_1} a_{ij}(t,x)\sigma_{1i}\sigma_{1j} \geq \delta\sum_{i=1}^{n_1}\sigma_{1i}^2. \tag{10}$$

Використовуватимемо вирази, які пов'язують просторові змінні між собою із залученням елементів матриці B:

$$X(h) := (X_1(h), X_2(h)),\quad X_i(h) := (X_{i1}(h),...,X_{in_i}(h)),\ i\in\{1,2\}, \tag{11}$$

$$X_{1j}(h) := x_{1j},\quad j\in\{1,...,n_1\},$$

$$X_{2j}(h) := x_{2j} + h\sum_{i=1}^{n_1} b_{ij}x_{1i},\quad j\in\{1,...,n_2\},\quad h\in\mathbb{R}.$$

Твердження 1. *При виконанні умови* $\mathbf{A}_1$ *заміна просторових змінних*

$$\hat{x}_{1j} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n_1} b_{ij}x_{1i}, & j\in\{1,...,n_2\}, \\ x_{1j}, & j\in\{n_2+1,...,n_1\}; \end{cases}$$

$$\hat{x}_{2j} = x_{2j},\quad j\in\{1,...,n_2\}$$

є невиродженою.

Перетворення змінних з Твердження 1 можна записати у матричному вигляді

$$\hat{x}' = Ux' \tag{12}$$

де матриця U має блочно-діагональну структуру:

$$U := \begin{pmatrix} U_1 & O \\ O & U_2 \end{pmatrix},$$

$$U_1 := \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{n_2 1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n_2} & \dots & b_{n_2 n_2} \end{pmatrix}, \quad U_2 = I_{n_2} := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

У формулі (12) і надалі штрих означає транспонування матриці.

Безпосереднім обчисленням переконуємося, що визначник матриці U:

$$|U| = |U_1| \cdot |U_2| = |B_1^1| \neq 0,$$

що доводить Твердження 1.

Структура заміни змінних (12) та її невиродженість доводять наступне твердження.

Твердження 2. *При виконанні умови* $\mathbf{A}_1$ *заміна просторових змінних* (12) *зводить рівняння* (6) *до рівняння*

$$(S_{\hat{B}} - \hat{A}(t, \hat{x}, \partial_{\hat{x}_1}))\hat{u}(t, \hat{x}) = 0, \quad (t, \hat{x}) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{13}$$

в якому

$$\hat{B} := \begin{pmatrix} O & \hat{B}^1 \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \hat{B}^1 := \begin{pmatrix} I_{n_2} \\ O \end{pmatrix}$$

I_{n_2} *– одинична матриця порядку* n_2, O *– нульові матриці відповідних розмірів, диференціальний вираз* $\hat{A}(t, \hat{x}, \partial_{\hat{x}_1})$ *має той самий вигляд, що й вираз* $A(t, x, \partial_{x_1})$, *його коефіцієнти* $\hat{a}_{ij}$, $\hat{a}_i$, *і* $\hat{a}_0$ *виражаються через виражені в нових змінних* $\hat{x}$ *коефіцієнти* a_{ij}, a_i *і* a_0 *та елементи матриць* B^1.

При цьому з виконання умови $\mathbf{A}_2$ *для рівняння* (6) *випливає умова* $\hat{A}_2$ *для рівняння* (13), *яка фактично не відрізняється від умови* $\mathbf{A}_2$.

2 L-розв'язки

Подібно до означень з праці [3] введемо такі означення.

Функція u називається *диференційовною за Лі в точці* (t, x) *відносно векторного поля*, заданого диференціальним виразом (7), якщо існує скінченна границя

$$(S_B^L u)(t, x) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(u(\gamma(t, x, h)) - u(\gamma(t, x, 0))),$$

де $\gamma(t, x, h) := (t-h, (e^{hB'}x')')$, $h \in \mathbb{R}$, – інтегральна крива заданого векторного поля, яка проходить через точку (t, x). Границя $(S_B^L u)(t, x)$ називається *похідною Лі від функції* u *в точці* (t, x) *відносно заданого векторного поля.*

Якщо врахувати структуру матриці B, то можна переконатися, що матрична експонента $e^{hB'}$ розкладається у скінченну суму, і отримати, що

$$(e^{hB'}x')' = X(h), \quad \gamma(t, x, h) = (t - h, X(h)),$$

де вираз $X(h)$ заданий формулою (11).

Зауважимо, що якщо існують похідні $\partial_t u$ і $\partial_{x_{2j}} u$ в точці (t, x), то $(S_B^L u)(t, x) = (S_B u)(t, x)$.

Функцію u називатимемо *L-розв'язком* рівняння (6) в $\Pi_{(0,T]}$, якщо існують у $\Pi_{(0,T]}$ неперервні похідна Лі $S_B^L u$ та звичайні похідні $\partial_{x_{1j}} u$, $j \in \{1, ..., n_1\}$, $\partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} u$, $\{j, s\} \subset \{1, ..., n_1\}$, і в кожній точці $(t, x) \in \Pi_{(0,T]}$ задовольняється рівняння

$$(S_B^L - A(t, x, \partial_{x_1}))u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{14}$$

Зауважимо, що якщо коефіцієнти виразу A не залежать від просторових змінних, то L-розв'язки є звичайними класичними розв'язками рівняння.

Для формулювання теореми введемо такі позначення та означення: $M := (n_1 + 3n_2)/2$, $M_k := (|k_1| + 3|k_2|)/2$, якщо $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $k := (k_1, k_2)$, $k_l := (k_{l1}, ..., k_{ln_l})$, $l \in \{1, 2\}$; $x_t := (t^{-1/2} x_1, t^{-3/2} x_2)$, $x := (x_1, x_2)$, $x_l := (x_{l1}, ..., x_{ln_l})$, $l \in \{1, 2\}$; $E_c(t, x; \tau, \xi) := \exp\left\{-c \sum\limits_{l=1}^{2} (t - \tau)^{1-2l} |X_l(t - \tau) - \xi_l|^2\right\}$, $t > \tau$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, де вирази для X_l, $l \in \{1, 2\}$, задані в (11); $d(x, \xi) := \sum\limits_{i=1}^{2} |x_i - \xi_i|^{1/(2(i-1)+1)}$, $d(t, x; \tau, \xi) := |t - \tau|^{1/2} + d(x, \xi)$, $\Delta_x^\xi := f(\cdot, x) - f(\cdot, \xi)$, $\Delta_{t,x}^{\tau,\xi} := f(t, x) - f(\tau, \xi)$, де $\{t, \tau\} \subset \mathbb{R}$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, f – деяка функція.

Функцію $f(t, x)$, $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$ називатимемо *B-гельдеровою з показником* $\alpha \in (0, 1]$ в $\Pi_{[0,T]}$, якщо існує така стала $H > 0$, що для будь-яких $\{(t, x), (\tau, \xi)\} \subset \Pi_{[0,T]}$ виконується нерівність

$$\Delta_{t,x}^{\tau,\xi} f(t, x) \leq H(d(t, X(t - \tau); \tau, \xi))^\alpha.$$

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (6) *виконуються умови* $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, *а також умова*

$\mathbf{A}_3$. *Коефіцієнти виразу* $A(t, x, \partial_{x_1})$ *обмежені та* B*-гельдерові з показником* $\alpha \in (0, 1)$ *в* $\Pi_{[0,T]}$.

Тоді для рівняння (6) *існує* L*-ФРЗК (існує ФРЗК для рівняння* (14)*)* Z, *для якого справджується оцінка*

$$|\partial_{x_1}^{k_1} Z(t, x; \tau, \xi)| \leq C(t - \tau)^{-M - |k_1|/2} E_c(t, x; \tau, \xi), \quad |k_1| \leq 2;$$

$$|S_B^L Z(t, x; \tau, \xi)| \leq C(t - \tau)^{-M-1} E_c(t, x; \tau, \xi),$$

$$|\Delta_x^{x'} \partial_{x_1}^{k_1} Z(t, x; \tau, \xi)| \leq C(d(x, x')^\alpha)(t - \tau)^{-M - (|k_1| + \alpha)/2} (E_c(t, x; \tau, \xi) +$$

$$+ E_c(t, x'; \tau, \xi)), \quad |k_1| \leq 2;$$

$$|\Delta_x^{x'} S_B^L Z(t, x; \tau, \xi)| \leq C(d(x, x')^\alpha)(t - \tau)^{-M-1-\alpha/2} (E_c(t, x; \tau, \xi) + E_c(t, x'; \tau, \xi));$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z(t, x; \tau, \xi) d\xi| \leq C(t - \tau)^{-(|k_1| - \alpha)/2}, \quad 0 < |k_1| \leq 2;$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^n} S_B^L Z(t, x; \tau, \xi) d\xi| \leq C(t - \tau)^{-1 + \alpha/2},$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, x', \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

де C *і* c *– додатні сталі.*

Нехай для коефіцієнтів рівняння (6) виконуються умови $\mathbf{A}_1$–$\mathbf{A}_3$, а також умова

$\mathbf{A}_4$. Коефіцієнти виразу $A(t,x,\partial_{x_1})$ мають обмежені та B-гельдерові з показником $\alpha \in (0,1)$ в $\Pi_{[0,T]}$ похідні того ж самого вигляду, при яких вони стоять.

Тоді для рівняння (6) існує спряжене рівняння

$$L^*v(\tau,\xi) := S_B^* v(\tau,\xi) - \sum_{i,j=1}^{n_1} \partial_{\xi_{1i}}\partial_{\xi_{1j}}(\overline{a}_{ij}(\tau,\xi)v(\tau,\xi)) + \sum_{i=1}^{n_1} \partial_{\xi_{1i}}(\overline{a}_i(\tau,\xi)v(\tau,\xi)) - \tag{15}$$

$$-\overline{a}_0(\tau,\xi)v(\tau,\xi) = 0, \quad (\tau,\xi) \in \Pi_{[0,T)},$$

де

$$S_B^* := -\partial_\tau + \sum_{i=1}^{n_2} \left(\sum_{j=1}^{n_1} b_{ji}\xi_{1j} \right) \partial_{\xi_{2i}},$$

і для коефіцієнтів цього рівняння виконується умова $\mathbf{A}_3$. Тут риска над коефіцієнтом означає комплексне спряження.

Теорема 2. *Якщо для коефіцієнтів рівняння* (6) *виконуються умови* $\mathbf{A}_1$–$\mathbf{A}_4$, *то для спраженого рівняння* (15) *існує* L*-ФРЗК* Z^*, *який зв'язаний з* Z *рівністю*

$$Z^*(\tau,\xi;t,x) = \overline{Z}(t,x;\tau,\xi), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x.\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

і для Z *є правильною формула згортки*

$$Z(t,x;\tau,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\lambda,y)Z(\lambda,y;\tau,\xi)dy, \quad 0 \le \tau < \lambda < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Твердження теорем 1 і 2 можна формально отримати, якщо в роботі [7] взяти $n_3 = 0$. Вони отримуться шляхом використанням заміни змінних (12) та результатів з монографії [4] для рівнянь типу (13). Дійсно, при виконанні умов $\mathbf{A}_3$ і $\mathbf{A}_4$ на коефіцієнти рівняння (6) для коефіцієнтів рівняння (13) виконуються відповідно умови $\hat{A}_3$ і $\hat{A}_4$, які відрізняються від умов $\mathbf{A}_3$ і $\mathbf{A}_4$ тільки тим, що в них $X(h)$ замінено на

$$\hat{X}(h) := (UX'(h))', \; \hat{X}_{ij}(h) := \sum_{s=0}^{i-1} \frac{1}{s!} h^s \hat{x}_{(i-s)j}, \; j \in \{1,...,n_i\}, \; i \in \{1,2\}. \tag{16}$$

3 Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші

Нижче ставитимо на коефіцієнти рівняння (6) ще такі умови:

$\mathbf{A}_5$. Коефіцієнти виразу $A(t,x,\partial_{x_1})$ (тобто функції a_{ij}, a_i, a_0) є обмеженими, неперервними за t на відрізку $[0,T]$ та гельдеровими за просторовими змінними у такому сенсі:

$\exists H_1 > 0, \; \exists \alpha_1 \in (0,1] \; \forall (t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \; \forall z_1 \in \mathbb{R}^{n_1}: \quad \left|\Delta_{x_1}^{z_1} a(t,x)\right| \le H_1|x_1 - z_1|^{\alpha_1},$

$\exists H_2 > 0, \quad \exists \alpha_2 \in (1/3, 2/3] \quad \forall (t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \quad \forall z_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad \forall h \in [0,T]:$

$$\left|\Delta_{x_2}^{z_2} a(t,x)\right| \le H_2(h^{3\alpha_2/2} + |X_2(h) - z_2|^{\alpha_2}).$$

$\mathbf{A}_6$. Коефіцієнти виразу $A(t,x,\partial_{x_1})$ (тобто функції a_{ij}, a_i, a_0) є гельдеровими за просторовими змінними у такому сенсі:
$\exists H_3>0\ \ \forall (t,x)\in\Pi_{[0,T]},\ \ \forall z_i\in\mathbb{R}^{n_i},\ i\in\{1,2\},\ \ \forall h\in[0,T]:$

$$\left|\Delta_{x_1}^{z_1}\Delta_{x_2}^{z_2}a(t,x)\right|\le H_3|x_1-z_1|^{\alpha_1}(h^{3\alpha_2/2}+|X_2(h)-z_2|^{\alpha_2}),$$

де сталі α_1 і α_2 такі, як в умові $\mathbf{A}_5$.

Очевидно, що при $h=0$ з умови $\mathbf{A}_5$ випливають класичні умови Гельдера для груп просторових змінних.

Теорема 3. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (6) *виконуються умови* $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_5$ *і* $\mathbf{A}_6$. *Тоді для нього існує класичний ФРЗК* Z, *для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-M-M_k}E_c(t,x;\tau,\xi),$$

$$|S_B Z(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-M-1}E_c(t,x;\tau,\xi),$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)|\le C|x_s-z_s|^{\alpha_s^k}(t-\tau)^{-M-M_k-m_s\alpha_s^k}(E_c(t,x;\tau,\xi)+E_c(t,z^{(s)};\tau,\xi)),$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}S_B Z(t,x;\tau,\xi)|\le C|x_s-z_s|^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-M-1-m_s\alpha_s^0}(E_c(t,x;\tau,\xi)+E_c(t,z^{(s)};\tau,\xi)),$$

$$|k_1|/2+|k_2|\le 1,\ k=(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}_+^n,\ 0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ z_s\in\mathbb{R}^{n_s}, s\in\{1,2\},\quad (17)$$

де $\alpha_s^k\in(0,\alpha_1)$, *якщо* $|k_2|=0$ *і* $\alpha_1<\frac{3}{2}\alpha_2-\frac{1}{2}$; $\alpha_s^k\in(0,\frac{m_1\alpha_1}{m_s}))$, *якщо* $|k_2|=1$ *і* $\alpha_1<\frac{3}{2}\alpha_2-\frac{1}{2}$; $\alpha_s^k\in(0,3\alpha_2-1)$, *якщо* $|k_2|=0$ *і* $\alpha_1>\frac{3}{2}\alpha_2-\frac{1}{2}$; $\alpha_s^k\in(0,\frac{m_2\alpha_2-m_1}{m_s}))$, *якщо* $|k_2|=1$ *і* $\alpha_1>\frac{3}{2}\alpha_2-\frac{1}{2}$; $\alpha_s^0\in(0,\alpha_1)$, *якщо* $\alpha_1<\frac{3}{2}\alpha_2-\frac{1}{2}$; $\alpha_s^0\in(0,3\alpha_2-1)$, *якщо* $\alpha_1>\frac{3}{2}\alpha_2-\frac{1}{2}$; $z^{(1)}:=(z_1,x_2)$, $z^{(2)}:=(x_1,z_2)$; α_1, α_2 – *числа з умови* $\mathbf{A}_5$.

Доведення. Застосуємо невироджену заміну змінних (12) до рівняння (6) та покладені в теоремі умови. На підставі Твердження 2 отримаємо рівняння (13), а з умов $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_5$ і $\mathbf{A}_6$ матимемо для нього відповідно умови $\hat{A}_2$, $\hat{A}_5$ і $\hat{A}_6$, які відрізняються від попередніх лише тим, що в них $X(h)$ замінено на $\hat{X}(h)$, які визначені в (16). На підставі результатів з праць [10, 8, 9] (зокрема, Теореми 1 з [10] і Теореми 3 з [8]) отримуємо доведення твердження теореми. □

Теорема 4. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (6) *виконуються умови Теореми 3, а також умова*

$\mathbf{A}_7$. *В* $\Pi_{[0,T]}$ *існують обмежені похідні* $\partial_{x_{1i}}\partial_{x_{1j}}a_{ij}$ *і* $\partial_{x_{1i}}a_i$, *які задовольняють за просторовими змінними умову Гельдера у сенсі* $\mathbf{A}_5$ *і* $\mathbf{A}_6$.

Тоді для спряженого рівняння (15) *існує класичний ФРЗК* Z^*, *який зв'язаний з* Z *властивістю нормальності, тобто рівністю*

$$Z^*(\tau,\xi;t,x)=Z(t,x;\tau,\xi),\quad 0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\tag{18}$$

і для Z *є правильною формула згортки*

$$Z(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;\lambda,y)Z(\lambda,y;\tau,\xi)dy,\quad 0\le\tau<\lambda<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.\tag{19}$$

Доведення. Доведення тверджень теорем 4 здійснюється на підставі формули Гріна-Остроградського

$$\int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{B_R} (\overline{v}Lu - u\overline{L^*v})(\theta, y)dy = \int_{B_R} (\overline{v}u)(\theta, y)|_{\theta=t_1}^{t_2} dy-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{\Gamma_R} \left(\sum_{j=1}^{n_2} \left(\sum_{s=1}^{n_1} b_{sj} y_{1s} \right) \mu_{2j} \right) (\overline{v}u)(\theta, y) dS_y + \int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{\Gamma_R} \sum_{j=1}^{n_1} B^j[v, u](\theta, y)\mu_{1j} dS_y, \quad (20)$$

де $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, B_R – куля в $\mathbb{R}^n$ радіуса R з центром у початку координат, Γ_R – її межа, $(\mu_{11}, ..., \mu_{1n_1}, \mu_{21}, ..., \mu_{2n_2})$ – орт зовнішньої нормалі до Γ_R,

$$B^j[v, u] := -\sum_{l=1}^{n_1} (a_{jl}\partial_{y_{1l}} u\overline{v} - u\partial_{y_{1l}}(a_{jl}\overline{v})) + a_j u\overline{v}, \quad j \in \{1, ..., n_1\},$$

u і v – досить гладкі функції. Формула (20) є правильною і для функцій u і v, які мають неперервні похідні за x_1 до другого порядку та похідні $S_B u$ і $S_B^* v$. Це одержується, якщо розглянути апроксимовані для u і v послідовності досить гладких функцій, записати для них формулу (20) і перейти в ній до границі.

Якщо з такими функціями u і v перейти в формулі (20) до границі при $R \to \infty$, то у дійснозначному випадку отримаємо формулу

$$\int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} (vLu - uL^*v)(\theta, y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} (vu)(\theta, y)|_{\theta=t_1}^{t_2} dy. \quad (21)$$

На підставі оцінок з Теореми 3 та аналогічних оцінок для Z^*, у формулу (21) можна покласти $u(\theta, y) = Z(\theta, y; \tau, \xi)$, $v(\theta, y) = Z^*(\theta, y; t, x)$, $t_1 = \tau + \varepsilon$ і $t_2 = t - \varepsilon$, де ε – досить мале додатне число. Якщо після цього в отриманій рівності перейти до границі при $\varepsilon \to 0$, то отримаємо формулу (18).

Рівність (19) отримується так само, тільки потрібно взяти $t_1 = \lambda$. Отримаємо рівність

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z^*(\lambda, y; t, x)Z(\lambda, y; \tau, \xi)dy = \int_{\mathbb{R}^n} Z^*(t - \varepsilon, y; t, x)Z(t - \varepsilon, y; \tau, \xi)dy, \quad (22)$$

в якій потрібно перейти до границі при $\varepsilon \to 0$ і використати формулу (18). □

Теорема 5. (Єдиність нормального класичного ФРЗК). *Існує лише один нормальний класичний ФРЗК, для якого справджуються оцінки* (17).

Доведення. Нехай Z_1 і Z_2 – два нормальні класичні ФРЗК рівняння (6), для яких справджуються оцінки (17). Покладемо у формулі (21) $u(\theta, y) = Z_1(\theta, y; \tau, \xi)$, $v(\theta, y) = Z_2(t, x; \theta, y)$. Тоді одержимо рівність

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z_1(t_2, y; \tau, \xi)Z_2(t, x; t_2, y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} Z_1(t_1, y; \tau, \xi)Z_2(t, x; t_1, y)dy, \quad (23)$$

для довільних t_1 і t_2 з інтервалу (τ, t). З довільності t_1 і t_2 випливає, що права і ліва частини в (23) не залежать від t_1 і t_2, і можна в (23) перейти до границі, попрямувавши $t_1 \to \tau$, $t_2 \to t$. Отримаємо, що

$$Z_1(t,x;\tau,\xi) = Z_2(t,x;\tau,\xi), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

$\square$

Теорема 6. (Зображення коефіцієнтів рівняння через ФРЗК). *За виконання на коефіцієнти рівняння* (6) *умов Теореми 5 для коефіцієнтів та класичного ФРЗК Z цього рівняння правильними є такі формули:*

$$a_{ij}(t,x) = \lim_{\tau\to t}\Big(\frac{1}{2(t-\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(y_{1i}-x_{1i})(y_{1j}-x_{1j})Z(t,x;\tau,y)dy\Big), \tag{24}$$

$$a_i(t,x) = \lim_{\tau\to t}\Big(\frac{1}{t-\tau}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(y_{1i}-x_{1i})Z(t,x;\tau,y)dy\Big), \tag{25}$$

$$\{i,j\} \in \{1,...,n_1\},$$

$$a_0(t,x) = \lim_{\tau\to t}\Big(\frac{1}{t-\tau}\Big(\int\limits_{\tau}^{t}d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;\theta,y)dy - 1\Big)\Big), \tag{26}$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$$

Доведення. Методику доведення формул проілюструємо на прикладі коефіцієнта a_{12}. Покладемо у формулі (21) $u(\theta,y) = (y_{11}-x_{11})(y_{12}-x_{12})$, $v(\theta,y) = Z(t,x;\theta,y)$. Отримаємо рівність

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2}d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;\theta,y)(a_{12}(\theta,y)+a_{21}(\theta,y)+a_1(\theta,y)(y_{12}-x_{12})+a_2(\theta,y)(y_{11}-x_{11})+$$

$$+a_0(\theta,y)(y_{11}-x_{11})(y_{12}-x_{12}))dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n}(y_{11}-x_{11})(y_{12}-x_{12})Z(t,x;\theta,y)|_{\theta=t_1}^{t_2}dy.$$

У ній візьмемо $t_1 = \tau$, $t_2 = t-\varepsilon$, потім перейдемо до границі при $\varepsilon \to 0$ і результат поділимо на $t-\tau$. Враховуючи, що $a_{12}(\theta,y) = a_{21}(\theta,y)$, матимемо, що

$$\frac{1}{t-\tau}\int\limits_{\tau}^{t}d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;\theta,y)a_{12}(\theta,y)dy = \frac{1}{2(t-\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(y_{11}-x_{11})(y_{12}-x_{12})Z(t,x;\tau,y)dy-$$

$$-\frac{1}{t-\tau}\int\limits_{\tau}^{t}d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(a_1(\theta,y)(y_{12}-x_{12})+a_2(\theta,y)(y_{11}-x_{11})+$$

$$+a_0(\theta,y)\frac{(y_{11}-x_{11})(y_{12}-x_{12})}{2}\Big)Z(t,x;\theta,y)dy,$$

З останньої рівності випливає доведення формули (24) при $i = 1$, $j = 2$, оскільки границя при $\tau \to t$ лівої частини (7) дорівнює $a_{12}(t,x)$ на підставі властивостей ФРЗК Z і теореми про середнє значення для інтегралів, а другий доданок правої частини (7) прямує до нуля на підставі припущень на функції a_1, a_2 і a_0.

Доведення формули (24) при інших значеннях i та j, а також формул (25) і (26) здійснюється аналогічно. □

Теорема 7. (Додатність ФРЗК). *За виконання на коефіцієнти рівняння* (6) *умов Теореми 4 для класичного ФРЗК Z справджується нерівність:*

$$Z(t,x;\tau,\xi) > 0, \quad 0 \le \tau < t \le T, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Доведення теореми здійснюється аналогічно до доведення властивості 3.12 у монографії [4, С.213]. При цьому для послідовності функцій

$$v_\nu(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi) g_\nu(\xi) d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(\tau,T]},$$

з деякою послідовністю дельтаподібних функцій g_ν, $\nu \ge 1$, використовується сильний принцип максимуму і таке твердження принципу максимуму для необмежених областей.

Лема. *Нехай коефіцієнти рівняння* (6) *задовольняють умови* $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ *і умову*

$\mathbf{A}_8$.*Коефіцієнти* a_{ij}, a_i, $\{i,j\} \subset \{1,...,n_1\}$, *і* a_0 *є неперервними функціями в* $\Pi_{[0,T]}$ *і для всіх* $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ *виконуються оцінки*

$$|a_{ij}(t,x)| \le C_0(|x|^2+1), \quad |a_i(t,x)| \le C_0(|x|+1), \quad |a_{ij}(t,x)| \le C_0$$

з деякою сталою $C_0 > 0$;
а $u : (0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ – *функція, неперервна разом з похідними, що входять у рівняння* (6), *де* $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus B_{R_0}$, B_{R_0} – *куля в* $\mathbb{R}^n$ *радіуса* $R_0 > 0$ *з центром у початку координат, або* $\Omega = \mathbb{R}^n$. *Якщо*

1) $(Lu)(t,x) \ge 0$, $(t,x) \in (0,T] \times \Omega$;

2) $\liminf\limits_{(t,x)\to(t^0,x^0)} u(t,x) \ge 0$ *для кожної точки* $(t^0,x^0) \in \partial((0,T]\times\Omega) \setminus \{t=T\}$;

3) рівномірно щодо $t \in (0,T)$ *існує* $\liminf\limits_{|x|\to\infty} u(t,x) \ge 0$,

то $u(t,x) \ge 0$, $(t,x) \in (0,T] \times \Omega$.

Зауважимо, що доведені властивості ФРЗК дозволяють отримати коректну розв'язність задачі Коші для рівнянь (6) у класичному розумінні.

Список літератури

[1] Barraquand J., Pudet T. *Pricing of American path-dependent contingent claims.* Math. Finance 1996, **6**, 17–51.

[2] Black F., Scholes M. *The pricing of options and corporate liabilities.* Journal of Political Economy 1973, **81**, 637–659.

[3] Di Francesco, Pascucci A. *On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type.* AMRX Appl. Math. Res. Exprass 2005, **3**, 77–116.

[4] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhäuser. Basel, 2004, Ser. Operator Theory: Adv. and Appl., Vol. 152. doi: 10.1007/978-3-0348-7844-9.

[5] Foschi P., Pascucci A. *Kolmogorov equations arising in finance: direct and inverse problem.* Lecture Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica. Universitá degli Studi della Basilicata 2007, **VI**, 145–156.

[6] Frentz M., Nyström K., Pascucci A., Polidoro S. *Optimal regularity in the obstacle problem for Kolmogorov operators related to American Asian options.* Math. Ann. 2010, **347**, 805–838. doi: 10.1007/s00208-009-0456-z

[7] Ivashyshen S.D., Layuk V.V. *The fundamental solutions of the Cauchy problem for some degenerate parabolic equations of Kolmogorov type* Ukr. Mat. J. 2011, **63** (11), 1469–1500 (in Ukrainian).

[8] Ivasyshen S.D., Medyns'kyi I.P. *Classical fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two qroups of spatial variables of degeneration. I.* J. Math. Sci. 2020, **246** (2), 121–151. doi: 10.1007/s10958-020-04726-z

[9] Ivasyshen S.D., Medyns'kyi I.P. *Classical fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two qroups of spatial variables of degeneration. II.* J. Math. Sci. 2020, **247** (1), 1–23. doi: 10.1007/s10958-020-04786-z

[10] Ivasyshen S.D., Medyns'kyi I.P. *On classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two qroups of spatial variables.* Mat. Metody i Fiz.-Mekh. Polya 2016, **59** (2), 28–42 (in Ukrainian).

[11] Kolmogorov A. *Zufllige Bewegungen. (Zur Theorie der Brownschen Bewegung.).* Ann. of Math., II. Ser. 1934, **35**, 116–117.

[12] Mishura Yu.S., Ralchenko K.V., Sakhno M.L., Shevchenko G.M. Stochastic processes: theory, statistics, application: textbook. 2nd Edition. Kyiv University, Kyiv, 2023 (in Ukrainian).

[13] Pascucci A. *Free boundary and optimal stopping problems for American Asian options.* Finance and Stoch. 2008, **12**, 21–41. doi: 10.1007/s00780-007-0051-7

[14] Polidoro S. *On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov-Fokker-Planck type.* Le Matematiche 1994, **49** (1), 53–105.

[15] Stanton R. Path Dependent Payoffs and Contingent Claim Valuation: Single Premium Deferred Annuities. Unpublished manuscript, Graduate School of Business, Stanford University, 1989.

Надійшло 25.11.2023

Dron' V.S. *On classical fundamental solution of the Cauchy problem for one class of ultraparabolic equations of Kolmogorov type*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 2 (2023), 114–126.

The investigation is devoted to ultra-parabolic equations with two group of spatial variables which appear in Asian options problems. Unlike the European option, the payout of Asian derivative depends on the entire trajectory of the price value, not the final value only.

Among methods of researching of the Asian options, the one is to include dependent on the price trajectory variables in the state space. The expansion of the state space by including of

dependent on the price trajectory variables transforms the path-dependent problem for the Asian option into an equivalent path-independent Markov problem. However, the increasing of the dimension usually leads to partial differential equations which are not uniformly parabolic. The class of these equations under some conditions is a generalization of the well-known degenerate parabolic A.N.Kolmogorov's equation of diffusion with inertia.

Mathematical models of the options have been studied in many works. Among the main problems in the study of the Asian options models when they are reduced to ultra-parabolic equations of the Kolmogorov type there are the following: the construction, researching of the existence, uniqueness and properties (for instance, such as non-negativity, normality, convolution formula) of the fundamental solution of the Cauchy problem as the probability density of the transition between the states of the stochastic process, which given by the corresponding stochastic differential equation.

It has been constructed so called L-type fundamental solutions for equations from the class previously, and some their properties have been established. In the work, it is formulated some known results about L-type fundamental solutions.

In current research, for the equations from this class we build and study the classical fundamental solutions of the Cauchy problem. For the coefficients of the equations we apply special Hölder conditions with respect to spatial variables. We prove the existing of the classic fundamental solutions and its properties such as estimates, including estimates of the derivatives, normality, convolution formula, positivity etc.

The results obtained in the work can be used to receive the well-posedness of the Cauchy problem for such equations in the classical sense.