Макарчук. О.П.

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ХАРАКТЕРИСТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ОДНОГО РОЗПОДІЛУ ТИПУ ДЖЕССЕНА-ВІНТНЕРА

Досліджуються асимптотичні властивості модуля характеристичної функції випадкової величини представленої s-ковим дробом з надлишковим набором цифр, що є розподілом типу Джессена-Вінтнера. Акцент в роботі здійснюється на знаходженні необхідних та достатніх умов рівності нулю значення верхньої границі на нескінченності модуля характеристичної функції відповідної випадкової величини, при певних асимптотичних обмеженнях. Вказані граничні співвідношення для обчислення відповідного граничного значення.

Ключові слова і фрази: характеристична функція, випадковий ряд, теорема Джессена-Вінтнера, сингулярний розподіл, асимптотична поведінка.

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Tereshchenkivska St., 3, Kyiv, 01024, Ukraine
e-mail: *makolpet@gmail.com*

Вступ

Нехай (ξ_k) — послідовність незалежних дискретно розподілених випадкових величин таких, що випадковий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n \tag{1}$$

збіжний з ймовірністю одиниця і його сума відповідно рівна ξ.

За теоремою Джессена-Вінтнера [6] випадкова величина ξ має чистий розподіл, тобто дискретний, абсолютно неперервний або сингулярний. За теоремою Леві [7] розподіл ξ є дискретним тільки тоді, коли

$$\prod_{n=1}^{+\infty} p_n > 0,$$

де p_n — максимальний стрибок $F_{\xi_n}(x)$. В загальному випадку проблема знаходження необхідних та достатніх умов того, що розподіл ξ є сингулярним є складною [8, 9].

Для характеристичної функції $f_\xi(t)$ випадкової величини ξ розглянемо значення:

$$L_\xi = \varlimsup_{|t|\to+\infty} |f_\xi(t)|.$$

УДК 517.57
2010 *Mathematics Subject Classification:* 42-11.

Як відомо [2], якщо розподіл ξ дискретний, то $L_\xi = 1$. Якщо розподіл ξ абсолютно неперервний, то $L_\xi = 0$. Відомо [2, 5, 10], якщо розподіл ξ сингулярний, то L_ξ може набувати довільного значення з відрізку $[0;1]$.

Нехай $s, m \in N$ та $s, m \geq 2$, а випадкові величини ξ_k набувають значень 0, $\frac{1}{s^k}$,..., $\frac{m-1}{s^k}$ з ймовірностями p_{0k}, p_{1k},...,$p_{(m-1)k}$ відповідно. Необхідні та достатні умови того, що $L_\xi = 0$ були знайдені в роботах [3] і [4] для випадків $s = m = 2$ та $s = m = 3$ відповідно. Випадок $m = 3, s = 2$ розглядався в роботі [1].

В даній роботі для кожних $2 \leq s, m \in N$, знаходяться необхідні та достатні умови того, що $L_\xi = 0$ при певних асимптотичних обмеженнях накладених на послідовність стохастичних векторів $(p_{0n}; p_{1n}; ...; p_{(m-1)n})$. Проаналізована структура величини L_ξ.

1 Необхідні та достатні умови того, що $L_\xi = 0$.

Для кожного натурального n та $j \in \{1, ..., m-1\}$ позначимо

$$B_{jn} = \sum_{\substack{0 \leq i < k \leq m-1 \\ k-i=j}} p_{in} p_{kn};$$

$$f_n(x) = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} 4B_{jn} \sin^2(xj);$$

$$g_{n-1}(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} f_{n-1+k}\left(\frac{x}{s^k}\right).$$

Лема 1. *Виконується рівність:*

$$|f_\xi(t)|^2 = g_0(0,5t).$$

Доведення. Зрозуміло, що

$$f_\xi(t) = E(e^{it\xi}) = \prod_{k=1}^{+\infty} E(e^{it\xi_n}).$$

Таким чином, маємо:

$$\left|E\left(e^{it\xi_n}\right)\right|^2 = \left(\sum_{k=0}^{m-1} p_{kn} \cos\left(\frac{kt}{s^n}\right)\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{m-1} p_{kn} \sin\left(\frac{kt}{s^n}\right)\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} p_{kn}^2 + \sum_{0 \leq j < l \leq m-1} 2p_{jn}p_{ln}\left(\cos\left(\frac{jt}{s^n}\right)\cos\left(\frac{lt}{s^n}\right) + \sin\left(\frac{jt}{s^n}\right)\sin\left(\frac{lt}{s^n}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} p_{kn}^2 + \sum_{0 \leq j < l \leq m-1} 2p_{jn}p_{ln}\left(\cos\left(\frac{(j-l)t}{s^n}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} p_{kn}^2 + \sum_{0 \leq j < l \leq m-1} 2p_{jn}p_{ln}\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{(j-l)t}{2s^n}\right)\right) =$$

$$= 1 - \sum_{0 \le j < l \le m-1} 4p_{jn}p_{ln}\left(\sin^2\left(\frac{(j-l)t}{2s^n}\right)\right) = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} 4B_{jn}\sin^2\left(\frac{jt}{2s^n}\right) = f_n\left(\frac{t}{2s^n}\right).$$

□

Лема 2. *Нехай для деякого натурального k задані обмежені послідовності чисел (a_{1n}), $(a_{2n}), ..., (a_{kn}), (b_{1n}), (b_{2n}), ..., (b_{kn})$ такі, що для кожного $j \in \{1; 2; ...; k\}$:*

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{jn} - b_{jn}) = 0,$$

тоді виконується умова:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{j=1}^{k} a_{jn} - \prod_{j=1}^{k} b_{jn}\right) = 0.$$

Доведення. Нехай для кожного $j \in \{1; 2; ...; k\}$:

$$\varepsilon_{jn} = a_{jn} - b_{jn},$$

$$\delta_n = \max_{1\le j\le k}|\varepsilon_{jn}|.$$

Зрозуміло, що існує число $L > 0$ таке, що для кожного $j \in \{1; 2; ...; k\}$ та $n \in N$:

$$|b_{jn}| < L.$$

Маємо:

$$\left|\prod_{j=1}^{k} a_{jn} - \prod_{j=1}^{k} b_{jn}\right| = \left|\prod_{j=1}^{k}(b_{jn} + \varepsilon_{jn}) - \prod_{j=1}^{k} b_{jn}\right| =$$

$$= \left|\sum_{1\le j\le k}\left(\varepsilon_{jn}\prod_{\substack{i\in\{1;2;...;k\}\\ i\ne j}} b_{jn}\right) + \sum_{1\le j<l\le k}\left(\varepsilon_{jn}\varepsilon_{ln}\prod_{\substack{i\in\{1;2;...;k\}\\ i\ne j, i\ne l}} b_{jn}\right) + ... + \prod_{1\le j\le k}\varepsilon_{jn}\right| \le$$

$$\le \sum_{1\le j\le k}\left(|\varepsilon_{jn}|\prod_{\substack{i\in\{1;2;...;k\}\\ i\ne j}} |b_{jn}|\right) + \sum_{1\le j<l\le k}\left(|\varepsilon_{jn}||\varepsilon_{ln}|\prod_{\substack{i\in\{1;2;...;k\}\\ i\ne j, i\ne l}} |b_{jn}|\right) + ... + \prod_{1\le j\le k}|\varepsilon_{jn}| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{k} C_k^j \delta_n^j L^{k-j} = (1 + L\delta_n)^k - 1 \to 0 (n \to +\infty).$$

□

Лема 3. *Нехай (t_k) — послідовність, що збігається до числа $t > 0$. Якщо*

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(t) = 0, \tag{2}$$

то

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(t_n) = 0.$$

Доведення. Нехай $L=[\log_s(m-1)]+1$, $K(t;s;m)=[\log_s(t)]+3+L$, тоді

$$\frac{1}{s}\leq\frac{m-1}{s^L}<1,$$

$$\frac{1}{s^4}\leq\frac{(m-1)t}{s^{K(t;s;m)}}<\frac{1}{s^2}.$$

Зрозуміло, що для кожного натурального k:

$$\sum_{0\leq j<l\leq m-1}4p_{jk}p_{lk}=2-2\sum_{j=0}^{m-1}p_{jk}^2<2,$$

тому врахувавши, що $|sin(x)|\leq|x|$ для кожного дійсного x, маємо:

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\sum_{j=1}^{m-1}4B_{j(n+k)}\sin^2\left(\frac{tj}{s^{k+K(t;s;m)}}\right)\right)\geq\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\sin^2\left(\frac{1}{s^{k+2}}\right)\sum_{j=1}^{m-1}4B_{j(n+k)}\right)\geq$$

$$\geq\prod_{k=3}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{s^{2k}}\right)=C(s)>0.$$

Таким чином, якщо умова (2) виконується, то

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{K(t;s;m)}\left(1-\sum_{j=1}^{m-1}4B_{j(n+k)}\sin^2\left(\frac{tj}{s^k}\right)\right)=0. \tag{3}$$

Легко бачити, що для довільних дійсних x,y виконується нерівність:

$$|\sin^2(x)-\sin^2(y)|\leq 2|x-y|.$$

Якщо $|t_n-t|<\varepsilon$, то для кожного $k\in\{1;2;...;K(t;s;m)\}$ маємо:

$$\left|\left(1-\sum_{j=1}^{m-1}4B_{j(n+k)}\sin^2\left(\frac{tj}{s^k}\right)\right)-\left(1-\sum_{j=1}^{m-1}4B_{j(n+k)}\sin^2\left(\frac{t_nj}{s^k}\right)\right)\right|\leq$$

$$\leq\sum_{j=1}^{m-1}4B_{j(n+k)}\left|\sin^2\left(\frac{tj}{s^k}\right)-\sin^2\left(\frac{t_nj}{s^k}\right)\right|\leq\sum_{j=1}^{m-1}8B_{j(n+k)}\left|\frac{j(t_n-t)}{s^k}\right|\leq$$

$$\leq\frac{16(m-1)\varepsilon}{s^k}\leq\frac{16(m-1)\varepsilon}{s}.$$

Враховуючи лему 2 та умову (3) отримаємо:

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{K(t;s;m)}\left(1-\sum_{j=1}^{m-1}4B_{j(n+k)}\sin^2\left(\frac{t_nj}{s^k}\right)\right)=0.$$

Оскільки

$$f_n(t_n)=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\sum_{j=1}^{m-1}4B_{j(n+k)}\sin^2\left(\frac{t_nj}{s^k}\right)\right)\leq\prod_{k=1}^{K(t;s;m)}\left(1-\sum_{j=1}^{m-1}4B_{j(n+k)}\sin^2\left(\frac{t_nj}{s^k}\right)\right),$$

то отримуємо потрібне. □

Лема 4. *Нехай* (t_k) *— послідовність, що збігається до числа* $t > 0$, (m_k) *— зростаюча послідовність натуральних чисел така, що*

$$\lim_{n\to+\infty} g_{m_n}(t) = A > 0,$$

тоді

$$\lim_{n\to+\infty} g_{m_n}(t_n) = A.$$

Доведення. Не обмежуючи загальності, нехай для кожного натурального n:

$$g_{m_n}(t) > 0,5A.$$

Зрозуміло, що для кожного натурального k:

$$f_{m_n+k}\left(\frac{t}{s^k}\right) \geq \prod_{l=1}^{+\infty} f_{m_n+l}\left(\frac{t}{s^l}\right) = g_{m_n}(t) > 0,5A.$$

Нехай ε — достатньо мале додатне число та $|t_n - t| < \varepsilon$. Врахувавши доведення леми 3 отримаємо, що для кожного натурального k маємо:

$$\left| f_{m_n+k}\left(\frac{t}{s^k}\right) - f_{m_n+k}\left(\frac{t_n}{s^k}\right)\right| = \left|\sum_{j=1}^{m-1} 4B_{j(n+k)} \sin^2\left(\frac{tj}{s^k}\right) - \sum_{j=1}^{m-1} 4B_{j(n+k)} \sin^2\left(\frac{t_n j}{s^k}\right)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m-1} 4B_{j(n+k)} \left|\sin^2\left(\frac{tj}{s^k}\right) - \sin^2\left(\frac{t_n j}{s^k}\right)\right| \leq \sum_{j=1}^{m-1} 8B_{j(n+k)} \left|\frac{j(t_n - t)}{s^k}\right| \leq \frac{16(m-1)\varepsilon}{s^k}.$$

Добре відомо, що для довільних чисел $b_1, b_2, ..., b_k \in [0;1]$ виконується нерівність:

$$\prod_{j=1}^{k} (1 - b_j) \geq 1 - \sum_{j=1}^{k} b_j.$$

Позначимо

$$\delta_{n,k} = f_{m_n+k}(t) - f_{m_n+k}(t_n).$$

Маємо:

$$\frac{g_{m_n}(t_n)}{g_{m_n}(t)} = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{\delta_{n,k}}{f_{m_n+k}\left(\frac{t}{s^k}\right)}\right) \geq \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \left|\frac{\delta_{n,k}}{f_{m_n+k}\left(\frac{t}{s^k}\right)}\right|\right) \geq$$

$$\geq 1 - \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{\delta_{n,k}}{f_{m_n+k}\left(\frac{t}{s^k}\right)}\right| \geq 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{16\varepsilon(m-1)}{0,5As^k} = 1 - \frac{16(m-1)\varepsilon}{A(s-1)}.$$

Оскільки $e^x \geq 1 + x$ для кожного дійсного x, то виконується нерівність:

$$\frac{g_{m_n}(t_n)}{g_{m_n}(t)} = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{\delta_{n,k}}{f_{m_n+k}\left(\frac{t}{s^k}\right)}\right) \leq \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \left|\frac{\delta_{n,k}}{f_{m_n+k}\left(\frac{t}{s^k}\right)}\right|\right) \leq$$

$$\leq e^{\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{\delta_{n,k}}{f_{m_n+k}\left(\frac{t}{s^k}\right)}\right|} \leq e^{\frac{32(m-1)\varepsilon}{A(s-1)}}.$$

Отже,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{g_{m_n}(t_n)}{g_{m_n}(t)} = 1,$$

звідки

$$|g_{m_n}(t) - g_{m_n}(t_n)| = g_{m_n}(t)\left|\frac{g_{m_n}(t_n)}{g_{m_n}(t)} - 1\right| \leq \left|\frac{g_{m_n}(t_n)}{g_{m_n}(t)} - 1\right| \to 0\ (n\to+\infty).$$

□

Теорема 1. *Нехай*

$$\varliminf_{n\to+\infty} B_{1n} > 0. \tag{4}$$

Рівність $L_\xi = 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли для кожного натурального a виконується умова:

$$\lim_{n\to+\infty}|f_\xi(2\pi a s^n)| = 0. \tag{5}$$

Доведення. Якщо $L_\xi = 0$, то очевидно умова (5) виконується для довільного натурального a.

Нехай виконується умова (5). Зрозуміло, що для кожного натурального a :

$$|f_\xi(2\pi a s^n)| = g_n(\pi a) = \prod_{k=1}^{+\infty} f_{n+k}\left(\frac{\pi a}{s^k}\right) \to 0\ \ (n\to+\infty). \tag{6}$$

Припустимо, що $L_\xi > 0$. Зрозуміло, що

$$L_\xi^2 = \varlimsup_{x\to+\infty} g_0(x).$$

Нехай (πt_n) — зростаюча, необмежена зверху послідовність дійсних чисел така, що

$$\lim_{n\to+\infty} g_0(\pi t_n) = L_\xi^2.$$

Зрозуміло, що

$$\frac{\pi t_n}{s^{[log_s(t_n)]+2}} < \frac{\pi t_n}{s^{log_s(t_n)+1}} = \frac{\pi}{s},$$

$$\frac{\pi t_n}{s^{[log_s(t_n)]+2}} \geq \frac{\pi t_n}{s^{log_s(t_n)+2}} = \frac{\pi}{s^2}.$$

Оскільки послідовність $\left(\frac{\pi t_n}{s^{[log_s(t_n)]+2}}\right)$ обмежена, то з неї можливо виділити збіжну підпослідовність, тобто існує зростаюча, необмежена зверху послідовність дійсних чисел $(\widetilde{t_n})$ така, що

$$\lim_{n\to+\infty}|g_0(\pi\widetilde{t_n})| = L_\xi^2,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\widetilde{t_n}}{s^{[log_s(\widetilde{t_n})]+2}} = \gamma \in [\frac{1}{s^2};\frac{1}{s}].$$

Отже, нехай

$$\gamma^*(n) = \frac{\widetilde{t_n}}{s^{[log_s(\widetilde{t_n})]+2}},$$

$$h_n = [log_s(\widetilde{t_n})] + 2.$$

Зрозуміло, що існує число $A > 0$ та $N(L) \in N$ такі, що для кожного натурального $n > N(L)$:

$$B_{1n} > A.$$

Якщо γ не подається у вигляді $\frac{a}{s^b}$ для деяких натуральних a, b, то γ має єдине s-кове зображення, причому існує пара цифр (qw) відмінна від пар (00) та $((s-1)(s-1))$, яка зустрічається нескінченну кількість разів в s-ковому розкладі числа γ.

Таким чином,

$$\gamma = \Delta^s_{\alpha_{01}\alpha_{02}\ldots\alpha_{0d_0}qw\alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1d_1}\ldots qw\alpha_{n1}\alpha_{n2}\ldots\alpha_{nd_n}\ldots}.$$

Нехай

$$\gamma^*(n) = \Delta^s_{\alpha_{01}\alpha_{02}\ldots\alpha_{0d_0}qw\alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1d_1}\ldots qw\alpha_{n1}\alpha_{n2}\ldots\alpha_{nd_n}\tau_1\tau_2\ldots},$$

де $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — деякі цифри. Зрозуміло, що для кожного $k \in \{1; 2; \ldots; n-1\}$:

$$\gamma^* \cdot s^{d_0+2+d_1+\ldots+2+d_k} = w_k + \Delta^s_{qw\ldots},$$

де w_k — деяке ціле число, причому

$$0 < \Delta^s_{qw(0)} \leq \Delta^s_{qw\ldots} \leq \Delta^s_{qw(s-1)} < 1.$$

Нехай

$$M(q; w) = \min\{\sin^2(\pi\Delta^s_{qw(0)}); \sin^2(\pi\Delta^s_{qw(s-1)})\},$$

тоді $M(q; w) > 0$.

Маємо:

$$\sin^2(\pi\gamma^*(n) \cdot s^{d_0+2+d_1+\ldots+2+d_k}) = \sin^2(\pi w_k + \pi\Delta^s_{qw\ldots}) = \sin^2(\pi\Delta^s_{qw\ldots}) \geq M(q; w).$$

Якщо $n > N(A)$, то виконується нерівність:

$$f_n(2\pi\gamma^*(n) \cdot s^{d_0+2+d_1+\ldots+2+d_k}) \leq 1 - 4B_{1n} \leq 1 - 4AM(q; w).$$

Таким чином, при досить великому n маємо:

$$g_0(\pi\widetilde{t_n}) \leq (1 - 4AM(q; w))^j \to 0 \ (j \to +\infty)$$

і маємо суперечність з припущенням $L_\xi > 0$.

Нехай γ подається у вигляді $\frac{a}{s^b}$ для деяких натуральних a, b. Зрозуміло, що

$$\lim_{n\to+\infty} s^b\gamma^*(n) = \pi a$$

і враховуючи умову (6) маємо:

$$\lim_{n\to+\infty} g_{h_n-b}(\pi a) = 0,$$

звідки за лемою 3:

$$\lim_{n\to+\infty} g_{h_n-b}(s^b\pi\gamma^*(n)) = 0.$$

Оскільки

$$g_0(\pi t_n) \le g_{h_n-b}(s^b\pi\gamma^*(n)),$$

то $L_\xi = 0$ і маємо суперечність з припущенням $L_\xi > 0$. Отже, $L_\xi = 0$. □

2 Знаходження величини L_ξ.

Теорема 2. *Нехай виконується умова* (4), *тоді існує натуральне число a таке, що*

$$\varlimsup_{n\to+\infty} |g_n(\pi a)| = L_\xi^2. \tag{7}$$

Доведення. Якщо для кожного натурального a виконується умова (5), то за теоремою 1 $L_\xi = 0$. Нехай для деякого натурального a^*:

$$\varliminf_{n\to+\infty} |f_\xi(2\pi a^* s^n)| > 0,$$

тоді зрозуміло, що $L_\xi > 0$. По аналогії з доведенням теореми 1 вводимо послідовність $\gamma^*(n)$ і переконуємось в тому, що для деяких натуральних a та b виконується умова:

$$\lim_{n\to+\infty} \gamma^*(n) = \frac{a}{s^b}.$$

Зрозуміло, що

$$L_\xi^2 \ge \varlimsup_{n\to+\infty} g_0(\pi a s^n) = \varlimsup_{n\to+\infty} g_n(\pi a). \tag{8}$$

Зрозуміло, що

$$\lim_{n\to+\infty} s^b\gamma^*(n) = a$$

і враховуючи лему 4, маємо:

$$\varlimsup_{n\to+\infty} g_{h_n-b}(s^b\pi\gamma^*(n)) = \varlimsup_{n\to+\infty} g_{h_n-b}(\pi a).$$

Оскільки

$$g_0(\pi t_n) \le g_{h_n-b}(\pi\gamma^*(n)),$$

то

$$L_\xi^2 \le \varlimsup_{n\to+\infty} g_{h_n-b}(\pi a) \le \varlimsup_{n\to+\infty} g_n(\pi a)$$

і враховуючи нерівність (8) отримаємо потрібне. □

Враховуючи теореми 1 та 2 маємо наслідок.

Наслідок 1. *Якщо виконується умова* (4) *та послідовність стохастичних векторів* $(p_{0n}; p_{1n}; ...; p_{(m-1)n})$ *періодична, тоді існує натуральне число a таке, що*

$$|f_\xi(2\pi a)| = L_\xi.$$

Твердження 1. *Відповідні умови того, що $L_\xi = 0$, наведені в даній роботі, є необхідними для того, щоб розподіл ξ був абсолютно неперервним. На даний момент залишається відкритим питання знаходження точного значення $a \in N$ такого, що відповідає умові (7) для заданої послідовності стохастичних векторів $(p_{0n}; p_{1n}; ...; p_{(m-1)n})$. Предметом подальших досліджень може бути знаходження як точного значення L_ξ так і критеріїв сингулярності розподілу ξ.*

Список літератури

[1] Albeverio S., Goncharenko Y., Pratsiovyti M., Torbin G. *Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits.* Random Oper. Stoch. Equ. & App. 2007 **15** (1), 89–97. doi:10.1515/ROSE.2007.006

[2] Eseen C. *Fourier analysis of distribution functions.* Acta Math. & App. 1945, **77**, 1–125. doi: 10.1007/BF02392223

[3] Goncharenko Y. V. *Asymptotic properties of the characteristic function of random variables with independent binary digits and convolutions of singular distributions.* Scientific notes of the NPU named after Drahomanova 2002. **3**, 376–390.(in Ukrainian)

[4] Goncharenko Y. V., Mykytyuk I. O. *Behavior of the modulus of the characteristic function of a random variable with independent s-adic digits at infinity.* Scientific notes of the NPU named after Drahomanova 2008. **9**, 121–127. (in Ukrainian)

[5] Girault M. *Les fonctions caracteristiques el leurs transformations*, Publ.Inst.Statist.Univ. & App. 1954, **4**, 223–239.

[6] Jessen B., Wintner A. *Distribution function and Riemann Zeta-function.* Trans.Amer.Math.Soc. & App. 1935, **38**, 48–88. doi: 10.2307/1989728

[7] Levy P.*Sur les sries don't les termes sont des variables independantes.* Studia math. & App. 1931, **3**, 119–155. doi: 10.4064/sm-3-1-119-155

[8] Marsaglia G. *Random variables with independent binary digits.* Ann. Math. Statist. & App.1971, **42** (2), 1922-1929. doi:10.1214/AOMS/1177693058

[9] Peres Y., Schlag W., Solomyak B. *Sixty years of Bernoulli convolutions* Fractal Geometry and Stochastics II. Progress in Probability. & App. 2000. **46**, 39 – 65. doi:10.1007/978-3-0348-8380-12

[10] Schvartz L. *Sur le module de la fonction caracteristicue du calcul des probabilites.* C.R.Acad.Sci.Paris. & App. 1941. **212**, 418–421.

Надійшло 22.11.2023

Makarchuk O.P. *Asymptotic behavior of the characteristic function of one distribution of the Jessen-Wintner type*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 2 (2023), 173–182.

The paper considers a random variable, which is the sum of a pointwise convergent random power series with independent discretely distributed terms that take on integer values. The corresponding random variable is a random variable represented by an s-fraction with a redundant set of digits and is included in the set of distributions of the Jessen-Wintner type. The Lebesgue distribution function of a random variable represented by an s-fraction with a redundant set of digits contains only a discrete or absolutely continuous or singular component. Emphasis in the paper is on the study of the asymptotic properties of the modulus of the characteristic function of a random variable represented by an s-fraction with a redundant set of digits. We consider the value L, which is the upper limit at infinity of the modulus of the characteristic function of the corresponding random variable. The value L being equal to one and zero for a discrete and absolutely continuous distribution, respectively, can acquire an arbitrary predetermined value from the segment $[0;1]$ for a singular distribution. L is a measure of closeness to a discrete, absolutely continuous or singular distribution. Calculating exact values L or their estimation for singular distributions is a non-trivial, complex task.

In the work, the necessary and sufficient conditions for the equality of the value of the upper bound at infinity to the modulus of the characteristic function of the corresponding random variable, under certain asymptotic restrictions, were found. The limit ratios L for the calculation are indicated, in particular it is shown that the value L is the limit value of a certain subsequence of modules of the Fourier-Stiltjes coefficients.