Ільків В.С. , Страп Н.І., Волянська І.І.

НЕОДНОРІДНА КРАЙОВА ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ З ОПЕРАТОРОМ УЗАГАЛЬНЕНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Досліджено неоднорідну нелокальну крайову задачу для рівняння з частинними похідними з оператором узагальненого диференціювання $B = z\frac{\partial}{\partial z}$, який діє на функцію скалярної комплексної змінної z. Доведено теорему єдиності та теорему існування розв'язку задачі у банахових просторах функцій зі значеннями у шкалі соболєвських просторів. Показано коректність за Адамаром задачі, що відрізняє її від некоректної за Адамаром задачі з багатьма просторовими комплексними змінними, розв'язність якої пов'язана з проблемою малих знаменників.

Ключові слова і фрази: крайова задача, нелокальна гранична умова, неоднорідне рівняння в частинних похідних, функції комплексної змінної.

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine
e-mail: *ilkivvv@i.ua (Ilkiv V.S.), n.strap@i.ua (Strap N.I.), i.volyanska@i.ua (Volianska I.I.)*

Вступ

Одним з найважливіших питань загальної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними є встановлення умов коректності крайових задач. У цьому плані порівняно добре вивчені крайові задачі для лінійних і нелінійних рівнянь класичних типів та їх узагальнень, які зберігають властивості відповідного типу. Що стосується побудови теорії безтипних рівнянь, то вона далеко не завершена, багато задач потребують подальшого ретельного вивчення.

Серед некласичних крайових задач для рівнянь з частинними похідними та для диференціально-операторних рівнянь важливе місце посідають задачі з нелокальними крайовими умовами, які пов'язують значення шуканих розв'язків та їх похідних у різних (двох або більше) граничних чи внутрішніх точках розглядуваної області. У загальному випадку такі задачі є некоректними за Адамаром, а їх розв'язність залежить від проблеми малих знаменників, які виникають при побудові загального розв'язку [7, 8, 10]. Коректність нелокальних крайових задач для диференціальних рівнянь

УДК 517.946
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35A01, 35A02.

з частинними похідними досліджувалися у роботах багатьох авторів (див. [3, 6, 11]), при накладанні додаткових обмежень на рівняння, крайові умови та області розгляду задач. Дослідженню задач з нелокальними крайовими умовами за часом та умовами періодичності за просторовими змінними для рівнянь з частинними похідними присвячено, зокрема, роботи [1, 4, 5], у яких для аналізу оцінок знизу малих знаменників було використано методи і результати метричної теорії чисел.

У статті досліджено неоднорідну нелокальну крайову задачу для диференціального рівняння з узагальненим оператором диференціювання $B = z\frac{\partial}{\partial z}$ за умови однієї комплексної змінної. Встановлено критерії однозначної розв'язності задачі у просторі функцій зі значеннями у шкалі соболєвських просторів. Показано, що для однієї просторової змінної відповідні знаменники не є малими і оцінюються знизу деякими сталими. Багатовимірний випадок задачі для однорідного рівняння досліджено у роботі [2], а одновимірний випадок задачі для однорідного рівняння в уточненій шкалі просторів Соболєва досліджено у роботі [9].

1 Введення просторів та основних позначень

Позначимо через $\mathcal{S}$ область з множини $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\mathcal{D}=[0,T]\times\mathcal{S}$, де $T>0$.

Нехай $\mathbf{W}$ – лінійний простір скінченних сум (основних функцій) такого вигляду $P(z)=\sum_k P_k z^k$, де $z\in\mathcal{S}$, P_k – комплексні коефіцієнти, k — ціле число. Кожну основну функцію $P(z)$ можна подати сумою трьох доданків $P(z) = P_0 + P_1(z) + P_2\Big(\dfrac{1}{z}\Big)$, де $P_1(z)=\sum_{k>0} P_k z^k$ і $P_2(w)=\sum_{k>0} P_{-k} w^k$ — многочлени з нульовими вільними членами.

Простір $\mathbf{W}'$ — спряжений простір з простором $\mathbf{W}$; це простір узагальнених функцій (лінійних неперервних функціоналів $Q:\mathbf{W}\to\mathbb{C}$), які є формальними рядами (рядами Лорана) $Q(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k z^k=\sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k z^k$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел, що діють на основну функцію $P\in W$ за таким правилом: $\langle Q,P\rangle=\sum\limits_k Q_k\bar{P}_k$.

Введемо ще шкали просторів $\{\mathbf{H}_q(\mathcal{S})\}_{q\in\mathbb{R}}$ і $\{\mathbf{H}^n_q(\mathcal{D})\}_{q\in\mathbb{R}}$, де $\mathbf{H}_q(\mathcal{S})$ – гільбертовий простір (підпростір $\mathbf{W}'$) функцій $\psi=\psi(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi_k z^k$, який отриманий поповненням $\mathbf{W}$ за нормою

$$\|\psi\|_{\mathbf{H}_q(\mathcal{S})}=\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{k}^{2q}|\psi_k|^2\Big)^{1/2},\qquad \tilde{k}=\sqrt{1+k^2},$$

а $\mathbf{H}^n_q(\mathcal{D})$, $n\geq 0$, — банахів простір функцій $u(t,z)$ таких, що похідні $\dfrac{\partial^r u(t,z)}{\partial t^r}$ для $r=0,1,\ldots,n$, що визначені формулою $\dfrac{\partial^r u(t,z)}{\partial t^r}=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k^{(r)}(t)z^k$, для кожного $t\in[0,T]$ належать до просторів $\mathbf{H}_{q-r}(\mathcal{S})$ відповідно і неперервні за змінною t у цих просторах. Квадрат норми функції u у просторі $\mathbf{H}^n_q(\mathcal{D})$ обчислюється за формулою

$$\|u\|^2_{H^n_q(\mathcal{D})}=\sum_{r=0}^{n-1}\max_{[0,T]}\Big\|\frac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r}\Big\|^2_{H_{q-r}(S)}.$$

Зауважимо, що $B^s\psi\in\mathbf{H}_{q-s}(\mathcal{S})$ для всіх $s\in\mathbb{N}$, якщо $\psi\in\mathbf{H}_q(\mathcal{S})$, де B – оператор узагальненого диференціювання, тобто $B\psi = z\dfrac{\partial\psi}{\partial z}$, а степені оператора B визначено формулами $B^0\psi = \psi$, $B^s\psi = B(B^{s-1}\psi)$ при $s \in \mathbb{N}$ (зокрема, маємо $B^s\big(z^k\big) = k^s z^k$).

2 Постановка задачі та дослідження умов її розв'язності

В області D розглянемо неоднорідну задачу з двоточковими нелокальними умовами для диференціально-операторного рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$Lu = \sum_{s_0+s_1\le n} a_{s_0,s_1} B^{s_1}\frac{\partial^{s_0}u}{\partial t^{s_0}} = f(t,z), \tag{1}$$

$$M_m u = \mu\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\bigg|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\bigg|_{t=T} = \varphi_m, \qquad m = 0,1,\ldots,n-1, \tag{2}$$

де $a_{s_0,s_1} \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $a_{n,0} = 1$ і, якщо $s_0 < n$, то $|a_{s_0,s_1}| \le A$ для деякого $A > 0$; $u = u(t,z)$ – шукана функція, а $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ і $f(t,z)$ – задані функції.

Якщо виконується умова $u \in \mathbf{H}^n_q(\mathcal{D})$ для елемента $u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(t)z^k$, то вірними є формули $Bu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k u_k(t)z^k \in \mathbf{H}^n_{q-1}(\mathcal{D})$, $Lu \in \mathbf{H}^0_{q-n}(\mathcal{D})$, а також $M_m u \in \mathbf{H}_{q-m}(\mathcal{S})$ для $m = 0,1,\ldots,n-1$.

Означення. *Під розв'язком задачі* (1), (2) *будемо розуміти функцію* $u = u(t,z)$ *з простору* $\mathbf{C}^n([0,T];\mathbf{W}')$, *яка задовольняє рівняння* (1) *і умови* (2) *та належить до* $\mathbf{H}^n_q(\mathcal{D})$.

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(t)z^k, \tag{3}$$

де коефіцієнти $u_k(t)$– невідомі функції, які треба визначити.

Функція $u_k = u_k(t)$ з формули (3) для кожного $k \in \mathbb{Z}$ є класичним розв'язком відповідної задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\sum_{j=0}^{n} b_j(k)u_k^{(n-j)} = f_k(t), \tag{4}$$

$$\mu u_k^{(m)}\big|_{t=0} - u_k^{(m)}\big|_{t=T} = \varphi_{mk}, \qquad m = 0,1,\ldots,n-1, \tag{5}$$

де $b_j(k) = \sum_{s_1=0}^{j} a_{n-j,s_1}k^{s_1}$ – многочлени степеня не вище j, $f_k(t)$ – коефіцієнти Фур'є функції $f(t,z)$, а φ_{mk} – коефіцієнти Фур'є функції φ_m.

Розв'язок задачі (4), (5) можна подати у вигляді суми

$$u_k(t) = w_k(t) + v_k(t), \tag{6}$$

де $w_k(t)$ – розв'язок задачі для однорідного рівняння

$$\sum_{j=0}^{n} b_j(k)w_k^{(n-j)} = 0, \tag{7}$$

з неоднорідними умовами (5), а $v_k(t)$ – розв'язок задачі для неоднорідного рівняння (4) з однорідними умовами

$$\mu v_k^{(m)}\big|_{t=0} - v_k^{(m)}\big|_{t=T} = 0, \qquad m = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{8}$$

Знайдемо розв'язок задачі (7), (5).

Запишемо оператор L з рівняння (1) у вигляді суми $Lu = \sum_{j=0}^{n} b_j(B)\dfrac{\partial^{n-j}}{\partial t^{n-j}}$, де оператор $b_j(B) = \sum_{s_1=0}^{j} a_{n-j,s_1} B^{s_1}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, є многочленом не вище j-го степеня від оператора B, зокрема, $b_0(B)$ – одиничний оператор.

Для побудови розв'язку задачі (7), (5) у рівнянні (7) пронормуємо коефіцієнти $b_j(k)$, $j = 1, \ldots, n$, і подамо їх у вигляді добутку $b_j(k) = \tilde{k}^j \tilde{b}_j(k)$. Функції $\tilde{b}_j(k)$, як і коефіцієнти $b_j(k)$, лінійно залежать від параметрів $a_{n-j,0}, a_{n-j,1}, \ldots, a_{n-j,j}$ і рівномірно обмежені за цілочисловою змінною k. Очевидно, справджується нерівність

$$\left|\tilde{b}_j(k)\right| \leq \sum_{s_1=0}^{j} \left|a_{n-j,s_1}\right| \frac{|k|^{s_1}}{\tilde{k}^j} \leq \max_{s_1=0,1,\ldots,j} \left|a_{n-j,s_1}\right| \sum_{s_1=0}^{j} \frac{|k|^{s_1}}{\tilde{k}^j}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Оскільки коефіцієнти $a_{s_0,s_1} \in \mathbb{C}$ рівняння (1) розглядаємо у крузі радіуса A з центром у початку координат комплексної площини, то отримаємо оцінки

$$\left|\tilde{b}_j(0)\right| = \left|a_{n-j,0}\right| \leq A, \qquad \left|\tilde{b}_j(\pm 1)\right| \leq (j+1)2^{-j/2}A \leq 3A/2,$$

$$\left|\tilde{b}_j(k)\right| \leq \frac{A}{\tilde{k}^j}\frac{|k|^{j+1}}{|k|-1} < \frac{A|k|}{|k|-1}, \qquad k \notin \{-1, 0, 1\},$$

тобто $\left|\tilde{b}_j(k)\right| < 2A$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Звіси випливає, що для всіх (з врахуванням кратності) коренів $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)$ многочлена

$$P_k(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda - \lambda_j(k)) = \lambda^n + \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_j(k)\lambda^{n-j}$$

виконуються нерівності [12]:

$$|\lambda_j(k)| \leq 1 + \max\left\{|\tilde{b}_1|, \ldots, |\tilde{b}_n|\right\} \leq 1 + 2A. \tag{9}$$

Очевидно, що числа $\gamma_j = \tilde{k}\lambda_j(k)$ є коренями відповідного характеристичного рівняння $\gamma^n + b_1(k)\gamma^{n-1} + \ldots + b_n(k) = 0$ для диференціального рівняння (7).

Позначимо через $\mathbf{K}$ множину тих цілих чисел k, для яких многочлен $P_k(\lambda)$ має кратний корінь.

Для різних коренів $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)$, загальний розв'язок рівняння (7) має вигляд

$$w_k(t) = \sum_{l=1}^{n} C_{kl} e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbf{K}, \tag{10}$$

де C_{kl} – довільні комплексні сталі, і належить до простору $\mathbf{C}^n[0, T]$.

Якщо $u_k(t)$ – розв'язок задачі (7), (5), то числа $\tilde{C}_{kl} = \big(\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}\big)C_{kl}$, $l = 1, 2, \ldots, n$, утворюють розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{l=1}^{n} \lambda_l^m(k)\tilde{C}_{kl} = \frac{\varphi_{m,k}}{\tilde{k}^m}, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{11}$$

з матрицею Вандермонда $\big(\lambda_l^{m-1}(k)\big)_{m,l=1}^{n}$. Навпаки, якщо числа $\tilde{C}_{kl}$, де $l = 1, 2, \ldots, n$, утворюють розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (11), то функція $u_k(t)$, що визначена формулою (10), в якій $C_{kl} = \dfrac{\tilde{C}_{kl}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}$, є розв'язком задачі (7), (5).

Розв'язуючи систему (11) за правилом Крамера, одержуємо рівності

$$\tilde{C}_{kl} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_{jl}(k)}{\Delta(k)} \tilde{k}^{-j} \varphi_{jk}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbf{K},$$

де $\Delta(k) = \prod\limits_{1 \le r < q \le n} \big(\lambda_q(k) - \lambda_r(k)\big)$ – визначник Вандермонда, а $\Delta_{jl}(k)$ — відповідні алгебричні доповнення його елементів для $j = 0, 1, \ldots, n-1$ і $l = 1, 2, \ldots, n$ (зокрема $\Delta_{01}(k) = \Delta(k) = 1$, якщо $n = 1$).

Для того, щоб задача (7), (5) мала єдиний класичний розв'язок для кожного $k \in \mathbb{Z}\setminus\mathbf{K}$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $\mu \ne e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}$ для $l = 1, \ldots, n$. З цієї умови випливає, що $\ln\mu \ne \tilde{k}\lambda_l(k)T + i2\pi m$, або $\lambda_l(k) \ne \dfrac{\ln\mu - i2\pi m}{\tilde{k}T}$ для довільних $m \in \mathbb{Z}$ та $l = 1, 2, \ldots, n$, де $\ln\mu$ — головне значення логарифма.

У протилежному випадку, коли $\mu = e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}$ для деякого l, існує таке число $m \in \mathbb{Z}$, що корінь $\lambda_l(k)$ визначається за формулою: $\lambda_l(k) = \dfrac{\ln\mu - i2\pi m}{\tilde{k}T}$. Тому виконується рівність $\dfrac{(\ln\mu - i2\pi m)^n}{T^n\tilde{k}^n} + \sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{b}_j(k) \dfrac{(\ln\mu - i2\pi m)^{n-j}}{T^{n-j}\tilde{k}^{n-j}} = 0$ чи еквівалентна їй рівність

$$(\ln\mu - i2\pi m)^n + \sum_{j=1}^{n} b_j(k) T^j (\ln\mu - i2\pi m)^{n-j} = 0. \tag{12}$$

Для кратних коренів ($k \in \mathbf{K}$) загальний розв'язок рівняння (7) також буде мати вигляд (10), в якому, залежно від кратності коренів $\lambda_l(k)$, замість числових коефіцієнтів C_{kl} будуть многочленні коефіцієнти $C_{kl}(t)$.

За формулою (10) розв'язок $w_k(t)$ задачі (7), (5) має таке зображення:

$$w_k(t) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_{jl}(k)}{\prod\limits_{1 \le r < q \le n} \big(\lambda_q(k) - \lambda_r(k)\big)} \frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}} \tilde{k}^{-j} \varphi_{jk}, \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbf{K}. \tag{13}$$

Враховуючи, що $\mathbf{K}$ – скінченна множина (буде показано далі), оцінимо абсолютну величину функцій w_k та їх похідних до порядку n лише для $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbf{K}$, зокрема

$$\big|w_k^{(r)}(t)\big| \le \frac{\tilde{k}^r}{|\Delta(k)|} \max_{j,l} |\Delta_{jl}(k)| \sum_{l=1}^{n} \frac{\big|\lambda_l^r(k) e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}\big|}{\big|\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}\big|} \sum_{j=0}^{n-1} \big|\tilde{k}^{-j}\varphi_{jk}\big|, \qquad t \in [0, T].$$

Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату і перетворимо до вигляду

$$\left|w_k^{(r)}(t)\right|^2 \le n^3(1+2A)^{2r}\frac{\tilde{k}^{2r}}{|\Delta(k)|^2}\max_{j,l}|\Delta_{jl}(k)|^2\max_l\left|\frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\right|^2\sum_{j=0}^{n-1}\left|\tilde{k}^{-j}\varphi_{jk}\right|^2. \qquad (14)$$

Оскільки $\Delta_{jl}(k)$ – визначники порядку $n-1$, що мають обмежені елементи, які є степенями чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то з оцінок (9) маємо нерівності

$$|\Delta_{jl}(k)| \le (n-1)!(1+2A)^{(n-1)n/2}. \qquad (15)$$

Для подальшої оцінки $|u_k|$ розглянемо вираз $\Delta^2(k)$ у знаменнику формули (14), який є дискримінантом $D(k)$ полінома $P_k(\lambda)$ і для якого справедливі такі два зображення:

$$\Delta^2(k) = D(k) = \prod_{1\le r<q\le n}\left(\lambda_q(k)-\lambda_r(k)\right)^2 = \tilde{k}^{-n(n-1)}\prod_{1\le r<q\le n}\left(\tilde{k}\lambda_q(k)-\tilde{k}\lambda_r(k)\right)^2,$$

$$D(k) = \pm\begin{vmatrix}
1 & \tilde{b}_1(k) & \dots & \tilde{b}_{n-1}(k) & \tilde{b}_n(k) & 0 & \dots & 0\\
0 & 1 & \dots & \tilde{b}_{n-2}(k) & \tilde{b}_{n-1}(k) & \tilde{b}_n(k) & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & \dots & \tilde{b}_1(k) & \tilde{b}_2(k) & \tilde{b}_3(k) & \dots & \tilde{b}_n(k)\\
n & (n-1)\tilde{b}_1(k) & \dots & \tilde{b}_{n-1}(k) & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & n & \dots & 2\tilde{b}_{n-2}(k) & \tilde{b}_{n-1}(k) & 0 & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & \dots & n & (n-1)\tilde{b}_1(k) & (n-2)\tilde{b}_2(k) & \dots & \tilde{b}_{n-1}(k)
\end{vmatrix},$$

де знак перед визначником визначає формула $(-1)^{(n-1)n/2}$.

Дискримінант $D(k)$ подамо у вигляді многочлена:

$$\begin{aligned} D(k) = D_0\Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n(n-1)} + \frac{D_1}{\tilde{k}}\Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n(n-1)-1} + \frac{D_2}{\tilde{k}^2}\Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n(n-1)-2} + \ldots + \frac{D_{n(n-1)}}{\tilde{k}^{n(n-1)}} = \\ = \Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n(n-1)}\Big(D_0 + \frac{D_1}{k} + \frac{D_2}{k^2} + \ldots + \frac{D_{n(n-1)}}{k^{n(n-1)}}\Big), \quad (16)\end{aligned}$$

де $D_0, D_1, D_2, \dots, D_{n(n-1)}$ – комплексні числа, які є многочленами від коефіцієнтів a_{s_0,s_1} рівняння (1), причому D_0 – дискримінат многочлена $\lambda^n + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n-j,j}\lambda^{n-j}$ (цей многочлен будується за головною частиною рівняння (1)):

$$D_0 = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\begin{vmatrix}
1 & a_{n-1,1} & \dots & a_{1,n-1} & a_{0,n} & 0 & \dots & 0\\
0 & 1 & \dots & a_{2,n-2} & a_{1,n-1} & a_{0,n} & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & \dots & a_{n-1,1} & a_{n-2,2} & a_{n-3,3} & \dots & a_{0,n}\\
n & (n-1)a_{n-1,1} & \dots & a_{1,n-1} & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & n & \dots & 2a_{2,n-2} & a_{1,n-1} & 0 & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & \dots & n & (n-1)a_{n-1,1} & (n-2)a_{n-2,2} & \dots & a_{1,n-1}
\end{vmatrix},$$

$D_{n(n-1)}$ – дискримінат многочлена $\lambda^n + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n-j,0}\lambda^{n-j}$ (многочлен будується за коефіцієнтами $a_{0,0}, a_{1,0}, \ldots, a_{n-1,0}$ біля функцій $u, \partial u/\partial t, \ldots, \partial^{n-1}u/\partial t^{n-1}$):

$$D_{n(n-1)} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1,0} & \ldots & a_{1,0} & a_{0,0} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & a_{2,0} & a_{1,0} & a_{0,0} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,0} & a_{n-2,0} & a_{n-3,0} & \ldots & a_{0,0} \\ n & (n-1)a_{n-1,0} & \ldots & a_{1,0} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & n & \ldots & 2a_{2,0} & a_{1,0} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & n & (n-1)a_{n-1,0} & (n-2)a_{n-2,0} & \ldots & a_{1,0} \end{vmatrix}.$$

Нехай $D_0 \neq 0$, тоді дискримінант $D(k)$ при $k \neq 0$ факторизуємо так:

$$D(k) = \frac{D_0}{2}\Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n(n-1)}\Big(2 + \frac{2D_1}{D_0 k} + \frac{2D_2}{D_0 k^2} + \ldots + \frac{2D_{n(n-1)}}{D_0 k^{n(n-1)}}\Big) =$$
$$= \frac{D_0}{2}\Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n(n-1)}\Big(2 + \frac{2}{kD_0}\Big(D_1 + \frac{D_2}{k} + \ldots + \frac{D_{n(n-1)}}{k^{n(n-1)-1}}\Big)\Big).$$

З останньої формули випливає нерівність $|D(k)| \geq \frac{|D_0|}{2}\cdot\Big(\frac{|k|}{\tilde{k}}\Big)^{n(n-1)}$ за умови $|k| \geq \frac{\tilde{D}_0}{|D_0|}$, де $\tilde{D}_0 = 2\big(|D_1| + |D_2| + \ldots + |D_{n(n-1)}|\big)$.

Далі використаємо для дробу $|k|/\tilde{k}$ оцінку

$$\frac{|k|}{\tilde{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}. \tag{17}$$

Врахувавши нерівність (17), оцінимо модуль $D(k)$ знизу

$$|D(k)| \geq \frac{|D_0|}{2}\cdot\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{n(n-1)} = \big(\sqrt{2}\big)^{-n(n-1)-2}|D_0|, \quad |k| \geq \frac{\tilde{D}_0}{|D_0|}. \tag{18}$$

Отримана оцінка є точною за k при $|k| \geq \frac{\tilde{D}_0}{|D_0|}$, оскільки оцінка зверху, яка випливає із зображення дискримінанта $D(k)$, відрізняється лише сталою і має вигляд нерівності $|D(k)| \leq \frac{3}{2}|D_0|$.

З оцінки (18) випливає також, що $D(k) \neq 0$, тобто скінченність множини $\mathbf{K}$, оскільки вона міститься у крузі радіуса $\tilde{D}_0/|D_0|$.

У формулі (14) залишається оцінити зверху дроби $\frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}$. Для цього використаємо формули $\big|e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}\big| = e^{\tilde{k}\mathrm{Re}\,\lambda_l(k)t} \leq \max\big\{1, e^{\tilde{k}\mathrm{Re}\,\lambda_l(k)T}\big\}$ та $\tilde{k}|\mathrm{Re}\,\lambda_j| \to \infty$ при $|k| \to \infty$. Очевидно, що треба довести лише другу формулу.

З рівності $2\mathrm{Re}\,\lambda_j(k) = \lambda_j(k) + \bar{\lambda}_j(k) = \lambda_j(k) - (-\bar{\lambda}_j(k))$ і того, що $-\bar{\lambda}_1(k), \ldots, -\bar{\lambda}_n(k)$ є коренями многочлена $P_{1k}(\lambda) = \prod\limits_{j=1}^{n}(\lambda + \bar{\lambda}_j(k)) = \lambda^n + \sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{-j}\bar{\bar{b}}_j(k)\lambda^{n-j}$, отримаємо, що числа $2\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)$ є множниками результанта $R(k)=\prod_{j=1}^{n}\prod_{l=1}^{n}(\lambda_j(k)-(-\bar{\lambda}_l(k)))$ многочленів P_k та P_{1k}. Цей результант дорівнює такому визначнику:

$$R(k)=\begin{vmatrix} 1 & \tilde{b}_1(k) & \dots & \tilde{b}_{n-1}(k) & \tilde{b}_n(k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \tilde{b}_{n-2}(k) & \tilde{b}_{n-1}(k) & \tilde{b}_n(k) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{b}_1(k) & \tilde{b}_2(k) & \tilde{b}_3(k) & \dots & \tilde{b}_n(k) \\ 1 & -\bar{\tilde{b}}_1(k) & \dots & (-1)^{n-1}\bar{\tilde{b}}_{n-1}(k) & (-1)^n\bar{\tilde{b}}_n(k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & (-1)^{n-2}\bar{\tilde{b}}_{n-2}(k) & (-1)^{n-1}\bar{\tilde{b}}_{n-1}(k) & (-1)^n\bar{\tilde{b}}_n(k) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\bar{\tilde{b}}_1(k) & -\bar{\tilde{b}}_2(k) & -\bar{\tilde{b}}_3(k) & \dots & (-1)^n\bar{\tilde{b}}_n(k). \end{vmatrix}$$

Для довільного $j=1,\dots,n$ оцінимо модуль даного результанта зверху

$$|R(k)|\le 2^{n^2}(1+2A)^{n^2-1}|\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)|.$$

Для оцінки знизу подамо результант у вигляді

$$R(k)=\Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n^2}\Big(R_0+\frac{R_1}{k}+\frac{R_2}{k^2}+\ldots+\frac{R_{n^2}}{k^{n^2}}\Big),\quad k\ne 0, \tag{19}$$

де R_0 дорівнює такому визначнику:

$$R_0=\begin{vmatrix} 1 & a_{n-1,1} & \dots & a_{1,n-1} & a_{0,n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & a_{2,n-2} & a_{1,n-1} & a_{0,n} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,1} & a_{n-2,2} & a_{n-3,3} & \dots & 0 \\ 1 & -\bar{a}_{n-1,1} & \dots & (-1)^{n-1}\bar{a}_{1,n-1} & (-1)^n\bar{a}_{0,n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & (-1)^{n-2}\bar{a}_{2,n-2} & (-1)^{n-1}\bar{a}_{1,n-1} & (-1)^n\bar{a}_{0,n} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\bar{a}_{n-1,1} & -\bar{a}_{n-2,2} & -\bar{a}_{n-3,3} & \dots & (-1)^n\bar{a}_{0,n} \end{vmatrix},$$

і у випадку $R_0\ne 0$ маємо добуток

$$R(k)=\frac{R_0}{2}\Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n^2}\Big(2+\frac{2}{kR_0}\Big(R_1+\frac{R_2}{k}+\ldots+\frac{R_{n^2}}{k^{n^2-1}}\Big)\Big).$$

Якщо $k\in\mathbb{Z}$ і $|k|\ge\dfrac{\tilde{R}_0}{|R_0|}$, де $\tilde{R}_0=2(|R_1|+|R_2|+\ldots+|R_{n^2}|)$, то справджується нерівність $|R(k)|\ge\dfrac{|R_0|}{2}\Big(\dfrac{|k|}{\tilde{k}}\Big)^{n^2}\ge(\sqrt{2})^{-n^2-2}|R_0|$.

Оскільки $\tilde{k}\to\infty$ у разі $|k|\to\infty$ і

$$|\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)|\ge 2^{-n^2}(1+2A)^{1-n^2}|R(k)|\ge(\sqrt{2})^{-3n^2-2}(1+2A)^{1-n^2}|R_0|>0,$$

то $\tilde{k}|\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)|\to\infty$, якщо $|k|\to\infty$.

Для шуканої оцінки дробів з експонентами у формулі (14) врахуємо знак $\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)$. Для $\mathrm{Re}\,\lambda_j(k) > 0$ справджується рівномірна на $[0, T]$ оцінка

$$\Big|\frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\Big| \le \frac{e^{\tilde{k}\mathrm{Re}\,\lambda_l(k)T}}{\big|\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}\big|} = \frac{e^{\tilde{k}\mathrm{Re}\,\lambda_l(k)T}}{e^{\tilde{k}\mathrm{Re}\,\lambda_l(k)T}\Big|\dfrac{\mu}{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}} - 1\Big|} = \frac{1}{\Big|\mu e^{-\tilde{k}\lambda_l(k)T} - 1\Big|} \le 2$$

при $\tilde{k} \ge \dfrac{M_1}{|R_0|}$ і $|k| \ge \dfrac{\tilde{R}_0}{|R_0|}$, де $M_1 = \dfrac{\ln(2|\mu|)}{T}(\sqrt{2})^{3n^2+2}(1+2A)^{n^2-1}$.

Якщо ж $\mathrm{Re}\,\lambda_j(k) < 0$, то аналогічно

$$\Big|\frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\Big| = \frac{1}{\big|\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}\big|} \le \frac{2}{|\mu|}$$

при $\tilde{k} \ge \dfrac{M_2}{|R_0|}$ і $|k| \ge \dfrac{\tilde{R}_0}{|R_0|}$, де $M_2 = \dfrac{\ln(2/|\mu|)}{T}(\sqrt{2})^{3n^2+2}(1+2A)^{n^2-1}$.

Отже, за двох умов $\tilde{k} \ge \max\dfrac{(M_1, M_2)}{|R_0|} = \dfrac{(\sqrt{2})^{3n^2+2}(1+2A)^{n^2-1}}{T|R_0|}\ln\max(2|\mu|, 2/|\mu|)$ і $|k| \ge \dfrac{\tilde{R}_0}{|R_0|}$ для виразу $\Big|\dfrac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\Big|$ справджується нерівність

$$\Big|\frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\Big| \le 2\max\Big(1, \frac{1}{|\mu|}\Big). \tag{20}$$

З врахуванням нерівностей (14), (15), (18) і (20) маємо для всіх $t \in [0, T]$ оцінку розв'язку задачі (7), (5) та його похідних

$$|w_k^{(r)}(t)|^2 \le \frac{\tilde{C}_{00}}{|D_0|}\sum_{j=0}^{n-1}|\tilde{k}|^{2(r-j)}|\varphi_{jk}|^2, \qquad k \in \mathbb{Z}\setminus\mathbf{K}_{00}, \quad r = 0, 1, \ldots, n, \tag{21}$$

де $\tilde{C}_{00} = \tilde{C}_{00}(A, n, \mu) > 0$, $\mathbf{K}_{00}$ – множина цілих чисел k, для яких справедлива нерівність $|k| \le \max\Big(\dfrac{\tilde{D}_0}{|D_0|}, \dfrac{\tilde{R}_0}{|R_0|}\Big)$ або нерівність $\tilde{k} \le \max\dfrac{(M_1, M_2)}{|R_0|}$.

Для отримання подібних оцінок для $v_k(t)$ зобразимо розв'язок задачі (4), (8) у вигляді

$$v_k(t) = \int_0^T G_k(t, \tau)f_k(\tau)d\tau, \tag{22}$$

де $G_k(t, \tau)$ – функція Гріна задачі (7), (8). У квадраті $K_T = [0, T]^2$ функції $G_k(t, \tau)$ визначаються формулами:

$$G_k(t, \tau) = g_k(t, \tau) + \frac{1}{2\tilde{k}^{n-1}}\sum_{j=1}^{n}\frac{e^{\tilde{k}\lambda_j(k)(t-\tau)}(\mu + e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T})}{\prod\limits_{\substack{q=1\\q\ne j}}^{n}\big(\lambda_j(k) - \lambda_q(k)\big)(\mu - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T})}, \qquad k \in \mathbb{Z}\setminus\mathbf{K}, \tag{23}$$

де

$$g_k(t, \tau) = \frac{\mathrm{sgn(t-\tau)}}{2\tilde{k}^{n-1}}\sum_{j=1}^{n}\frac{e^{\tilde{k}\lambda_j(k)(t-\tau)}}{\prod\limits_{\substack{q=1\\q\ne j}}^{n}\big(\lambda_j(k) - \lambda_q(k)\big)}. \tag{24}$$

Функція Гріна $G_k(t,\tau)$ існує тоді і тільки тоді, коли для всіх $k \in \mathbb{Z}$ виконується умова $\mu - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T} \neq 0$, $j = 1, \dots, n$.

Перепишемо формули (23) і (24) у вигляді

$$G_k(t,\tau) = \frac{1}{2\tilde{k}^{n-1}} \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{\tilde{k}\lambda_j(k)(t-\tau)}}{\prod\limits_{\substack{q=1\\ q\neq j}}^{n} \big(\lambda_j(k) - \lambda_q(k)\big)} \Big(\mathrm{sgn(t-}\tau) + \frac{\mu + \mathrm{e}^{\tilde{\mathrm{k}}\lambda_\mathrm{j}(\mathrm{k})\mathrm{T}}}{\mu - \mathrm{e}^{\tilde{\mathrm{k}}\lambda_\mathrm{j}(\mathrm{k})\mathrm{T}}}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2\tilde{k}^{n-1}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\big(\mathrm{sgn(t-}\tau)(\mu - \mathrm{e}^{\tilde{\mathrm{k}}\lambda_\mathrm{j}(\mathrm{k})\mathrm{T}}) + \mu + \mathrm{e}^{\tilde{\mathrm{k}}\lambda_\mathrm{j}(\mathrm{k})\mathrm{T}}\big)\mathrm{e}^{\tilde{\mathrm{k}}\lambda_\mathrm{j}(\mathrm{k})(\mathrm{t}-\tau)}}{\prod\limits_{\substack{q=1\\ q\neq j}}^{n} \big(\lambda_j(k) - \lambda_q(k)\big)(\mu - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T})} =$$

$$= \frac{1}{2\tilde{k}^{n-1}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\prod\limits_{\substack{1\le r<q\le n\\ q,r\neq j}} \big(\lambda_q(k) - \lambda_r(k)\big)\big(\mathrm{sgn(t-}\tau)(\mu - \mathrm{e}^{\tilde{\mathrm{k}}\lambda_\mathrm{j}(\mathrm{k})\mathrm{T}}) + \mu + \mathrm{e}^{\tilde{\mathrm{k}}\lambda_\mathrm{j}(\mathrm{k})\mathrm{T}}\big)\mathrm{e}^{\tilde{\mathrm{k}}\lambda_\mathrm{j}(\mathrm{k})(\mathrm{t}-\tau)}}{\prod\limits_{1\le r<q\le n} \big(\lambda_q(k) - \lambda_r(k)\big)(\mu - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T})} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\tilde{k}^{n-1}} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\prod\limits_{\substack{1\le r<q\le n\\ q,r\neq j}} \big(\lambda_q(k) - \lambda_r(k)\big)\mu e^{\tilde{k}\lambda_j(k)(t-\tau)}}{\prod\limits_{1\le r<q\le n} \big(\lambda_q(k) - \lambda_r(k)\big)(\mu - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T})}, & \text{при } t > \tau; \\ \dfrac{1}{\tilde{k}^{n-1}} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\prod\limits_{\substack{1\le r<q\le n\\ q,r\neq j}} \big(\lambda_q(k) - \lambda_r(k)\big) e^{\tilde{k}\lambda_j(k)(t+T-\tau)}}{\prod\limits_{1\le r<q\le n} \big(\lambda_q(k) - \lambda_r(k)\big)(\mu - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T})}, & \text{при } t < \tau. \end{cases}$$

Оскільки $\Delta_j(k) = \prod\limits_{\substack{1\le r<q\le n\\ q,r\neq j}} \big(\lambda_q(k) - \lambda_r(k)\big)$ – визначники порядку $n-1$, що мають обмежені елементи, які є степенями чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то

$$\Delta_j(k) \le (n-1)!(1+2A)^{(n-1)(n-2)/2}. \tag{25}$$

Знайдемо похідну по t порядку r функції Гріна, $r = 0, 1, \dots, n-1$,

$$\frac{\partial^r G_k(t,\tau)}{\partial t^r} = \begin{cases} \dfrac{1}{\tilde{k}^{n-1}} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\prod\limits_{\substack{1\le r<q\le n\\ q,r\neq j}} (\lambda_q(k) - \lambda_r(k))\mu \tilde{k}^r \lambda_j^r(k) e^{\tilde{k}\lambda_j(k)(t-\tau)}}{\prod\limits_{1\le r<q\le n} (\lambda_q(k) - \lambda_r(k))(\mu - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T})}, & \text{при } t > \tau; \\ \dfrac{1}{\tilde{k}^{n-1}} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\prod\limits_{\substack{1\le r<q\le n\\ q,r\neq j}} (\lambda_q(k) - \lambda_r(k))\tilde{k}^r \lambda_j^r(k) e^{\tilde{k}\lambda_j(k)(t+T-\tau)}}{\prod\limits_{1\le r<q\le n} (\lambda_q(k) - \lambda_r(k))(\mu - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T})}, & \text{при } t < \tau. \end{cases}$$

Із нерівностей (9), (18), (20), (25) випливає, що для майже всіх векторів, складених з коефіцієнтів рівняння та параметра μ виконуються нерівності:

$$\left| \frac{\partial^r G_k(t,\tau)}{\partial t^r} \right| \le \hat{C} \tilde{k}^{\sigma + r}, \tag{26}$$

де $\sigma \geq 1-n$, і стала

$$\hat{C} = \begin{cases} \sqrt{2}^{n(n-1)+4}(n{-}1)!(1{+}2A)^{(n-1)(n-2)/2+r}\mu \max\left(1, 1/|\mu|\right), & \text{при } t{>}\tau; \\ \sqrt{2}^{n(n-1)+4}(n{-}1)!(1{+}2A)^{(n-1)(n-2)/2+r} \max\left(1, 1/|\mu|\right), & \text{при } t{<}\tau. \end{cases}$$

З формули (22) та нерівності (26) отримаємо наступну оцінку:

$$|v_k^{(r)}(t)| \leq \hat{C}\tilde{k}^{\sigma+r}\int_0^T |f_k(t)|dt, \quad k \in \mathbb{Z}\setminus \mathbf{K}_{00}, \quad r = 0, 1, \ldots, n, \tag{27}$$

де $\mathbf{K}_{00}$ – множина цілих чисел k, для яких справедлива нерівність $|k| \leq \max\left(\frac{\tilde{D}_0}{|D_0|}, \frac{\tilde{R}_0}{|R_0|}\right)$ або нерівність $\tilde{k} \leq \max\frac{(M_1, M_2)}{|R_0|}$.

Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату і одержимо:

$$|v_k^{(r)}(t)|^2 \leq \tilde{C}\tilde{k}^{2\sigma+2r}\int_0^T |f_k(t)|^2 dt, \tag{28}$$

де додатна величина $\tilde{C}$ залежить від коефіцієнтів a_{s_0,s_1} рівняння (1) і параметра μ, а також від чисел A та n.

Тоді одержимо формальне зображення розв'язку задачі (1), (2) у вигляді ряду:

$$u(t,z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} z^k\Big(\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Delta_{jl}(k)}{\Delta(k)}\frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\tilde{k}^{-j}\varphi_{jk} + \int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau\Big). \tag{29}$$

Сформулюємо та доведемо теорему про єдиність розв'язку задачі (1), (2) у просторі $H_q^n(\mathcal{D})$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$ *необхідно і достатньо, щоб рівняння* (12) *не мало розв'язків у цілих числах* m *і* k.

Доведення. Необхідність. Нехай задача (1), (2) у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$ має не більше одного розв'язку. Якщо існує розв'язок задачі (1), (2), тоді всі функції $u_k(t)$ знаходяться однозначно, тобто задача (4), (5) у просторі $\mathbb{C}^n[0;T]$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ має єдиний розв'язок. Отже, $\Delta(k)\cdot\prod_{l=1}^{n}\left(\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}\right) \neq 0$, якщо $k \in \mathbb{Z}\setminus\mathbf{K}$, тобто $\mu \neq e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}$ для $l = 1, \ldots, n$. Таким чином, рівняння (12) не має розв'язків у цілих числах m і k. Аналогічні нерівності отримуємо при $k \in \mathbf{K}$.

Достатність. Доведемо від супротивного. Нехай рівняння (12) має розв'язок для k^*, m^*. Тоді можна вважати, що $\lambda_1(k^*) = \dfrac{\ln\mu - i2\pi m^*}{\tilde{k^*}T}$, а задача (4), (5) має розв'язок $e^{\tilde{k}^*\lambda_1(k)t} = e^{(\ln\mu - i2\pi m^*)\frac{t}{T}}$. Звідси випливає, що задача (1), (2) у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$ якщо має, то безліч розв'язків. □

Для фіксованих μ та T рівняння (12) визначають зліченну кількість прямих у просторі коефіцієнтів a_{s_0,s_1} диференціального рівняння (1), а для фіксованих значень

a_{s_0,s_1} — зліченну кількість точок на площині змінної $\ln\mu$ за фіксованого T, або зліченну кількість точок на осі змінної T за фіксованого μ. Тому множини коефіцієнтів чи параметрів задачі (1), (2), для яких не виконуються умови єдиності мають міру нуль.

Зауважимо, що через вплив малих знаменників оцінки (20) не справджуються у випадку багатьох комплексних змінних.

Сформулюємо теорему існування розв'язку задачі (1), (2) у просторі $H^n_q(\mathcal{D})$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови $D_0R_0 \neq 0$ і для всіх $k \in \mathbf{K}_{00}$ рівняння* (12) *не має розв'язків у цілих числах m. Якщо $\varphi_0 \in \mathbf{H}_q(\mathcal{S})$, $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{q-1}(\mathcal{S})$,..., $\varphi_{n-1} \in \mathbf{H}_{q-n+1}(\mathcal{S})$ і $f \in H^0_{q+\sigma}(\mathcal{D})$, де $\sigma \geq 1-n$, то існує лише один розв'язок задачі* (1), (2), *який належить до простору $\mathbf{H}^n_q(\mathcal{D})$. Цей розв'язок неперервно залежить від правих частин $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ умов* (2).

Доведення. Оскільки для розв'язку $u(t,z)$ задачі (1), (2) виконується (29), то $u = w+v$, де $w = \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k(t)z^k$, $v = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k(t)z^k$ і

$$\|u\|^2 \leq 2\|w\|^2 + 2\|v\|^2.$$

З оцінок (21), (28) випливає нерівність

$$\|u\|^2_{H^n_q(\mathcal{D})} \leq C_1\big(\sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j\|^2_{H_{\psi-j}(\mathcal{S})} + \|f\|^2_{H^0_{q+\sigma}(\mathcal{D})}\big),$$

де $C_1 > 0$ – стала, яка не залежить від функцій φ_j і f, звідки й випливає твердження теореми. □

Список літератури

[1] Власій О.Д., Пташник Б.Й. *Нелокальна крайова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними, не розв'язних відносно старшої похідної за часом.* Укр. мат. журн. 2007, **59** (3), 370–381. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/164082

[2] Ільків В.С., Страп Н.І. *Нелокальна крайова задача для рівняння з частинними похідними у багатовимірній комплексній області* // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Математика і інформатика. 2013. **24** (1), – 60–72.

[3] Кондратів Л.Й., Симотюк М.М., Тимків І.Р. *Задача з нелокальними умовами для безтипних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами з відхиленням.* Прикарпатський вісник НТШ. Число. 2018, **1** (45), 37–44. https://pvntsh.nung.edu.ua/index.php/number/article/view/11

[4] Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. Київ: Наук. думка, 2002, 416 с.

[5] Савка І.Я. *Нелокальна задача із залежними коефіцієнтами в умовах для рівняння другого порядку за часовою змінною* Карпат. мат. публ. 2010, **2** (2), 101 – 110.

[6] Goy T., Negrych M., Savka I. *On nonlocal boundary value problem for the equation of motion of a homogeneous elastic beam with pinned-pinned ends.* Carpathian Mathematical Publications. 2018, **10** (1), 105–113. https://doi.org/10.15330/cmp.10.1.105-113

[7] Il'kiv V.S., Strap N.I., Volyanska I.I. *Conditions of solvability of the nonlocal boundary-value problem for a differential-operator equation with weak nonlinearity* // J. Math. Sci. – August 14, 2021, **256** (6), 753–769.

[8] Il'kiv V.S., Strap N.I. *Nonlocal boundary-value problem for a differential-operator equation with weak nonlinearity in the spaces of Dirichlet - Taylor series with fixed spectrum* // J. Math. Sci. 2018, **231** (4), 572–585.

[9] Ilkiv V.S., Strap N.I., Volyanska I.I. *Nonlocal boundary value problem for an equation with differentiation operator* $z\dfrac{\partial}{\partial z}$ *in a refined Sobolev scale* // J. Math. Sci. 2023, **273** (6), 885–900.

[10] Il'kiv V.S., Strap N.I., Volyanska I.I. *Solvability Conditions for the Nonlocal Boundary-Value Problem for a Differential-Operator Equation with Weak Nonlinearity in the Refined Sobolev Scale of Spaces of Functions of Many Real Variables* // Ukrainian mathematical journal. 2020. **72** (4), 515–535.

[11] Kalenyuk P.I., Kohut I.V., Nytrebych Z.M. *Problem with nonlocal two-point condition in time for a homogeneous partial differential equation of infinite order with respect to space variables* Journal of Mathematical Sciences. 2010, **167** (1), 1–15. https://doi.org/10.1007/s10958-010-9898-9

[12] Waerden B. L. van der (Bartel Leendert) Algebra. Ungar, New York, 1970.

Список літератури

[1] Vlasii O.D., Ptashnyk B.I. *Nonlocal boundary-value problem for linear partial differential equations unsolved with respect to the higher time derivative.* Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal 2007, **59** (3), 370–381. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/164082 (in Ukrainian)

[2] Ilkiv V.S., Strap N.I. *Nonlocal boundary value problem for partial differential equation in a multidimensional complex domain* // Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics. 2013. **24** (1), 60–72. (in Ukrainian)

[3] Kondrativ L.Yo., Symotyuk M.M., Tymkiv I.R. *Problem with nonlcal conditions for partial diffeential equations with constant coefficitnts with delay.* Precarpathian bulletin of Shevchenko Scientific Society Number. 2018, **1** (45), 37–44. https://pvntsh.nung.edu.ua/index.php/number/article/view/11 (in Ukrainian)

[4] Ptashnyk B.I., Il'kiv V.S., Kmit' I.Ya., Polishchuk V.M. Nonlocal boundary value problems for partial differential equations. Kyiv: Naukova dumka, 2002, 416 p. (in Ukrainian)

[5] Savka I.Ya. *Nonlocal problem with dependent coefficients in conditions for the second-order equation in time variable* Carpathian Mathematical Publications. 2010, **2** (2), 101 – 110. (in Ukrainian)

[6] Goy T., Negrych M., Savka I. *On nonlocal boundary value problem for the equation of motion of a homogeneous elastic beam with pinned-pinned ends.* Carpathian Mathematical Publications. 2018, **10** (1), 105–113. https://doi.org/10.15330/cmp.10.1.105-113

[7] Il'kiv V.S., Strap N.I., Volyanska I.I. *Conditions of solvability of the nonlocal boundary-value problem for a differential-operator equation with weak nonlinearity* // J. Math. Sci. – August 14, 2021, **256** (6), 753–769.

[8] Il'kiv V.S., Strap N.I. *Nonlocal boundary-value problem for a differential-operator equation with weak nonlinearity in the spaces of Dirichlet - Taylor series with fixed spectrum* // J. Math. Sci. 2018. **231** (4), 572–585.

[9] Ilkiv V.S., Strap N.I., Volyanska I.I. *Nonlocal boundary value problem for an equation with differentiation operator* $z\dfrac{\partial}{\partial z}$ *in a refined Sobolev scale* // J. Math. Sci. 2023. **273** (6), 885–900.

[10] Il'kiv V.S., Strap N.I., Volyanska I.I. *Solvability Conditions for the Nonlocal Boundary-Value Problem for a Differential-Operator Equation with Weak Nonlinearity in the Refined Sobolev Scale of Spaces of Functions of Many Real Variables* // Ukrainian mathematical journal. 2020. **72** (4), 515–535.

[11] Kalenyuk P.I., Kohut I.V., Nytrebych Z.M. *Problem with nonlocal two-point condition in time for a homogeneous partial differential equation of infinite order with respect to space variables* Journal of Mathematical Sciences. 2010, **167** (1), 1–15. https://doi.org/10.1007/s10958-010-9898-9

[12] Waerden B. L. van der (Bartel Leendert) Algebra. Ungar, New York, 1970.

Надійшло 17.10.2023

Ilkiv V.S., Strap N.I., Volianska I.I. *Nonhomogeneous boundary value problem with nonlocal conditions for a partial differential equation with the operator of the generalized differentiation*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 2 (2023), 127–140.

The article is devoted to investigation of non-local boundary value problem for nonhomogeneous partial differential equation with the operator of the generalized differentiation $B = z\frac{\partial}{\partial z}$, which operate on function of scalar complex variable z. Problems with nonlocal conditions for partial differential equations represent an important part of the present-day theory of differential equations. Particularly, this is due with the fact that these problems are models of the propagation of heat, process of moisture transfer in capillary-porous environments, diffusion of particles in the plasma, inverse problems, and also problems of mathematical biology. One of the most important question of the general theory of partial differential equations is the establishment of conditions for the correctness of boundary value problems. However, the investigation of problems with nonlocal conditions for partial differential equations in bounded domains connected with the problem of small denominators. This problem connected with the fact, that the denominators of coefficients of the series, which represented the solutions of nonlocal problems may be arbitrary small. Specific of the present work is the investigation of a nonlocal boundary-value problem for nonhomogeneous partial differential equation with the operator of the generalized differentiation $B = z\frac{\partial}{\partial z}$, which operate on functions of one scalar complex variable z. The considered problem in the case of many generalized differentiation operators is incorrect in Hadamard sense, and its solvability depends on the small denominators that arise in the constructing of a solution. In the case of one scalar complex variable we showed, that the problem is Hadamard correct. The conditions of correct solvability of the nonlocal boundary value problem in Sobolev spaces are established. The uniqueness theorem and existence theorem of the solution of problem in these spaces are proved.