Bukovinian Math. Journal. 2023, **11**, 2, 254–256 Буковинський матем. журнал 2023, Т.11, №2, 254–256

Скрипнік І. І., Зозуля Є. С.

ПОТОЧКОВІ ОЦІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ЗВАЖЕНОГО ПОРИСТОГО СЕРЕДОВИЩА ТА ШВИДКОЇ ДИФУЗІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ ВАГОВИХ ПОТЕНЦІАЛІВ РІССА

Узагальнюється представлення Пуассона на випадок рівняння пористого середовища з вагою

$$v\,(x)\,u_t - \operatorname{div}(w(x)u^{m-1}\nabla u) = f(x,t)\;,\; u \geqslant 0\;,\; m > 1$$

Вважаємо, що $f \in L^1(\Omega_T)$ та $v(x), w(x) \geqslant 0,\;\; v(x) \in A_\infty\;,\;\; w(x) \in A_2$, де $A_p\;,\; 1 < p < \infty$ означає клас Макенхаупта.

Ключові слова і фрази: вагове рівняння пористого середовища, потенціал Рісса, поточкові оцінки.

Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ, Україна (Скрипнік І. І.)
Донбаська державна машинобудівна академія, Краматорськ, Україна (Зозуля Є. С.)
e-mail: *ihor.skrypnik@gmail.com (Скрипнік І. І.), albelgen27@gmail.com (Зозуля Є. С.)*

Досліджуються розв'язки квазілінійного параболічного рівняння, з дивергентною формою головної частини

$$v\,(x)\,u_t - \operatorname{div}(w(x)u^{m-1}\nabla u) = f(x,t)\;,\; u \geq 0\;,\; m > 1 \tag{1}$$

у області $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$. Вважаємо, що $\Omega-$ обмежена область у R^n, $n \geq 2$, $0 < T < +\infty$.

Для функції $f(x,t)$ будемо вважати, що $f \in L^1(\Omega_T)$, а вагові коефіцієнти $v(x), w(x) \geq 0$ належать до відповідних класів $v(x) \in A_\infty \;\; w(x) \in A_2$. Припускаємо, що w належить до класу Макенхаупта $A_p\;,\; 1 < p < \infty\;$, якщо

$$sup\frac{w(B)}{|B|}\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\;dx\right)^{p-1} = K_{p,w} < +\infty\;,\; w(B) = \int_B w dx\;,$$

де супремум береться за всіма кулями $B \subset R^n$. Тут ми говоримо, що $v(x) \in A_\infty$, якщо існує $p_0 > 1$ таке, що $v(x) \in A_{p_0}$. Наступне наше припущення - це співвідношення між v та w. Фіксуємо $y \in \Omega$ та R так, що $B_{8R}(y) \subset \Omega$ і покладемо

$$\psi_y(r) := r^2\frac{v(B_r(y))}{w(B_r(y))},\;\;\; 0 < r \leq R.$$

УДК 517.956.4
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35B09, 35B40, 35K59.

Для формулювання наших результатів нам також потрібно означення вагового параболічного потенціалу Рісса. Для $(x_0,t_0)\in\Omega_T$ для будь-яких $\rho,\theta>0$ визначимо $Q_{\rho,\theta}(x_0,t_0):=B_\rho(x_0)\times(t_0-\theta,t_0)$, $Q_{R,\theta}(x_0,t_0)\Subset\Omega_T$. Встановлюємо

$$I_{v,w,f}(x_0,t_0,R,\theta):=\int_0^R\frac{1}{v(B_\rho(x_0))}\iint_{Q_{\rho,\theta\psi_{x_0}(\rho)}(x_0,t_0)}|f(x,t)|dxdt\frac{d\rho}{\rho} \tag{2}$$

У випадку, коли f залежить лише від просторової змінної та $\theta=1$ потенціал $I_{v,w,f}(x_0,R,1)$ зводиться до еліптичного вагового потенціалу Рісса

$$I_{w,f}(x_0,R):=\int_0^R\frac{\rho^2}{w(B_\rho(x_0))}\int_{B_\rho(x_0)}|f(x)|dx\frac{d\rho}{\rho}$$

що збігається з ваговим потенціалом Вольфа $W^f_{w,2}(x_0,R)$, де $W^f_{w,p}(x_0,R)=\int_0^R\left(\frac{\rho^p}{w(B_\rho(x_0))}\int_{B_\rho(x_0)}|f|dx\right)^{\frac{1}{p-1}}\frac{d\rho}{\rho}$ (детальніше [3]). Перш ніж сформулювати основні результати, введемо означення узагальненого розв'язку рівняння (1).

Означення. *Нехай* $m^-=min(1,m)$, $m^+=max(1,m)$. *Тоді говоримо, що* u *є невід'ємний узагальнений розв'язок рівняння* (1), *якщо* $0\le u\in C_{loc}(0,T;L^{1+m^-}_{loc}(\Omega,v))$ *та* $u^{\frac{m+m^-}{2}-1}|\nabla u|\in L^2_{loc}(0,T;W^{1,2}_{loc}(\Omega,v,w))$ *і для кожної компактної множини* $E\subset\Omega$ *та для кожного підінтервалу* $(t_1,t_2)\subset(0,T)$ *наступна тотожність*

$$\int\limits_E vu\varphi dx\Big|_{t_1}^{t_2}+\int\limits_{t_2}^{t_1}\int\limits_E\left(-vu\varphi_t+A(x,t,u,\nabla u)\nabla\varphi\right)dxdt=\int\limits_{t_2}^{t_1}\int\limits_E f\varphi dxdt \tag{3}$$

слушна для будь-якої тестової функції $\varphi\in L^2(0,T;W^{1,2}_0(E,v,w))$, $\varphi,\varphi_t\in L^\infty(E\times(0,T))$.

Наш основний результат формулюється наступним чином.

Теорема. *Нехай* u *- невід'ємний узагальнений розв'язок рівняння* (1) *та нехай* $m>1$. *Тоді існують додатні константи* $\lambda_0\in(0,1)$, c_1, *залежні лише від даних, такі, що для всіх* $\lambda\in(0,\lambda_0)$, *майже для всіх* $(x_0,t_0)\in\Omega_T$ *і будь-якого циліндра* $Q_{R,\theta}(x_0,t_0)\subset\Omega_T$ *наступна нерівність має місце*

$$\begin{aligned}u(x_0,t_0)\le{}& c_1\left(\frac{1}{v(B_R(x_0))\psi_{x_0}(R)}\iint\limits_{Q_{R,\theta}(x_0,t_0)}vu^{m+\lambda}dxdt\right)^{\frac{1}{1+\lambda}}+\\&+c_1\left(\frac{1}{w(B_R(x_0))\psi_{x_0}(R)}\iint\limits_{Q_{R,\theta}(x_0,t_0)}wu^{m+\lambda}dxdt\right)^{\frac{1}{1+\lambda}}+\\&+c_1\left(\frac{\psi_{x_0}(R)}{\theta}\right)^{\frac{1}{m-1}}+c_1I_{v,w,f}\left(x_0,t_0,c_1R,\frac{\theta}{\psi_{x_0}(R)}\right).\end{aligned} \tag{4}$$

Доведення Теореми (приведене у [5]) ґрунтується на відповідних модифікаціях ітераційної техніки Де Джорджі [1], метода внутрішнього масштабування (intrinsic scaling) Ді Бенедетто [2], після адаптації техніки Кілпелайнен - Мали [3] до параболічних рівнянь, сумісно з ідеями [4].

Список літератури

[1] De Giorgi E., Sulla differenziabilita e l'analiticita delle estremali degli integrali multipli regolary. Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 1957, 3, P. 25-43.

[2] Di Benedetto E., Gianazza U., Vespri V., Harnack inecuality for degenerate and singular parabolic equations. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2012. xiv+278pp. ISBN: 978-1-4614-1583-1.

[3] Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O., Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations, in: Oxford Matematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993. Oxford Science Publications.

[4] Liskevich V., Skrypnik I. I., Pointwise estimates for solutions to the porous medium equation with measure as a forsing term, Israel J. Math. 2013, 194, P. 259-275.

[5] Zozulia Y. (*Presented by I. I. Skrypnik*), Pointwise estimates of solutions to weighted porous medium and fast diffusion equations via weighted Riesz potentials, Journal of Mathematical Sciences, 2020, V. 248(2), P. 233 - 254.

Надійшло 14.11.2023

Skrypnik I.I., Zozulia Y.S. *Pointwise estimates of solutions to weighted porous medium and fast diffusion equations via weighted Riesz potentials*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 2 (2023), 254–256.

Problems related to the study of the properties of solutions of partial differential equations have attracted the attention of many authors in recent decades. The main qualitative properties of solutions of homogeneous linear elliptic equations of the second-order divergent type with measurable coefficients without lower-order terms are already known from the results of De Giorgi, Nash, and Moser. These results are generalized by Serrin, Ladyzhenska and Uraltseva, Aronson and Serrin, and Trudinger for wide classes of elliptic and parabolic equations with lower-order terms from the corresponding L^q-classes. Analogous results for evolution equations with $p-$Laplacian appeared much later.

The first significant transition to the $p-$Laplace equation with the measure μ in the right-hand side was achieved by Kilpelainen and Maly. They established point estimates of the solutions in terms of the nonlinear Wolff potential. These results were later extended by Trudinger and Wang and Laboutin to nonlinear and subelliptic quasilinear equations. Irregularly elliptic and inhomogeneous parabolic equations without/or with singular lower terms have been studied for a long time. The first results in this direction were obtained by Fabes, Kenig and Separioni and Gutierrez for a weighted linear elliptic equation with weight representing A_2 of the Mackenhaupt class.

In recent decades, there has been a growing interest in parabolic and elliptic equations due to their application in modeling nonlinear physical processes occurring in heterogeneous media. Also, these equations are interesting because a general qualitative theory has not been constructed for them. Among the researchers who obtained the first significant results, we note Di Benedetto E., Bogelein V., Ivanov A. V., Duzaar F., Gianazza U., Vespri V..