Bukovinian Math. Journal. 2023, **11**, 2, 141–152 Буковинський матем. журнал 2023, Т.11, №2, 141–152

Лахва Р.С.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ СИСТЕМ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НА ПІВОСІ

Стаття присвячена вивченню задачі оптимального керування для системи інтегро-диференціальних рівнянь на півосі. В термінах правих частин і функції із критерія якості отримані достатні умови існування оптимальних керувань та оптимальних траєкторій.

Доведення існування базується на підході компактності із виділенням мінімізуючої послідовності із подільшим граничним переходом у рівнянні та критерії якості.

Ключові слова і фрази: задача оптимального керування, інтегро-диференціальна система, компактність, слабка збіжність, критерій якості, граничний перехід.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
e-mail: *roksolanalakhva@knu.ua (Лахва Р.С.)*

Вступ

Системи інтегро-диференціальних рівнянь є математичними моделями багатьох процесів природознавства: кінетичне рівняння Больцмана [1], [2], [3]. У багатьох із них присутнє керувння, що повинне мінімізувати певні функціонали, пов'язані із динамікою даних процесів.

Саме отриманню достатніх умов оптимальності для систем інтегро-диференціальних на півосі є присвячена дана робота. При цьому достатні умови дані у термінах правих частин системи та критерія якості, що робить їх зручним для перевірки.

Складність досліджень полягає у наступну: по-перше дана задача є задачею оптимального керування з нескінченним горизонтом, що унеможливлює пряме застосування критерія компактності типу теореми Арцелла-Асколлі. По-друге, задача розглядається до моменту τ виходу розв'язку на межу області. При цьому даний момент виходу сам залежить від керування $\tau = \tau(u)$. Тому, фактично розв'язком задачі є трійка (u^*, x^*, τ^*) - оптимальне керування, оптимальна траєкторія та оптимальний момент виходу. Зазначимо, що частинним випадком задачі є задача оптимальної швидкодії.

Основна ідея доведення існування оптимального розв'язку задачі базується на підході компактності та полягає у наступному:

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35k20, 35J25.

© Лахва Р.С., 2023

1) виділяється слабко збіжний мінімізант;

2) виділяється сильно збіжна підпослідовність відповідних траєкторій;

3) обгрунтовуються граничні переходи у рівнянні та критерії якості.

Для системи звичайних диференціальних рівнянь подібні задачі вивчались в роботах [4], для стохастичних у [5], для систем функціонально-диференціальних ріівнянь в [6], для імпульсивних систем в [7]. Робота складається зі вступу та двох частин. У вступі проведено огляд літератури за даною тематикою у загальних рисах описана сама задача. У першій частині дана строга постановка задачі та сформульовано основний результат. Доведенню основної теореми присвячено другу частину.

1 Постановка задачі та формулювання основного результату

Розглянемо задачу оптимального керування системою інтегро-диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t,x) + f_2(t,x)u(t) + \int\limits_0^t f_3(t,s,x)u(s)ds, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

з критерієм якості

$$J(u) = \int\limits_0^\tau e^{-\gamma t} L(t, x(t), u(t))dt \to \inf, \tag{2}$$

де $x_0 \in D$ - фіксований вектор, $t \in [0,\infty)$, $x \in D$ - фазовий вектор, D - деяка обмежена область в $\mathbb{R}^d$, ∂D - межа D, τ - момент виходу розв'язку $x(t)$ на ∂D, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ - вектор керування, U - опукла, замкнена множина в $\mathbb{R}^m$ і $0 \in U$.

Нехай виконуються наступні умови:

A) вектор-функція $f_1(t,x) : [0,\infty) \times D \to \mathbb{R}^d$, матриця $f_2(t,x) : [0,\infty) \times D \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ і матриця $f_3(t,s,x) : [0,\infty) \times [0,\infty) \times D \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ - неперервні за сукупністю змінних.

B) для функцій $f_1(t,x), f_2(t,x), f_3(t,s,x)$ виконується умова Ліпшиця, тобто існує така константа $H > 0$, що для будь-яких $x_1, x_2 \in D, t \geq 0$ та $u \in U$ виконуються нерівності:

$$\begin{aligned} |f_1(t,x_1) - f_1(t,x_2)| &\leq H|x_1 - x_2|, \\ \|f_2(t,x_1) - f_2(t,x_2)\| &\leq H|x_1 - x_2|, \\ \|f_3(t,s,x_1) - f_3(t,s,x_2)\| &\leq H|x_1 - x_2|, \end{aligned} \tag{3}$$

Функції $L(t,x,u), L_x(t,x,u)$ і $L_u(t,x,u)$ є неперервними за сукупністю змінних для будь-яких $t \in [0,\infty), x \in D, u \in U$ і задовольняють наступні умови:

1) $L(t,x,u) \geq 0$ для $t \in [0,\infty)$, $x \in D$, та $u \in U$;

2) існують такі константи $C > 0$ та $p \geq 2$, що для будь-яких $t \in [0, \infty), x \in D, u \in U$ виконується нерівність

$$L(t, x, u) \leq C(1 + |u|^p); \tag{4}$$

3) існує таке $K > 0$, що для будь-яких $t \in [0, \infty), x \in D, u \in U$ виконується

$$|L_x(t, x, u)| + |L_u(t, x, u)| \leq K(1 + |u|^{p-1}); \tag{5}$$

4) $L(t, x, u)$ опукла по u для будь-яких фіксованих $t \in [0, \infty), x \in D$

Керування $u(t)$ вважаємо допустимим, якщо:

a1) $u(t) \in L_p([0, \infty])$;

a2) $u(t) \in U$, при $t \in [0, \infty]$;

a3) існує така стала $C_1 > 0$, яка не залежить від $u(t)$ з виконанням умови

$$\int_0^\infty |u(t)|^p dt \leq C_1;$$

a4) $|J(u)| < \infty$.

Множину допустимих керувань будемо називати допустимою для задачі (1),(2) позначатимемо її через V.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай для системи (1) з критерієм якості (2) виконуються умови A), B) та 1)-3). Тоді задача (1), (2) має розв'язок в класі допустимих керувань V, тобто існує оптимальне керування $u^*(t)$, що мінімізує критерій якості (2).*

2 Доведення основного результату

Доведемо Теорему 1 сформульовану в першому розділі.

Доведення. Оскільки критерій якості невід'ємна величина, то існує невід'ємна нижня грань m значень $J(u)$, а отже, й послідовність допустимих керувань $\{u_n(t), n \geq 1\}$ таких, що $J(u_n) \to m$ при $n \to \infty$ монотонно. Тобто,

$$J(u_n) = \int_0^{\tau_n} e^{-\gamma t} L(t, x_n(t), u_n(t)) dt \to m, \quad n \to \infty$$

де $x_n(t)$ - розв'язки системи (1), що відповідають керуванням $u_n(t)$, а τ_n - момент виходу розв'язку $x_n(t)$ на границю D.

Множина U допустимих керувань непорожня, оскільки $0 \in U$ та $J[0] < \infty$.

Умова a3) гарантує слабку компактність послідовності $u_n(t)$. Тобто послідовності $u_n(t)$ слабко збігається до границі $u^*(t) \in L_p([0,\infty))$. Тоді за лемою Мазура знайдеться опукла комбінація $b_k(t) = \sum\limits_{i=1}^{n(k)} \alpha_i(k) u_i(t)$ елементів $u_i(t) \in U(\alpha_i \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{n(k)} \alpha_i = 1)$, що в L_p маємо $b_k \to u^*, k \to \infty$.

Отже, існує майже всюди збіжна на $[0,\infty)$ за мірою Лебега підпослідовність b_{k_l}, що $b_{k_l}(t) \to u^*(t), l \to \infty$ для майже всіх t. Оскільки U опукла та замкнена множина, то $\sum\limits_{i=1}^{n(k)} \alpha_i u_i(t) \in U$ майже для всіх t.

Для розв'язків $x_n(t)$, маємо інтегральне представлення:

$$x_n(t) = x_0 + \int\limits_0^t [f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t)) u_n(t) + \int\limits_0^s f_3(s, \sigma, x_n(s)) u(\sigma) d\sigma] dt.$$

За функціями x_n побудуємо функції $y_n(t)$, що будуть визначатися на всю піввісь $[0,\infty)$ наступним чином

$$y_n(t) = \begin{cases} x_n(t), t \in [0, \tau_n), \\ x_n(\tau_n), t \geq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Виберемо довільний момент часу $T \in [0,\infty)$ і зафіксуємо його. Оскільки D - обмежена, то існує $A > 0$, що при $t \geq 0$ виконується нерівність

$$|y_n(t)| \leq A. \tag{7}$$

Покажемо, що сім'я функцій $y_n(t)$ компактна на $[0,T]$. Для цього в силу (7) достатньо довести їх рівностепеневу неперервність. З нерівності Гельдера та умови A) для будь-яких $s_1, s_2 \in [0, \tau_n]$ таких, що $s_1 < s_2$ маємо:

$|y_n(s_1) - y_n(s_2)| = |x_n(s_1) - x_n(s_2)| = |\int\limits_{s_1}^{s_2} (f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t)) u_n(t) +$

$+ \int\limits_0^t f_3(t, s, x_n(t)) u_n(s) ds) dt| \leq M(s_2 - s_1) + M(s_2 - s_1)^{1/q} (\int\limits_0^T |u_n(t)|^p dt)^{1/p} +$

$+ M(s_2 - s_1) T (\int\limits_0^T |u_n(t)|^p dt)^{1/p}$, де $1/p + 1/q = 1$,

$$M = \max\{\sup_{x \in D, t \in [0,T]} |f_1(t,x)|, \sup_{x \in D, t \in [0,T]} \|f_2(t,x)\|, \sup_{x \in D, t \in [0,T]} \|f_3(t,s,x)\|\}$$

Якщо $s_1 < \tau_n < s_2 < T$, тоді аналогічно попередньому випадку, маємо:

$|y_n(s_1) - y_n(s_2)| = |x_n(s_1) - x_n(\tau_n)| = \int\limits_{s_1}^{\tau_n} |f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t)) u_n(t) +$

$+ \int\limits_0^t f_3(t, s, x_n(t)) u_n(s) ds) dt| \leq M(\tau_n - s_1) + M(\int\limits_{s_1}^{\tau_n} |u_n(t) dt|) + M(\tau_n - s_1) T (\int\limits_0^T |u_n(t)|^p dt)^{1/p} \leq$

$\leq M(s_2 - s_1) + M(s_2 - s_1)^{1/q} \|u_n\|_p + M(s_2 - s_1) T \|u_n\|_p$.

Якщо $\tau_n < s_1 < s_2 < T$, то

$$|y_n(s_1) - y_n(s_2)| = |x_n(\tau_n) - x_n(\tau_n)|.$$

Таким чином, встановлена рівностепенева неперервність функцій $y_n(t)$ при $t \in [0, T]$. Отже, можна виділити підпослідовність послідовності $\{y_n^k(t), n \geq 1\}$ таку, що $y_n(t) \to y^*(t)$, $n \to \infty$ рівномірно на відрізку $[0, T]$.

Покажемо, що існує підпослідовність функцій $y_n^n(t)$ яка збігається поточково до функцій $y^*(t)$ для будь-якого $t \in [0, \infty)$.

Для $T = 1$ існує підпослідовність $\{y_n^1(t), n \geq 1\}$ послідовності $\{y_n(t), n \geq 1\}$ така, що

$$y_n^1 \rightrightarrows y_1^*(t), \text{ для будь-якого } t \in [0; 1]$$

Для $T = 2$ існує підпослідовність $\{y_n^2(t), n \geq 1\}$ послідовності $\{y_n^1(t), n \geq 1\}$ така, що

$$y_n^2 \rightrightarrows y_2^*(t), \text{ для будь-якого } t \in [0; 2],$$

де $y_2^*(t) = y_1^*(t)$, при $t \in [0; 1]$.

Для $T = 3$ існує підпослідовність $\{y_n^3(t), n \geq 1\}$ послідовності $\{y_n^2(t), n \geq 1\}$ така, що

$$y_n^3 \rightrightarrows y_3^*(t), \text{ для будь-якого } t \in [0; 3],$$

де $y_3^*(t) = y_2^*(t)$, при $t \in [0; 2]$.

...

Для будь-якого натурального N існує підпослідовність $\{y_n^N(t), n \geq 1\}$ послідовності $\{y_n^{N-1}(t), n \geq 1\}$ така, що

$$y_n^N \rightrightarrows y_N^*(t), \text{ для будь-якого } t \in [0; N],$$

де $y_N^*(t) = y_{N-1}^*(t)$, при $t \in [0; N-1]$.

Застосовуючи діагональний метод із даних послідовностей виділимо наступну підпослідовність $\{y_n^n(t), n \geq 1\}$

$$y_1^1(t), y_2^2(t), y_3^3(t), ..., y_n^n(t), ...$$

Дана послідовність поточково збігається до неперервної функції $y^*(t)$ для будь-якого $t \in [0; \infty)$.

Надалі для зручності будемо позначимо послідовності як $\{y_n(t), n \geq 1\}$, а відповідну послідовність керувань як $\{u_n(t), n \geq 1\}$.

Позначимо через τ^* момент першого виходу $y^*(t)$ на границю ∂D, тобто

$$\tau^* = \begin{cases} inf\{t \geq 0 : y^*(t) \in \partial D\}, & \\ \infty, & \text{якщо } y^*(t) \in D, \forall t \geq 0; \end{cases}$$

$$\tau_n = \begin{cases} inf\{t \geq 0 : y_n(t) \in \partial D\}, & \\ \infty, & \text{якщо } y_n(t) \in D, \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Покажемо, що $\tau^* \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf \tau_n$. Припустимо, що це не так. Тоді

$$\tau^* > \lim_{n\to\infty} \inf \tau_n = \tau.$$

Розглянемо два випадки:

1) Нехай $\tau^* < \infty$. Виберемо довільне $T_1 \in [0, \infty)$ таке, що $T_1 \geq \tau^*$. На проміжку $[0, T_1], y_n(t) \to y^*(t)$, $n \to \infty$.

За теоремою про характеризацію нижньої границі для довільного $\delta > 0$ множина $\{n \in \mathbb{N} | \tau_n < \tau + \delta\}$ є нескінченною. Виберемо δ таким чином, щоб $\tau + \delta < \tau^*$. Тоді існує така підпослідовність $\{\tau_{n_k}, n_k \geq 1\}$ послідовності $\{\tau_n, n \geq 1\}$, що $\tau_{n_k} < \tau + \delta$.

Виберемо момент t_0 такий, що $t_0 \in (\tau + \delta, \tau^*)$, тоді $y_{n_k}(t_0) = x_{n_k}(\tau_{n_k}) \in \partial D$.

Із рівномірної збіжності $y_n(t)$ до $y^*(t)$ на $[0, T_1]$ маємо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $N \in \mathbb{N}$, що для будь-яких $n_k \geq N$ виконується наступна нерівність:

$$|y^*(t) - y_{n_k}(t)| < \varepsilon.$$

Проте, якщо вибрати ε так, щоб $0 < \varepsilon < \inf\limits_{\upsilon \in \partial D} |y^*(t_0) - \upsilon|$, тоді для фіксованого $t_0 \in (\tau + \delta, \tau^*)$

$$|y^*(t_0) - y_{n_k}(t)| = |y^*(t_0) - x_{n_k}(\tau_{n_k})| > \varepsilon$$

Ми отримали протиріччя.

2) Нехай $\tau^* = \infty$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \inf \tau_n < \infty$. Виберемо довільне $T_2 \in [0, \infty)$ таке, що $T_2 > \lim\limits_{n\to\infty} \inf \tau_n$. Повторюючи роздуми попереднього випадку отримаємо протиріччя з рівномірною збіжністю $y_n(t) \to y^*(t)$ при $n \to \infty$ на $[0, T_2]$.

Отже,

$$\tau^* \leq \lim_{n\to\infty} \inf \tau_n$$

Покладемо $x^*(t) = y^*(t)$, при $t \in [0, \tau^*]$, у випадку скінченного τ^* і $x^*(t) = y^*(t)$, при $t \in [0, \infty)$ у випадку $\tau^* = \infty$.

Покажемо, що $x^*(t)$ є розв'язком системи (1), при всіх t до моменту його виходу на границю області, що відповідає керуванню $u^*(t)$.

Візьмемо довільне $t \in [0, \tau^*]$, у випадку $\tau^* < \infty$ і $t \in [0, \infty)$ при $\tau^* = \infty$. Виберемо достатньо велике $T \geq 0$, що для будь-якого такого t, $y_n(t) = x_n(t)$ для досить великих n. Оскільки $y_n(t) \to y^*(t)$, при $n \to \infty$ рівномірно на $[0, T]$, то і $x_n(t) \to x^*(t)$ при $n \to \infty$ рівномірно по $t \in [0, \tau_1^*]$, де

$$\tau_1^* = \begin{cases} inf\{t \in [0, T] : x^*(t) \in \partial D\}, \\ T, \text{ якщо } x^*(t) \in D \setminus \partial D, \forall t \geq 0; \end{cases}$$

Оскільки $x_n(t)$ - розв'язок системи (1), то маємо

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t (f_1(s, x_n(s)) + f_2(s, x_n(s))u_n(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x_n(s))u_n(\sigma)d\sigma)ds =$$

$$= x_0 + \int_0^t (f_1(s, x_n(s)) + f_2(s, x_n(s))u_n(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x_n(s))u_n(\sigma)d\sigma)ds + \int_0^t f_2(s, x_n(s))u^*(s)ds -$$

$$- \int_0^t f_2(s, x^*(s))u_n(s)ds + \int_0^t f_2(s, x^*(s))u_n(s)ds + \int_0^t f_2(s, x^*(s))u_n(s)ds - \int_0^t f_2(s, x^*(s))u_n(s)ds +$$

$$+ \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x_n(s))u^*(\sigma)d\sigma ds - \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x_n(s))u^*(\sigma)d\sigma ds + \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u_n(\sigma)d\sigma ds -$$

$$- \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u_n(\sigma)d\sigma ds + \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma)d\sigma ds - \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma)d\sigma ds =$$

$$= x_0 + \int\limits_0^t (f_1(s,x_n(s)) + f_2(s,x_n(s))u^*(s) + \int\limits_0^s f_3(s,\sigma,x_n(s))u^*(\sigma)d\sigma)ds + \int\limits_0^t (f_2(s,x_n(s)) -$$

$$-f_2(s,x^*(s)))(u_n(s)-u^*(s))ds + \int\limits_0^t\int\limits_0^s (f_3(s,\sigma,x_n(s) - f_3(s,\sigma,x^*(s)))(u_n(\sigma)-u^*(\sigma))d\sigma ds +$$

$$+\int\limits_0^t f_2(s,x^*(s))(u_n(s)-u^*(s))ds + \int\limits_0^t\int\limits_0^s (f_3(s,\sigma,x^*(s))(u_n(\sigma)-u^*(\sigma))d\sigma ds.$$

Покажемо, що другий доданок в останній рівності прямує до нуля при $n\to\infty$ із застосуванням нерівності Гельдера та нерівностей (3), матимемо оцінку

$$|\int\limits_0^t (f_2(s,x_n(s)) - f_2(s,x^*(s)))(u_n(s)-u^*(s))ds \le$$

$$\le (\int\limits_0^t |f_2(s,x_n(s)) - f_2(s,x^*(s))|^q ds)^{\frac{1}{q}} (\int\limits_0^t |u_n(s)-u^*(s)|^p ds)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le (\int\limits_0^t [H|x_n(s)-x^*(s)|]^q ds)^{1/q} \|u_n(t)-u^*(t)\|_p \to 0, n\to\infty, \text{ при } t\in[0,\tau_1^*],$$

в силу теореми Лебега (оскільки $x_n(t)\to x^*(t)$ при $n\to\infty$ рівномірно по $t\in[0,\tau_1^*]$ і $[H|x_n(t)-x^*(t)|]^q \le [H(|x_n(t)|+|x^*(t)|)]^q < \infty$ є інтегровною на $t\in[0,\tau_1^*]$).

Аналогічні міркування проведемо і для третього інтеграла, матимемо

$$|\int\limits_0^t\int\limits_0^s (f_3(s,\sigma,x_n(s)) - f_3(s,\sigma,x^*(s)))(u_n(\sigma)-u^*(\sigma))d\sigma ds| \le$$

$$\le (\int\limits_0^t\int\limits_0^s |f_3(s,\sigma,x_n(s)) - f_3(s,\sigma,x^*(s))|^q) d\sigma ds)^{\frac{1}{q}} (\int\limits_0^t\int\limits_0^s |u_n(\sigma)-u^*(\sigma)|^p d\sigma ds)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \|u_n(t)-u^*(t)\|_p (\int\limits_0^t\int\limits_0^s |f_3(s,\sigma,x_n(s)) - f_3(s,\sigma,x^*(s))|^q)^{1/q} d\sigma ds \le$$

$$(\int\limits_0^t\int\limits_0^s [H|x_n(s)-x^*(s)|]^q d\sigma ds \|u_n(t)-u^*(t)\|_p \to 0, n\to\infty \text{ при } t\in[0,\tau_1^*],$$

в силу теореми Лебега (оскільки $x_n(t)\to x^*(t)$ при $n\to\infty$ рівномірно по $t\in[0,\tau_1^*]$ і $[H|x_n(t)-x^*(t)|]^q \le [H(|x_n(t)|+|x^*(t)|)]^q < \infty$ є інтегровною на $t\in[0,\tau_1^*]$).

Четвертий інтеграл $\int\limits_0^t f_2(s,x^*(s))(u_n(s)-u^*(s))ds$ прямує до нуля в силу слабкої збіжності $u_n(t)$ до $u^*(t)$, при $n\to\infty$.

Прямування останнього інтегралу до нуля випливає з теореми Лебега про мажоровану збіжність і з використанням означення слабкої збіжності $u_n(t)$ до $u^*(t)$, при $n\to\infty$.

Аналогічними міркуваннями отримуємо, що в силу теореми Лебега перший інтеграл прямує до виразу

$$\int\limits_0^t (f_1(s,x^*(s)) + f_2(s,x^*(s))u^*(s) + \int\limits_0^s f_3(s,\sigma,x^*(s))u^*(\sigma)d\sigma)ds,$$

при $n\to\infty$.

Отже, граничним переходом при $n \to \infty$ отримуємо

$$x^*(t) = x_0 + \int\limits_0^t (f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s) + \int\limits_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma)d\sigma)ds, \qquad (8)$$

для будь-якого $t \in [0, \tau_1^*]$.

Звідси отримаємо, що $x^*(t)$ - розв'язок системи (1), що відповідає керуванню $u^*(t)$ при $t \in [0, \tau_1^*]$.

Оскільки момент часу T вибраний довільним чином, то маємо, що $x^*(t)$ є розв'язком системи (1), що відповідає керуванню $u^*(t)$, при $t \geq 0$, до моменту виходу розв'язку на границю області.

Так як до цього моменту $x_n(t)$ співпадають з $y_n(t)$, то послідовності $\{x_n(t), n \geq 1\}$ збігається поточково до $x^*(t)$ для будь-якого $t \in [0, \tau_1^*]$.

Залишилось довести, що керування $u^*(t)$ є оптимальним.

Розглянемо два випадки:

2) Нехай $x^*(\tau^*) \in \partial D$.

Оскільки $L(t, x, \cdot)$- опукла, то виконується нерівність

$$e^{-\gamma t}(L(t, x^*(t), \upsilon(t)) \geq (e^{-\gamma t}(L(t, x^*(t), u^*(t)) + (\upsilon(t) - u^*(t)) * e^{-\gamma t}(L_\upsilon(t, x^*(t), u^*(t)),$$

$\upsilon \in U, t \in [0, \tau^*]$.

Покладемо $\upsilon = u_n(t)$, тоді маємо оцінку

$$\int\limits_0^{\tau^*} e^{-\gamma t}(L(t, x^*(t), u_n(t))dt \geq \int\limits_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} L(t, x^*(t), u^*(t))dt + \\ + \int\limits_0^{\tau^*} (u_n(t) - u^*(t)) * e^{-\gamma t} L_u(t, x^*(t), u^*(t))dt. \qquad (9)$$

Розглянемо окремо другий інтеграл. Застосовуючи нерівності (5) та Гельдера маємо

$$|\int\limits_0^{\tau^*}(u_n(t) - u^*(t)) * e^{-\gamma t} L_u(t, x^*(t), u^*(t))dt| \leq K \int\limits_0^{\tau^*} |u_n(t) - u^*(t)| * e^{-\gamma t}(1 + |u^*(t)|^{p-1})dt \leq$$
$$K \int\limits_0^{\tau^*} |u_n(t) - u^*(t)| * e^{-\gamma t} dt + K \int\limits_0^{\tau^*} |u_n(t) - u^*(t)| * e^{-\gamma t} |u^*(t)|^{p-1} \leq$$
$$K(\int\limits_0^{\tau^*} |u_n(t) - u^*(t)|^p dt)^{1/p} (\int\limits_0^{\tau^*} (e^{-\gamma t})^q dt)^{1/q} + K(\int\limits_0^{\tau^*} |u_n(t) - u^*(t)|^p dt)^{1/p} (\int\limits_0^{\tau^*} |u^*(t)|^{(p-1)q} dt)^{1/q} =$$
$$K\|u_n(t) - u^*(t)\|_p * ((\int\limits_0^{\tau^*} e^{-\gamma t})^q dt)^{1/q} + \|u^*(t)\|_p^{p-1}) \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Отже, переходячи до нижньої границі в (7) отримаємо

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} L(t, x^*(t), u_n(t))dt \geq \int\limits_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} L(t, x^*(t), u^*(t))dt \qquad (10)$$

Розглянемо також вираз

$$|\int\limits_0^{\tau^*} e^{-\gamma t}[L(t,x_n(t),u_n(t))-L(t,x^*(t),u_n(t))]dt| = |\int\limits_0^{\tau^*} e^{-\gamma t}\int\limits_0^1 L_x(t,(1-\lambda)x_n(t)+$$

$$\lambda x^*(t),u_n(t))|x_n(t)-x^*(t)|d\lambda dt \le |\int\limits_0^{\tau^*} e^{-\gamma t}K(1+|u_n(t)|^{p-1})|x_n(t)-x^*(t)|dt \le$$

$$K(\int\limits_0^{\tau^*} e^{-\gamma t}|x_n(t)-x^*(t)|dt + \int\limits_0^{\tau^*} e^{-\gamma t}|u_n(t)|^{p-1}|x_n(t)-x^*(t)|dt) \le$$

$$K(\int\limits_0^{\tau^*} e^{-\gamma t}|x_n(t)-x^*(t)|dt + (\int\limits_0^{\tau^*}|u_n(t)|^p dt)^{1/q}(\int\limits_0^{\tau^*}(e^{-\gamma t})^p|x_n(t)-x^*(t)|^p dt)^{1/p}).$$

Із поточкової збіжності $x_n(t)$ до $x^*(t)$, при $t \ge 0$ та теореми Лебега про мажоровану збіжність маємо, що дана величина прямує до 0, при $n \to \infty$. Розглянемо наступну величину

$$\int\limits_0^{\tau^*} e^{-\gamma t}L(t,x_n(t),u_n(t))dt + \int\limits_0^{\tau^*} e^{-\gamma t}L(t,x^*(t),u_{n_k}(t))dt - \int\limits_0^{\tau^*} e^{-\gamma t}L(t,x^*(t),u_{n_k}(t))dt +$$

$$\int\limits_0^{\tau^*} e^{-\gamma t}L(t,x^*(t),u^*(t))dt - \int\limits_0^{\tau^*} e^{-\gamma t}L(t,x^*(t),u^*(t))dt = \int\limits_0^{\tau^*} e^{-\gamma t}[L(t,x_n(t),u_n(t))-$$

$$L(t,x^*(t),u_n(t))]dt + \int\limits_0^{\tau^*} e^{-\gamma t}[L(t,x^*(t),u_n(t))-L(t,x^*(t),u^*(t))]dt + \int\limits_0^{\tau^*} e^{-\gamma t}[L(t,x^*(t),u^*(t))dt$$

Перший інтеграл в правій частині нерівності прямує до 0 при $n \to \infty$, а другий інтеграл більший чи рівний (10), отже маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{\tau^*} e^{-\gamma t}L(t,x_n(t),u_n(t))dt \ge \int\limits_0^{\tau^*} e^{-\gamma t}L(t,x^*(t),u^*(t))dt$$

Або

$$J(u^*) \le \lim_{n\to\infty}\inf\int\limits_0^{\tau^*} e^{-\gamma t}L(t,x_n(t),u_n(t))dt \le \lim_{n\to\infty} J(u_n(t)).$$

Оскільки

$$\inf_{u\in U} J(u) \le J(u^*) \le \lim_{n\to\infty}\inf J(u_n) = m,$$

то

$$J(u^*) = m.$$

Отже, $u^*(t)$ - оптимальне керування.

2) Нехай тепер $\tau^* = \infty$ і $x^*(t) \in D \setminus \partial D, t \ge 0$.

Спочатку покажемо, що функція $e^{-\gamma t}L(t,x^*(t),u_n(t))$ інтегровна на $[0,\infty)$

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma t}|L(t,x^*(t),u_n(t))|dt \le \int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma t}|(L(t,x^*(t),u_n(t))-L(t,x^*(t),0)|dt +$$

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma t}|L(t,x^*(t),0)|dt \le \int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma t}\int\limits_0^1 L_u(t,x^*(t),\lambda u_n(t))|u_n(t)|d\lambda dt + C\int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma t}(1+|u_n(t)|^p)dt \le$$

$$K\int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma t}(1+|u_n(t)|^{p-1})|u_n(t)|dt + C\int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma t}dt \le K\int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma t}|u_n(t)|dt + K\int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma t}|u_n(t)|^p dt +$$

$$C\int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma t}dt \le K(\int\limits_0^{\infty}(e^{-\gamma t})^q dt)^{1/q}(\int\limits_0^{\infty}|u_n(t)|^p dt)^1/p + K\int\limits_0^{\infty}|u_n(t)|^p dt + C\int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma t}dt < \infty$$

Отже, функція $L(t,x^*(t),u_n(t))$ - інтегровна на $[0,\infty)$

Оскільки $L(t,x,\cdot)$ - опукла, то виконується нерівність

$$e^{-\gamma t}L(t,x^*(t),\upsilon(t)) \geq e^{-\gamma t}L(t,x^*(t),u^*(t)) + (\upsilon(t)-u^*(t))e^{-\gamma t}L_\upsilon(t,x^*(t),u^*(t)),$$

$\upsilon(t)\in V, t\in[0,\infty)$

Покладемо $\upsilon(t)=u_n(t)$, тоді

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t}L(t,x^*(t),u_n(t))dt \geq \int_0^\infty e^{-\gamma t}L(t,x^*(t),u^*(t))dt + \\ + \int_0^\infty (u_n(t)-u^*(t))e^{-\gamma t}L_u(t,x^*(t),u^*(t))dt \quad (11)$$

Оскільки

$$(\int_0^\infty (e^{-\gamma t})^q L_u^q(t,x^*(t),u^*(t))dt)^{1/q} \leq (K^q\int_0^\infty (e^{-\gamma t})^q(1+|u^*(t)|^{p-1})^q dt)^{1/q} \leq \\ 2^{q-1}K(\int_0^\infty (e^{-\gamma t})^q dt + \int_0^\infty |u^*(t)|^p dt)^{1/q} < \infty,$$

то другий інтеграл в нерівності (11) прямує до 0, при $n\to\infty$, в силу слабкої збіжності $u_{n_k}(t)$ до $u^*(t)$. Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty *} e^{-\gamma t}L(t,x^*(t),u_{n_k}(t))dt \geq \int_0^\infty e^{-\gamma t}L(t,x^*(t),u^*(t))dt \quad (12)$$

Розглянемо також величину

$$|\int_0^\infty e^{-\gamma t}[L(t,x_n(t),u_n(t)) - L(t,x^*(t),u_n(t))]dt| = \int_0^\infty e^{-\gamma t}\int_0^1 L_x(t,(1-\lambda)x_n(t)+$$

$$+\lambda x^*(t),u_n(t))|x_n(t)-x^*(t)|d\lambda dt \leq |\int_0^\infty e^{-\gamma t}K(1+|u_n(t)|^{p-1})|x_n(t)-x^*(t)|dt \leq$$

$$\leq K(\int_0^\infty e^{-\gamma t}|x_n(t)-x^*(t)|dt + \int_0^\infty e^{-\gamma t}|u_n(t)|^{p-1}|x_n(t)-x^*(t)|dt) \leq \quad (13)$$

$$\leq K(\int_0^\infty e^{-\gamma t}|x_n(t)-x^*(t)|dt + (\int_0^\infty |u_n(t)|^p dt)^{1/q}(\int_0^\infty (e^{-\gamma t})^p|x_n(t)-x^*(t)|^p dt)^{1/p}).$$

Із поточкової збіжності $x_n(t)$ до $x^*(t)$, при $t\geq 0$ та теореми Лебега про мажоровану збіжність маємо, що дана величина прямує до 0, при $n\to\infty$.

$$J(u_n) = \int_0^\infty e^{-\gamma t}L(t,x_n(t),u_n(t))dt = \int_0^\infty e^{-\gamma t}[L(t,x_n(t),u_n(t)) - L(t,x^*(t),u_n(t))]dt+$$

$$+\int_0^\infty e^{-\gamma t}[L(t,x^*(t),u_n(t)) - L(t,x^*(t),u^*(t))]dt + \int_0^\infty e^{-\gamma t}L(t,x^*(t),u^*(t))dt$$

Використовуючи (12) та (13) з останньої рівності отримуємо

$$\lim_{n\to\infty}\inf J(u_n(t)) \geq J(u^*).$$

Оскільки

$$\inf_{u\in U} J(u) \leq J(u^*) \leq \lim_{n\to\infty}\inf J(u_n(t)) = m,$$

то

$$J(u^*) = m.$$

Отже, $u^*(t)$ - оптимальне керування.
Теорему доведено.

□

Список літератури

[1] Haxen H. Synergetics-Spinger-Verlag-Berlin-Heideberg-New-York (1978)

[2] J.M.Kean, Nidel D.Barlow. A spatial model for the succesful biological control of sitona discoidens by Microctonus aethiopoides// J. Appl. Ecology, 38,162-169(2001)

[3] A.Alownel, K.Al-Khaled, M.Al-Towiq. Reliable algorithms for solving integro-differential equations with applications// Int. J. Comput. Math, 87, N7, 1538-1554 (2009).

[4] O.M.Stanzhytskyi, E.A. Samoilenko. Coefficient conditions for existence of an optimal control for differential systems// Journal of Mathematical Science (Unites States) 2014, 197(1), pp.129-137

[5] O.M.Stanzhytskyi, E.A.Samoilenko, V.V.Mogilova. On the existence of an optimal feedback control for stochastic systems// Differential equations, V.49, N11, 2013, pp. 1456-1464

[6] O.Kichmarenko, O.Stanzhytskyi. Sufficient Conditions for the existence of Optimal Controls for Some Classes of Functional-Differential Equations// Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 18(2),(2018), pp.196-211.

[7] T.V.Koval'chuk, V.V.Mohyl'ova, T.V.Shovkoplyas. Averaging Method in Problems of Optimal Control over Impulsive Systems// Journal of Mathematical Sciences (United States), 2020, 247(2), pp.314-327.

Надійшло 13.11.2023

Lakhva R.S. *The optimal control problem for systems of integro-differential equations on the half-axis*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 2 (2023), 141–152.

This article is devoted to exploring the optimal control problem for a system of integro-differential equations on the infinite interval. Sufficient conditions for the existence of optimal controls and trajectories have been obtained in terms of right-hand sides and the quality criterion function.

Integro-differential equation systems are the mathematical models for many natural science processes, such as those in fluid dynamics and kinetic chemistry, among others. Many of these equations have the control that minimizing specific functionals related to the dynamics of these processes.

This work specifically focuses on deriving sufficient optimality conditions for integro-differential systems on the half-axis. The complexity of the research is in the following aspects: Firstly, the problem at hand involves optimal control with an infinite horizon, which makes the direct application of compactness criteria like the Arzela-Ascoli theorem impossible. Secondly, the problem is considered up to the moment τ when the solution reaches the boundary of the domain. This reach moment depends on the control $\tau = \tau(u)$. Hence, the solution to the problem is essentially represented by the triplet (u^*, x^*, τ^*) — the optimal control, the optimal trajectory, and the optimal exit time. We note that a particular case of this problem is the problem of optimal speed.

The main idea of proving the existence of an optimal solution relies on a compactness approach and involves the following steps: identifying a weakly convergent minimizing sequence of admissible controls, extracting a strongly convergent subsequence of corresponding trajectories, and justifying boundary transitions in equations and the quality criterion.

The work provides a problem statement, formulates, and proves the main result.