Бойчук О.А., Ферук В.А.

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ БАГАТОЧЛЕННОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ З ПОХІДНОЮ КАПУТО

Досліджено лінійну крайову задачу для багаточленного диференціального рівняння дробового порядку з похідною Капуто. У випадку співмірних порядків похідної, використовуючи апарат теорії псевдообернених матриць, встановлено необхідні та достатні умови розв'язності та знайдено загальний вигляд розв'язку поставленої задачі.

Ключові слова і фрази: крайова задача, диференціальне рівняння дробового порядку, похідна Капуто, превдообернена (за Муром-Пенроузом) матриця.

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine (Boichuk O.A.)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine (Feruk V.A.)
e-mail: *boichuk.aa@gmail.com (Boichuk O.A.), feruk.viktor@gmail.com (Feruk V.A.)*

Вступ

Останні півстоліття усе більшої ваги набувають різноманітні міждисциплінарні дослідження. Поява нових алгоритмів моделювання явищ реального світу стала поштовхом до розвитку широкого кола математичних дисциплін, однією з яких є теорія інтегро-диференціювання дробового порядку. На сьогодні існують різні підходи до визначення дробових похідних. Дробові похідні Рімана–Ліувілля [14], Капуто [4], Вейля [17], узагальнені дробові похідні [13] та інші завдяки своїм особливостям мають різні області застосувань. Наприклад, використання дробової похідної Капуто [4], що була введена також незалежно один від одного Герасімовим [11] та Джрбашяном і Нерсесяном [9], дозволяє описувати процеси із пам'яттю [15, с. 90], [7, с. 87]. Той факт, що похідна Капуто від константи дорівнює нулю, а початкова задача для диференціальних рівнянь із такою похідною визначається лише похідними цілого порядку, дозволяє ефективно використовувати таку похідну для узагальнення відомих раніше моделей на

УДК 517.9
2010 *Mathematics Subject Classification:* 26A33, 34A08, 34B05.
Автори дякують за часткову фінансову підтримку за рахунок проєкту "Математичне моделювання складних динамічних систем та процесів актуальних для безпеки держави", реєстраційний номер 0123U100853.

основі звичайних диференціальних рівнянь. Зокрема, узагальненням звичайного диференціального рівняння n-го порядку є багаточленне або n-членне диференціальне рівняння дробового порядку, тобто рівняння у якому фігурують n різних диференціальних операторів дробового порядку α_k, $k=\overline{1,n}$. Класичними прикладами таких рівнянь, що мають практичне застосування, є рівняння Беглі–Торвіка (Bagley–Torvik), рівняння Басета (Basset) [7, с. 167], моделі в'язко-пружних матеріалів [1, с. 52]. Різним напрямкам теорії багаточленних дробових диференціальних рівнянь присвячено, зокрема, публікації [8, 6, 10, 7, 5, 16] та ін.

Як відомо [15, 7], диференціальні оператори Капуто, на відміну від звичайної похідної, не утворюють напівгрупу та не володіють властивістю комутативності. Тому, на відміну від класичної теорії диференціальних рівнянь, одне n-членне диференціальне рівняння дробового порядку з похідною Капуто не завжди можна звести до еквівалентної системи диференціальних рівнянь, що містять лише один оператор дробового порядку. Це можна зробити лише у окремих випадках, наклавши певні обмеження на числа α_k, $k=\overline{1,n}$. У даній роботі ми зупинимося на розгляді одного із таких випадків, а саме випадку співмірних (commensurate) порядків, тобто, коли $\alpha_i/\alpha_j\in\mathbb{Q}$, $i,j\in\{1,2,\dots n\}$ [7, с. 168]. Досліджується питання існування та конструктивної побудови розв'язку нетерової крайової задачі для багаточленного диференціального рівняння дробового порядку з похідною Капуто. Для цього, використовуючи описаний у [7, с. 169] алгоритм, багаточленне диференціальне рівняння зводиться до системи одночленних рівнянь, що дозволяє використати результати, отримані у [2].

1 Постановка задачі.

Розглядається лінійна крайова задача для багаточленного диференціального рівняння дробового порядку

$$
{}^C\mathrm{D}^{\alpha_n}_{a+}x(t)+\sum_{k=1}^{n-1}a_k(t)\,{}^C\mathrm{D}^{\alpha_k}_{a+}x(t)+a_n(t)x(t)=f(t), \tag{1}
$$

$$
lx(\cdot)=q, \tag{2}
$$

де $1\ge\alpha_n>\alpha_{n-1}>\ldots>\alpha_1>0$, $\alpha_i/\alpha_j\in\mathbb{Q}$, $i,j\in\{1,2,\dots n\}$, ${}^C\mathrm{D}^{\alpha_k}_{a+}$ — лівосторонні похідні Капуто, $a_k(t)\in C[a,b]$, $k=\overline{1,n}$, $f(t)\in C[a,b]$, $l=\mathrm{col}\begin{pmatrix}l_1, & l_2, & \ldots, & l_p\end{pmatrix}:C[a,b]\to\mathbb{R}^p$ — обмежений лінійний векторний функціонал, $l_\nu : C[a,b]\to\mathbb{R}$, $\nu=\overline{1,p}$, $q=\mathrm{col}\begin{pmatrix}q_1, & q_2, & \ldots, & q_p\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^p$.

2 Означення та допоміжні твердження

Наведемо спочатку деякі означення та твердження з теорії інтегро-диференціювання дробового порядку, більш детально з якими можна ознайомитися, зокрема, у роботах [15, 7]. Відмітимо, що у даній роботі ми розглядатимемо лише лівосторонні дробові інтеграли та похідні і надалі слово "лівосторонні" будемо опускати.

Означення 1. *[7, с. 9] Функція* $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, *вигляду*

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt,$$

називається Гамма–функцією Ейлера або інтегралом Ейлера другого роду.

Означення 2. *[15, с. 65], [7, с. 13] Нехай* $\alpha \in \mathbb{R}_+$. *Оператор* $I^\alpha_{a+} x(t)$ *визначений на* $L^1[a, b]$ *співвідношенням*

$$I^\alpha_{a+} x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^t \frac{x(s) ds}{(t-s)^{1-\alpha}},$$

для $a \leq t \leq b$, *називається дробовим інтегралом Рімана–Ліувілля порядку* α.

Розглянемо простір $AC^m[a, b]$ неперервно диференційовних до $m - 1$ порядку функцій, таких що їх $(m - 1)$-ша похідна є абсолютно неперервною функцією.

Означення 3. *[4], [15, с. 79], [7, с. 49] Нехай* $x \in AC^m[a, b]$. *Дробовою похідною Капуто* ${}^C\mathrm{D}^\alpha_{a+} x(t)$ *порядку* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *функції* $x(t)$ *називається вираз*

$${}^C\mathrm{D}^\alpha_{a+} x(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int\limits_a^t \frac{x^{(m)}(s) ds}{(t-s)^{\alpha-m+1}} = I^{m-\alpha}_{a+} D^m x(t),$$

де $m = \lceil \alpha \rceil$, $D = d/dt$.

Зокрема, при $0 < \alpha < 1$ похідна Капуто має вигляд

$${}^C\mathrm{D}^\alpha_{a+} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^t \frac{x'(s) ds}{(t-s)^\alpha} = I^{1-\alpha}_{a+} D x(t),$$

а при $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ співпадає із звичайною похідною, тобто

$${}^C\mathrm{D}^\alpha_{a+} x(t) = x^{(n)}(t).$$

Теорема 1. *[7, с. 170] Розглянемо початкову задачу для багаточленного диференціального рівняння дробового порядку*

$${}^C\mathrm{D}^{\alpha_n}_{a+} x(t) = f(t, x(t), {}^C\mathrm{D}^{\alpha_1}_{a+} x(t), {}^C\mathrm{D}^{\alpha_2}_{a+} x(t), \ldots, {}^C\mathrm{D}^{\alpha_{n-1}}_{a+} x(t)), \tag{3}$$

$$x(a) = x_a, \tag{4}$$

у якій $1 \geq \alpha_n > \alpha_{n-1} > \ldots > \alpha_1 > 0$, $\alpha_i/\alpha_j \in \mathbb{Q}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$. *Позначимо* $\widetilde{\alpha_j} := \alpha_j/\alpha_1$, $j = \overline{1, n}$, $\gamma := \alpha_1/\widetilde{M}$, $N := \widetilde{M}\alpha_n/\alpha_1$, *де* $\widetilde{M}$ *— найменше спільне кратне знаменників* *чисел $\widetilde{\alpha}_j$. Тоді задача* (3), (4) *еквівалентна початковій задачі для системи одночленних диференціальних рівнянь дробового порядку*

$$
\begin{aligned}
{}^C\mathrm{D}^{\gamma}_{a+}x_0(t) &= x_1(t),\\
{}^C\mathrm{D}^{\gamma}_{a+}x_1(t) &= x_2(t),\\
&\vdots\\
{}^C\mathrm{D}^{\gamma}_{a+}x_{N-2}(t) &= x_{N-1}(t),\\
{}^C\mathrm{D}^{\gamma}_{a+}x_{N-1}(t) &= f(t, x_0(t), x_{\alpha_1/\gamma}(t), \dots, x_{\alpha_{n-1}/\gamma}(t)),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
x_j(a) = \begin{cases} x_a, & j = 0;\\ 0, & j \neq 0 \end{cases}
\tag{6}
$$

у наступному сенсі:

1) якщо вектор-функція $y(t) := \mathrm{col}\big(x_0(t),\ \ x_1(t),\ \ \dots,\ \ x_{N-1}(t)\big)$, $x_0(t) \in C^1[a,b]$ *при деякому* $b > 0$ *є розв'язком задачі* (5), (6), *то функція* $x(t) := x_0(t)$ *є розв'язком задачі* (3), (4)*;*

2) якщо функція $x(t) \in C^1[a,b]$ *є розв'язком задачі* (3), (4), *то вектор-функція* $y(t) := \mathrm{col}\big(x_0(t),\ \ x_1(t),\ \ \dots,\ \ x_{N-1}(t)\big) = \mathrm{col}(x(t), {}^C\mathrm{D}^{\gamma}_{a+}x(t), {}^C\mathrm{D}^{2\gamma}_{a+}x(t), \dots, {}^C\mathrm{D}^{(N-1)\gamma}_{a+}x(t))$ *є розв'язком задачі* (5), (6).

3 Критерій розв'язності крайової задачі (1), (2)

Розглянемо питання існування та конструктивної побудови розв'язку поставленої задачі (1), (2). Згідно теореми 1, рівняння (1) є еквівалентним системі одночленних диференціальних рівнянь дробового порядку

$$
{}^C\mathrm{D}^{\gamma}_{a+}y(t) = H(t)y(t) + p(t),
\tag{7}
$$

у якій

$$
y(t) = \mathrm{col}\big(x_0(t),\ \ x_1(t),\ \ \dots,\ \ x_{N-1}(t)\big), \quad p(t) = \mathrm{col}\big(0,\ \ 0,\ \ \dots,\ \ f(t)\big),
$$

$$
H(t) = \begin{pmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & \dots & h_{1N}(t)\\ h_{21}(t) & h_{22}(t) & \dots & h_{2N}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ h_{N1}(t) & h_{N2}(t) & \dots & h_{NN}(t) \end{pmatrix}, h_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = \overline{1, N-1}, j = i+1;\\ -a_n(t), & i = N, j = 1;\\ -a_{\alpha_k/\gamma}(t), & i = N, j = \alpha_k/\gamma;\\ 0, & \text{інше}. \end{cases}
$$

Отже, ми можемо перейти від вивчення багаточленного диференціального рівняння (1) до вивчення системи одночленних диференціальних рівнянь (7), розв'язок якої можна побудувати використавши результати роботи [2]. Загальний розв'язок системи (7) має вигляд

$$
y(t) = Y(t)c + \overline{y}(t) \quad \forall c \in \mathbb{R}^N,
$$

де $Y(t)$ — фундаментальна $(N \times N)$-вимірна матриця однорідної системи (7), стовпці якої утворюють фундаментальну систему розв'язків цієї системи, а $\overline{y}(t)$ — частинний розв'язок неоднорідної системи (7), який шукається як розв'язок системи лінійних рівнянь Вольтерра другого роду

$$\overline{y}(t) = g(t) + \int\limits_a^t K(t,s)\overline{y}(s)ds, \tag{8}$$

$$g(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int\limits_a^t \frac{p(s)}{(t-s)^{1-\gamma}} ds, \quad K(t,s) = \frac{H(s)}{\Gamma(\gamma)(t-s)^{1-\gamma}}. \tag{9}$$

Система (8) із необмеженим ядром $K(t,s)$ (9) є еквівалентною системі з інтегральним оператором із сумовним з квадратом ядром $K_m(t,s)$, $2m\gamma > 1$ [12]

$$\overline{y}(t) = g_m(t) + \int\limits_a^t K_m(t,s)\overline{y}(s)ds, \tag{10}$$

$$g_m(t) = g(t) + \sum_{l=1}^{m-1} \int\limits_a^t K_l(t,s)g(s)ds,$$

$$K_{m+1}(t,s) = \int\limits_s^t K(t,\xi)K_m(\xi,s)d\xi, \quad K_1(t,s) = K(t,s), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Система (10) рівносильна операторному рівнянню в просторі ℓ_2

$$\Lambda z = g, \tag{11}$$

де вектори z, g та блочна матриця Λ мають вигляд

$$z = \operatorname{col}\big(y_1, \quad y_2, \quad \dots, \quad y_i, \quad \dots\big), \quad g = \operatorname{col}\big(g_1, \quad g_2, \quad \dots, \quad g_i, \quad \dots\big),$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \dots & \Lambda_{1i} & \dots \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \dots & \Lambda_{2i} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Lambda_{i1} & \Lambda_{i2} & \dots & \Lambda_{ii} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{ij} = \begin{cases} I_N - A_{ij}, & i = j; \\ -A_{ij}, & i \neq j, \end{cases}$$

$$y_i = \int\limits_a^b \overline{y}(t)\varphi_i(t)dt, \quad g_i = \int\limits_a^b g_m(t)\varphi_i(t)dt, \quad i = \overline{1,\infty},$$

$$A_{ij} = \int\limits_a^b \int\limits_a^t K_m(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds, \quad i,j = \overline{1,\infty},$$

I_N — одинична матриця розмірності N, $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ — повна ортонормальна система функцій в $L_2[a,b]$.

Оскільки оператор $\Lambda : \ell_2 \to \ell_2$ є різницею одиничного оператора $I : \ell_2 \to \ell_2$ та цілком неперервного вольтерівського оператора $A : \ell_2 \to \ell_2$, то $P_\Lambda = P_{\Lambda^*} = 0$, $\Lambda^+ = \Lambda^{-1}$. Отже, згідно [3], рівняння (11) має єдиний розв'язок вигляду $z = \Lambda^{-1}g$, а, згідно теореми Ріса–Фішера, вектор-функція $\overline{y}(t) = \mathrm{col}\left(\overline{y}_0(t),\ \ \overline{y}_1(t),\ \ \ldots,\ \ \overline{y}_{N-1}(t)\right)$, яка визначається співвідношенням

$$\overline{y}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i\varphi_i(t) = \Phi(t)z = \Phi(t)\Lambda^{-1}g,$$

де $\Phi(t) = \left(\varphi_1(t),\ \ \varphi_2(t),\ \ \ldots\varphi_i(t),\ \ \ldots\ \right)$, є розв'язком системи рівнянь (8).

Отже, загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$x(t) = x_0(t) = Y_1(t)c + \overline{y}_0(t) \quad \forall c \in \mathbb{R}^N, \tag{12}$$

де $Y_1(t)$ — перший рядок матриці $Y(t)$.

Повернемося тепер до розгляду питання існування та структури розв'язку крайової задачі (1), (2). Підставивши (12) в умову (2), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно параметра c

$$Qc = b, \tag{13}$$

де $(p \times N)$-вимірна матриця Q та p-вимірний вектор b мають вигляд

$$Q = (lY_1)(\cdot), \quad b = q - (l\overline{y}_0)(\cdot).$$

Згідно критерію розв'язності системи рівнянь (13) [3], така константа c існує тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{Q^*_{d_1}}b = 0, \quad d_1 = p - \mathrm{rank}\ Q \tag{14}$$

та має вигляд

$$c = P_{Q_{d_2}}c_{d_2} + Q^+b \quad \forall c_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}, \quad d_2 = N - \mathrm{rank}\ Q. \tag{15}$$

Тут $P_{Q_{d_2}}(P_{Q^*_{d_1}})$ — $(N \times d_2)((d_1 \times p))$-вимірна матриця, що складається із повної системи $d_2(d_1)$ лінійно незалежних стовпчиків(рядків) матриці-проєктора $P_Q(P_{Q^*})$, Q^+ — $(N \times p)$-вимірна матриця, що є псевдооберненою (за Муром-Пенроузом) до матриці Q. Підставляючи (15) в (12), отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (1), (2)

$$x(t) = Y_1(t)P_{Q_{d_2}}c_{d_2} + Y_1(t)Q^+b + \overline{y}_0(t) \quad \forall c_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}. \tag{16}$$

Отже, справедливе твердження:

Теорема 2. *Однорідна крайова задача* (1), (2) $(f(t) = 0,\ q = 0)$ *має* d_2*-параметричну сім'ю розв'язків*

$$x(t) = Y_1(t)P_{Q_{d_2}}c_{d_2} \quad \forall c_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}.$$

Неоднорідна крайова задача (1), (2) *є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються* d_1 *лінійно незалежних умов* (14) *і має* d_2*-параметричну сім'ю розв'язків* $x \in C^1[a,b]$ *вигляду* (16).

Зауваження 1. *Використаний нами алгоритм зведення багаточленного диференціального рівняння* (1) *до системи одночленних рівнянь* (7) *застосовний також у випадку* $\alpha_j \in \mathbb{Q}$, $j = \overline{1,n}$, $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \ldots > \alpha_1 > 0$, $\alpha_j - \alpha_{j-1} \le 1$, $0 < \alpha_1 \le 1$ *[7, с. 169].*

Список літератури

[1] Atanacković T.M., Pilipović S., Stanković B., Zorica D. Fractional calculus with applications in mechanics: vibrations and diffusion processes. Wiley-ISTE, London; Hoboken, 2014. doi:10.1002/9781118577530

[2] Boichuk O.A., Feruk V.A. *Fredholm boundary-value problem for the system of fractional differential equations.* Nonlinear Dyn. 2023, **111**, 7459–7468. doi:10.1007/s11071-022-08218-4

[3] Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2th ed.). De Gruyter, Berlin; Boston, 2016. doi:10.1515/9783110378443

[4] Caputo M. *Lineal model of dissipation whose Q is almost frequency independent - II.* Geophys. J. R. Astr. Soc. 1967, **13** (5), 529–539. doi:10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x

[5] Dabiri A., Butcher E.A. *Stable fractional Chebyshev differentiation matrix for the numerical solution of multi-order fractional differential equations.* Nonlinear Dyn. 2017, **90**, 185–201. doi:10.1007/s11071-017-3654-3

[6] Deng W., Li C., Guo Q. *Analysis of fractional differential equations with multi-orders.* Fractals. 2007, **15** (2), 173–182. doi:10.1142/S0218348X07003472

[7] Diethelm K. The analysis of fractional differential equations: an application-oriented exposition using differential operators of Caputo type. Springer, Berlin; Heidelberg, 2010. doi:10.1007/978-3-642-14574-2

[8] Diethelm K., Ford N.J. *Multi-order fractional differential equations and their numerical solution.* Appl. Math. Comput. 2004, **154** (3), 621–640. doi:10.1016/S0096-3003(03)00739-2

[9] Dzherbashyan M.M., Nersesyan A.B. *Fractional derivatives and the Cauchy problem for differential equations of fractional order.* Izv. Akad. Nauk Armyan. SSR, Ser. Mat. 1968, **3** (1), 3–29. (in Russian)

[10] Erturk V.S., Momani S., Odibat Z. *Application of generalized differential transform method to multi-order fractional differential equations.* Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2008, **13** (8), 1642–1654. doi:10.1016/j.cnsns.2007.02.006

[11] Gerasimov A.N. *Generalization of laws of the linear deformation and their application to problems of the internal friction.* Prikl. Mat. Meh. 1948, **12** (3), 251–260. (in Russian)

[12] Goursat E. A course in mathematical analysis, Vol. III, Part. 2. Dover Publications, Inc., New York, 1964.

[13] Kochubei A.N. *General fractional calculus, evolution equations, and renewal processes.* Integral Equ. Oper. Theory. 2011, **71** (4), 583–600. doi:10.1007/s00020-011-1918-8

[14] Liouville J. *Memoire sur quelques questions de geometrie et de mecanique, et sur un nouveau gentre pour resoudre ces quistions.* J. Ecole Polytech. 1832, **13**, 1–69.

[15] Podlubny I. Fractional differential equations, Mathematics in science and engineering. Academic Press, San Diego, 1999.

[16] Shloof A.M., Ahmadian A., Senu N., Salahshour S., Ibrahim S.N.I., Pakdaman M. *A highly accurate artificial neural networks scheme for solving higher multi-order fractal-fractional differential equations based on generalized Caputo derivative.* Int. J. Numer. Methods Eng. 2023, **124** (19), 4371–4404. doi:10.1002/nme.7312

[17] Weyl H. *Bemerkungen zum begriff des differentialquotienten gebrochener ordnung.* Zürich. Naturf. Ges. 1917, **62**, 296–302.

Надійшло 13.11.2023

Boichuk O.A., Feruk V.A. *Boundary-value problem for the multi-term fractional differential equation with Caputo derivative*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 2 (2023), 85–92.

The extensive application of fractional differential equations and boundary-value problems for these equations promotes the development of the theory and the appearance of numerous publications in this field. One of the types of such equations are equations containing more than one differential operator of fractional order.

This paper deals with the study of linear boundary-value problem for the multi-term fractional differential equation with the Caputo derivative. We considered the left fractional Caputo derivative, which is convenient for the description of systems with memory. The boundary-value problem is specified by linear vector functional such that the number of it components does not coincide with the number of the orders of the derivative. Assume that the coefficients of the equation are continuous functions and the orders of the derivative are commensurate. A multi-term fractional differential equation is reduced to an equivalent system of differential equations containing only one fractional operator. The general solution of the system of fractional differential equations consisting of a general solution of the associated homogeneous system and the arbitrary particular solution of the inhomogeneous system is considered. The particular solution we found, which is also a solution of the system of linear Volterra integral equations of the second kind with square summable kernels. The question of the solvability of the boundary-value problem for the multi-term fractional differential equations was studied. We considered the critical case, i.e. case when the homogeneous problem has nontrivial solutions. By using the theory of pseudo-inverse matrices, the necessary and sufficient conditions for solvability of the given problem are established. Moreover, a family of linearly independent solutions of this boundary-value problem is constructed.