Мединський І. П., Пасічник Г. С.

ВЛАСТИВОСТІ ОБ'ЄМНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ ОДНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ГРУПИ МОЛОДШИХ ЧЛЕНІВ

Основним об'єктом дослідження є об'ємний потенціал, ядром якого є фундаментальний розв'язок задачі Коші для виродженого параболічного рівняння другого порядку типу Колмогорова. Коефіцієнти цього рівняння є сталими в групі старших і зростаючими функціями в групі молодших членів. Дослідженням охоплено в основному властивості гладкості об'ємного потенціалу за просторовими і часовою змінними. Такі властивості є важливими для встановлення теорем про інтегральне зображення розв'язків та їх застосування до дослідження коректної розв'язності задачі Коші.

Ключові слова і фрази: вироджене рівняння типу Колмогорова, фундаментальний розв'язок задачі Коші, об'ємний потенціал, коректна розв'язність задачі Коші.

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна (Мединський І. П.)
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна (Пасічник Г. С.)
e-mail: *ihor.p.medynskyi@lpnu.ua (Мединський І.П.), pasichnyk.gs@gmail.com (Пасічник Г.С.)*

Вступ

Параболічні рівняння зі зростаючими коефіцієнтами виникають при математичному моделюванні реальних процесів (наприклад, у задачах теорії випадкових процесів, статистичної радіотехніки). Так, для нормальних марковських процесів рівняннями Фоккера–Планка–Колмогорова є параболічні рівняння другого порядку, в яких коефіцієнти при похідних першого порядку за просторовими змінними є лінійними функціями цих змінних, а інші коефіцієнти сталі. Такі рівняння можуть бути як невиродженими, так і виродженими.

Для деяких невироджених рівнянь указаного типу [1] та вироджених рівнянь, а саме рівнянь типу класичного рівняння дифузії з інерцією А.М. Колмогорова з однією та двома групами змінних виродження і зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів відповідно в [2] і [3] в явному вигляді знайдено фундаментальні розв'язки задачі

УДК 517.956.4
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K70, 35A08, 35C15.

Коші (ФРЗК) та вивчено їх властивості. У цій статті для виродженого рівняння типу Колмогорова другого порядку з двома групами змінних виродження, коефіцієнти якого при молодших похівних є зростаючими при $|x| \to \infty$ функціями, вивчено властивості об'ємного потенціалу, породженого ФРЗК. Ці властивості важливі для встановлення коректної розв'язності задачі Коші в класах обмежених функцій. Результати, які наводяться в статті, доповідались і обговорювались на міжнародних конференціях [5, 6].

1 Постановка задачі і допоміжні відомості

Нехай n_1, n_2, n_3 – задані натуральні числа такі, що $n_3 \le n_2 \le n_1$; $n := n_1 + n_2 + n_3$; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \ldots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$, що $x := (x_1, x_2, x_3)$. Змінні групи x_1 називаються основними, а змінні x_2, x_3 – змінними груп виродження. Відповідно до цього, мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ записуватимемо у вигляді $k := (k_1, k_2, k_3)$, де $k_j := (x_{j1}, \ldots, x_{jn_j}) \in \mathbb{Z}_+^{n_j}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, при цьому $|k| := \sum\limits_{j=1}^{3} |k_j|$, $|k_j| := \sum\limits_{l=1}^{n_j} |k_{jl}|$, $j \in \{1, 2, 3\}$.

У шарі $\Pi_{(0,T]} := (0, T] \times \mathbb{R}^n$ скінченної товщини $T > 0$ розглядається неоднорідне рівняння

$$\Big(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} - b\sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}\partial_{x_{1j}}\Big)u(t,x) = f(t,x),$$
$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{1}$$

де a_{js} і b – дійсні сталі, причому $a_{js} = a_{sj}$, $\{j, s\} \subset \{1, ..., n_1\}$ і $b \neq 0$, і виконується умова параболічності

$$\exists\, \delta > 0 \ \ \forall\, \sigma_1 := (\sigma_{11}, ..., \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} : \ \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}\sigma_{1s} \ge \delta|\sigma_1|^2.$$

У праці [3] знайдено в явному вигляді вираз ФРЗК для рівняння (1) $G(t, x; \tau, \xi)$, $0 \le \tau < t \le T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, звідки випливають, зокрема, оцінки

$$|\partial_x^k \partial_\xi^m G(t,x;\tau,\xi)| \le C\prod_{l=1}^{3}(p_l(t-\tau))^{-(n_l+|k_l|+|m_l|)/2}E_c(t-\tau,x,\xi),$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де k_l і m_l – довільні мультиіндекси розмірності n_l, $l \in \{1, 2, 3\}$, C і c – додатні сталі, причому C залежить від k_l і m_l;

$$E_c(t,x,\xi) := \prod_{l=1}^{3} E_c^l(t, X_l(t), \xi_l), \ t > 0, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$
$$E_c^l(t, X_l(t), \xi_l) := \exp\Big\{-c\frac{|X_l(t)-\xi_l|^2}{p_l(t)}\Big\}, \ l \in \{1,2,3\}, \tag{3}$$

в яких

$$X_1(t) := x_1 e^{bt}, \quad X_2(t) := x_2 + \alpha_b(t)\hat{x}_1, \quad X_3(t) := x_3 + t x_2' + \frac{\alpha_b(t) - t}{b} x_1',$$

де $x_1 := (x_1', x_1'', x_1''')$, $\hat{x}_1 := (x_1', x_1'')$, де $x_1' := (x_{11}, ..., x_{1n_3})$, $x_1'' := (x_{1(n_3+1)}, ..., x_{1n_2})$, $x_1''' := (x_{1(n_2+1)}, ..., x_{1n_1})$; $x_2 := (x_2', x_2'')$, де $x_2' := (x_{21}, ..., x_{2n_3})$, $x_2'' := (x_{2(n_3+1)}, ..., x_{2n_2})$; а для $t > 0$

$$\alpha_b(t) := \frac{e^{bt} - 1}{b}, \qquad p_1(t) := \frac{e^{2bt} - 1}{2b},$$
$$p_2(t) := \frac{t}{b^2} - \frac{2(e^{bt} - 1)}{b^3(e^{bt} + 1)}, \quad p_3(t) := \frac{t}{b^4} + \frac{t^3}{12b^2} - \frac{t^2}{b^3}\frac{e^{bt} + 1}{2(e^{bt} - 1)}.$$

Крім властивостей ФРЗК G, отриманих в [3], використовуватимемо наступні властивості ФРЗК та функцій p_l, $l \in \{1, 2, 3\}$.

Властивість 1. *Справджуються рівності*

$$\partial_x^k \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi)\, d\xi = \left\{ \begin{array}{l} 0, \ |k| \neq 0, \\ 1, \ |k| = 0, \end{array} \right\} \quad t > \tau, \ \ x \in \mathbb{R}^n; \tag{4}$$

$$\partial_{x_2}^{k_2} \partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G(t, x; \tau, \xi)\, d\xi_2 d\xi_3 = 0, \ |k_2| + |k_3| \neq 0, \quad t > \tau, \ \ x \in \mathbb{R}^n, \ \xi_1 \in \mathbb{R}^{n_1}; \tag{5}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} G(t, x; \tau, \xi)\, d\xi_3 = 0, \ |k_3| \neq 0, \quad t > \tau, \ \ x \in \mathbb{R}^n, \ \xi_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \ \xi_2 \in \mathbb{R}^{n_2}. \tag{6}$$

Доведення. Рівність (4) випливає з властивості

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi)\, d\xi = 1, \quad t > \tau, \ \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

яка доведена в [3].

Для доведення (5) та (6), як і при доведенні (7), використавується зображення

$$G(t, x; \tau, \xi) = \bar{c}_1^{-n_1/2} \bar{c}_3^{-n_2/2} \bar{c}_6^{-n_3/2} \, F^{-1}_{\eta \to Z(t-\tau, x, \xi)}[\exp\{-(\tilde{A}\eta, \eta)\}],$$

де

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{n_1 n_1} & d_0 A_{n_1 n_2} & f_0 A_{n_1 n_3} \\ d_0 A_{n_2 n_1} & A_{n_2 n_2} & g_0 A_{n_2 n_3} \\ f_0 A_{n_3 n_1} & g_0 A_{n_3 n_2} & A_{n_3 n_3} \end{pmatrix},$$

а $\bar{c}_i := c_i(t - \tau)$, $i \in \{1, 3, 6\}$, $c_1 := c_1(t) := \alpha_{2b}(t)$, $c_2 := c_2(t) := \alpha_b^2(t)/2$, $c_3 := c_3(t) := \big(2bt + e^{2bt} - 4e^{bt} + 3\big)/(2b^3)$, $c_4 := \big(e^{2bt} - 2bte^{bt} - 1\big)/(2b^3)$, $c_5 := c_5(t) := \big(\alpha_b(t) - t\big)^2/(2b^2)$, $c_6 := c_6(t) := \big(2bt + e^{2bt} - 1 - 4bte^{bt} + 2b^2t^2 + \frac{2}{3}b^3t^3\big)/(2b^5)$, $d_0 := (c_1\, c_3)^{-1/2} c_2$, $f_0 := (c_1\, c_6)^{-1/2} c_4$, $g_0 := (c_3\, c_6)^{-1/2} c_5$,

$$Z(t, x, \xi) = \Big((c_1)^{-1/2}(x_1 e^{bt} - \xi_1), (c_3)^{-1/2}(x_2 + \hat{x}_1 \alpha_b(t) - \xi_2), (c_6)^{-1/2}(x_3 + t x_2' + \frac{\alpha_b(t) - t}{b} x_1' - \xi_3)\Big).$$

Зробивши заміну змінних $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ за формулами

$$(\bar{c}_1)^{-1/2}(x_1 e^{b(t-\tau)} - \xi_1) = \hat{\xi}_1; \quad (\bar{c}_3)^{-1/2}(x_2 + \hat{x}_1 \alpha_b(t-\tau) - \xi_2) = \hat{\xi}_2;$$
$$(\bar{c}_6)^{-1/2}(x_3 + (t-\tau)x_2' + \frac{\alpha_b(t-\tau) - (t-\tau)}{b} x_1' - \xi_3) = \hat{\xi}_3, \qquad \hat{\xi} := (\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3),$$

маємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} G(t,x;\tau,\xi)\, d\xi_3 = \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} F^{-1}_{\eta\to\hat{\xi}}[\exp\{-(\tilde{A}\eta,\eta)\}]\, d\hat{\xi}_3 = F_{\hat{\xi}_3\to 0}[F^{-1}_{\eta\to\hat{\xi}}[\exp\{-(\tilde{A}\eta,\eta)\}]] =$$
$$= F^{-1}_{(\eta_1,\eta_2)\to(\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_2)}[\exp\{-(\tilde{A}\eta,\eta)\}\Big|_{\eta_3=0}],$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G(t,x;\tau,\xi)\, d\xi_2 d\xi_3 = \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} F^{-1}_{\eta\to\hat{\xi}}[\exp\{-(\tilde{A}\eta,\eta)\}]\, d\hat{\xi}_2 d\hat{\xi}_3 =$$
$$= F_{(\hat{\xi}_2,\hat{\xi}_3)\to(0,0)}[F^{-1}_{\eta\to\hat{\xi}}[\exp\{-(\tilde{A}\eta,\eta)\}]] = F^{-1}_{\eta_1\to\hat{\xi}_1}[\exp\{-(\tilde{A}\eta,\eta)\}\Big|_{\substack{\eta_2=0\\ \eta_3=0}}],$$

звідки випливає (5) та (6). □

Властивість 2.

$$\exists\, C_l^1 > 0 \ \exists\, C_l^2 > 0 \quad \forall\, t \in [0,T]: \quad C_l^1 t^{2l-1} \le p_l(t) \le C_l^2 t^{2l-1}, \ l \in \{1,2,3\}.$$

Для оцінної функції E_c виконується нерівність

$$|X_l(t) - \xi_l|^{\alpha_l} E_c(t,x,\xi) \le (p_l(t))^{\alpha_l/2} E_{c_1}(t,x,\xi), \quad t > 0, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

а інтеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \prod_{l=1}^{3} (p_l(t))^{-n_l/2} E_\gamma(t,x,\xi)\, d\xi \le C, \quad \gamma > 0, \tag{9}$$

де $C > 0$.

У цій статті ми досліджуємо властивості об'ємного потенціалу

$$u(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{10}$$

ядром якого є функція G – ФРЗК для рівняння (1), з яких випливає коректна розв'язність задачі Коші з однорідними початковими умовами.

2 Диференційовність об'ємного потенціалу, породженого ФРЗК

Будемо використовувати ще такі позначення:

$$\xi^{(1)}(t) := (\xi_1, X_2(t), X_3(t)), \quad \xi^{(2)}(t) := (\xi_1, \xi_2, X_3(t)), \quad t > 0, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n;$$

$B_R := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R,\ R > 0\}$ – куля в $\mathbb{R}^n$ радіуса R і центром у початку координат.

Для густини об'ємного потенціалу (10) – функції $f : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$ використовуватимемо таку умову:

Г) функція f обмежена і неперервна в $\Pi_{[0,T]}$, є гельдеровою за просторовими змінними у такому сенсі:

$$\forall\, R > 0 \quad \exists\, C > 0, \quad \exists\, \alpha_1 \in (0;1],\ \exists \alpha_2 \in (\frac{1}{3};1],\ \exists \alpha_3 \in (\frac{3}{5};1] \quad \forall\, t \in (0,T] \quad \forall \{x,\xi\} \subset B_R :$$

$$|\Delta_\xi^{X(t-\tau)} f(\tau,\xi)| := |f(\tau,\xi) - f(\tau, X(t-\tau))| \le C \sum_{l=1}^{3} |X_l(t-\tau) - \xi|^{\alpha_l}.$$

Теорема. *Нехай для функції f виконуються умова* **Г**. *Тоді*

1) функція u має неперервні похідні, які входять у рівняння (1), *при цьому похідні обчислюються за формулами*

$$\partial_{x_1}^{k_1} u(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi, \quad |k_1| = 1, \tag{11}$$

$$\partial_{x_1}^{k_1} u(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G(t,x;\tau,\xi)\, \Delta_\xi^{X(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi, \quad |k_1| = 2, \tag{12}$$

$$\partial_{x_2}^{k_2} u(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G(t,x;\tau,\xi) \Delta_\xi^{\xi^{(1)}(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi, \quad |k_2| = 1, \tag{13}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} u(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_3}^{k_3} G(t,x;\tau,\xi) \Delta_\xi^{\xi^{(2)}(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi, \quad |k_3| = 1, \tag{14}$$

$$\begin{gathered} \partial_t u(t,x) = f(t,x) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t,x;\tau,\xi) \Delta_\xi^{\xi^{(2)}(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi + \\ + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t,x;\tau,\xi) \Delta_{\xi^{(2)}(t-\tau)}^{\xi^{(1)}(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t,x;\tau,\xi) \Delta_{\xi^{(1)}(t-\tau)}^{X(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi + \\ + \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t,x;\tau,\xi) d\xi \right) f(\tau, X(t-\tau)) d\tau, \end{gathered} \tag{15}$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}.$$

2) для функції u виконується умова

$$\lim_{t \to 0} \partial_{x_l}^{k_l} u(t,x) \longrightarrow 0, \quad l \in \{1,2,3\},\ |k_1| \le 2,\ |k_2| \le 1,\ |k_3| \le 1,$$

рівномірно щодо $x \in B_R$ з довільним додатним R.

Доведення. Щоб довести (11), переконаємось спочатку, що для $|k_1| = 1$ нтеграл

$$\partial_{x_1}^{k_1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi := I^{(k_1)}(t,x;\tau) \tag{16}$$

збігається рівномірно стосовно $x \in \mathbb{R}^n$ для фіксованих t і τ.

Оскільки на підставі (2) і обмеженості f

$$\left| \partial_{x_1}^{k_1} G(t,x;\tau,\xi)\, f(\tau,\xi) \right| \leq \left| \partial_{x_1}^{k_1} G(t,x;\tau,\xi) \right| \left| f(\tau,\xi) \right| \leq C\, M\, (p_1(t-\tau))^{-(n_1+|k_1|)/2} \times$$
$$\times \prod_{l=2}^{3} (p_l(t-\tau))^{-n_l/2}\, E_c(t-\tau,x,\xi), \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

то інтеграл (16) збігається рівномірно стосовно $x \in \mathbb{R}^n$ для фіксованих t і τ та, згідно з (9), правильна оцінка $I^{(k_1)}(t,x;\tau) \leq C_1 (p_1(t-\tau))^{-|k_1|/2}$, де $C_1 > 0$. Врахувавши властивість 2, отримуємо

$$I^{(k_1)}(t,x;\tau) \leq C_1 (t-\tau)^{-|k_1|/2}, \ 0 \leq \tau < t \leq T, \ k_1 \in \mathbb{Z}^{n_1}. \tag{17}$$

З (16) і (17) випливає для $|k_1| = 1$ формула (11), бо для довільного $t > 0$ збігається інтеграл $\int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2} d\tau$.

Якщо $|k_1| = 2$ оцінка (17) уже не придатна. Її можна поліпшити для $x \in B_R$, де R – будь-яке фіксоване додатне число. Спочатку оцінимо $|X(t)|$ для $t \in [0,T]$. Маємо

$$|X(t)| \leq e^{bt}|x_1| + |x_2| + |x_3| + |\alpha_b(t)||\hat{x}_1| + t|\hat{x}_2| + \left| \frac{\alpha_b(t) - t}{b} \right| |x_1'| \leq r|x|, \tag{18}$$

де $r = 2 + T + e^{bT} + \max\limits_{t \in [0,T]} |\alpha_b(t)| + \max\limits_{t \in [0,T]} \left| \frac{\alpha_b(t)-t}{b} \right|$.

Вважаючи, що $x \in B_R$, на підставі (4) запишемо зображення

$$I_1^{(k_1)} = \int\limits_{B_{2Rr}} \partial_{x_1}^{k_1} G(t,x;\tau,\xi) \Delta_\xi^{X(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2Rr}} \partial_{x_1}^{k_1} G(t,x;\tau,\xi) \Delta_\xi^{X(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi =: I_1 + I_2, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{19}$$

Інтеграл I_1 оцінюємо за допомогою (2), нерівностей (8), (9),

$$|r|^k \exp\{-c|r|^p\} \leq C_k \exp\{-c_0|r|^p\}, \quad r \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

в якій $k > 0$, $p > 0$, $c > 0$, $0 < c_0 < c$, $C_k > 0$, і умови $\mathbf{\Gamma}$. Маємо

$$|I_1| \leq \left| \int\limits_{B_{2Rr}} \left| \partial_{x_1}^{k_1} G(t,x;\tau,\xi) \right| \left| \Delta_\xi^{X(t-\tau)} f(\tau,\xi) \right| d\xi \right| \leq$$

$$\le C\,(p_1(t-\tau))^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\prod_{l=1}^{3}(p_l(t-\tau))^{-n_l/2}\,E_c(t-\tau,x,\xi)\Big(\sum_{i=1}^{3}|X_i(t-\tau)-\xi_i|^{\alpha_l}\Big)\,d\xi\le$$

$$\le C\,(p_1(t-\tau))^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{3}(p_i(t-\tau))^{\alpha_i/2}\Big)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\prod_{l=1}^{3}(p_l(t-\tau))^{-n_l/2}\,E_{c_1}(t-\tau,x,\xi)\,d\xi\le$$

$$\le C_1\,(p_1(t-\tau))^{-1}\sum_{i=1}^{3}(p_i(t-\tau))^{\alpha_i/2},\quad 0\le\tau<t\le T,\quad x\in B_R,$$

де c – стала з оцінок (2), $0<c_1<c$, $C_1=C\,C_0$, C_0 – стала з оцінок (9). Враховуючи властивість 2, отримуємо

$$|I_1|\le C_1(t-\tau)^{-1+\alpha_1/2},\quad 0\le\tau<t\le T,\ x\in B_R. \tag{21}$$

Використовуючи обмеженість функції f, маємо

$$|\Delta_\xi^{X(t-\tau)}f(\tau,\xi)|\le|f(\tau,\xi)|+|f(\tau,X(t-\tau)|\le 2M. \tag{22}$$

З урахуванням (18) отримуємо

$$|X(t-\tau)-\xi|^2\ge||\xi|-|X(t-\tau)||^2\ge||\xi|-r|x||^2\ge r^2\,R^2,$$
$$x\in B_R,\quad \xi\in\mathbb{R}^n\setminus B_{2Rr},\quad 0\le\tau<t\le T.$$

а допомогою цієї оцінки, оцінок (2), нерівностей (9), (20) та (22) маємо

$$|I_2|\le\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2Rr}}\big|\partial_{x_1}^{k_1}G(t,x;\tau,\xi)\big|\,\Big|\Delta_\xi^{X(t-\tau)}f(\tau,\xi)\Big|\,d\xi\Big|\le$$

$$\le 2CM\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2Rr}}(p_1(t-\tau))^{-1}\Big(\prod_{l=1}^{3}(p_l(t-\tau))^{-n_l/2}\Big)E_c(t-\tau,x,\xi)\,d\xi\le$$

$$\le 2CM\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2Rr}}\prod_{l=1}^{3}(p_l(t-\tau))^{-n_l/2}E_{c/2}(t-\tau,x,\xi)\exp\Big\{-\frac{c}{2}\frac{|X(t-\tau)-\xi|^2}{p_1(t-\tau)}\Big\}\,d\xi\le$$

$$\le 2CM\Big((p_1(t-\tau))^{-1}\exp\{-\frac{c}{2}\frac{r^2R^2}{p_1(t-\tau)}\}\Big)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\prod_{l=1}^{3}(p_l(t-\tau))^{-n_l/2}E_{c/2}(t-\tau,x,\xi)\,d\xi\le$$
$$\le 2C_0CMC_1\,(p_1(t-\tau))^{-1+\alpha},$$

де C_1 – стала з оцінок (20), α – довільне число з $[0,1]$. На підставі цієї оцінки, оцінки (21) та зображення (19) одержуємо формулу (12) для $(t,x)\in(0,T]\times B_R$, а оскільки R – довільне додатне число, то звідси випливає формула (12) для $(t,x)\in\Pi_{(0,T]}$.

Доведемо формулу (13). Спочатку запишемо зображення, яке правильне на підставі (5), для інтеграла

$$I^{(k_2)}(t,x;\tau)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_2}^{k_2}G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_2}^{k_2}G(t,x;\tau,\xi)\Delta_\xi^{\xi^{(1)}(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi=$$

$$+\int\limits_{B_{2Rr}}\partial_{x_2}^{k_2}G(t,x;\tau,\xi)\Delta_\xi^{\xi^{(1)}(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi+\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2Rr}}\partial_{x_2}^{k_2}G(t,x;\tau,\xi)\Delta_\xi^{\xi^{(1)}(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi=:$$

$$=:J_1+J_2,\quad x\in B_R,\ \ 0\le\tau<t\le T. \tag{23}$$

Оцінимо інтеграл J_1 за допомогою умови $\mathbf{\Gamma}$, оцінок (2), нерівностей (8) і (9). Маємо

$$|J_1|\le\Big|\int\limits_{B_{2Rr}}|\partial_{x_2}^{k_2}G(t,x;\tau,\xi)|\,|\Delta_\xi^{\xi^{(1)}(t-\tau)}f(\tau,\xi)|\,d\xi\Big|\le$$

$$\le C\,(p_2(t-\tau))^{-|k_2|/2}\int\limits_{B_{2Rr}}\prod_{l=1}^{3}(p_l(t-\tau))^{-n_l/2}\,E_c(t-\tau,x,\xi)\Big(\sum_{i=2}^{3}|X_i(t-\tau)-\xi_i|^{\alpha_l}\Big)\,d\xi\le$$

$$\le C\,(p_2(t-\tau))^{-|k_2|/2}\Big(\sum_{i=2}^{3}(p_i(t-\tau))^{\alpha_i/2}\Big)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\prod_{l=1}^{3}(p_l(t-\tau))^{-n_l/2}\,E_{c_1}(t-\tau,x,\xi)\,d\xi\le$$

$$\le C\,(t-\tau))^{-3|k_2|/2}\Big((t-\tau)^{3\alpha_2/2}+(t-\tau)^{5\alpha_3/2}\Big).$$

Для випадку $|k_2|=1$ маємо оцінку

$$|J_1|\le C(t-\tau)^{-1+(3\alpha_2-1)/2},\ \ 0\le\tau<t\le T,\ \ x\in B_R. \tag{24}$$

Оцінка (24) є достатньою, якщо $\alpha_2>1/3$.

Далі

$$|J_2|\le\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2Rr}}\left|\partial_{x_2}^{k_2}G(t,x;\tau,\xi)\right|\,\left|\Delta_\xi^{\xi^{(1)}(t-\tau)}f(\tau,\xi)\right|\,d\xi\Big|\le$$

$$\le 2CM(p_2(t-\tau))^{-1/2}\exp\Big\{-\frac{c}{2}\frac{r^2R^2}{p_2(t-\tau)}\Big\}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\prod_{l=1}^{3}(p_l(t-\tau))^{-n_l/2}E_{c/2}(t-\tau,x,\xi)\,d\xi.$$

Тому

$$|J_2|\le C\,(t-\tau))^{-1+(3\alpha_2-1)/2},\quad 0\le\tau<t\le T,\ \ x\in B_R. \tag{25}$$

Оцінки (24) і (25) з $\alpha_2>1/3$ разом з (23) гарантують рівномірну збіжність стосовно $x\in B_R$ інтеграла $I^{(k_2)}(t,x;\tau)$ при $|k_2|=1$ для фіксованих t і τ, що доводить формулу (13) для $(t,x)\in(0,T]\times B_R$. Оскільки R – довільне додатне число, то формула (13) справджується для всіх $(t,x)\in\Pi_{(0,T]}$.

Аналогічно оцінюємо похідну за змінною x_3. Вважаючи, що $x\in B_R$, на підставі (6) запишемо

$$I^{(k_3)}(t,x;\tau):=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_2}^{k_3}G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_3}^{k_3}G(t,x;\tau,\xi)\Delta_\xi^{\xi^{(2)}(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_{B_{2Rr}}\partial_{x_3}^{k_3}G(t,x;\tau,\xi)\Delta_\xi^{\xi^{(2)}(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi+\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2Rr}}\partial_{x_3}^{k_3}G(t,x;\tau,\xi)\Delta_\xi^{\xi^{(2)}(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi=:$$

$$=:K_1+K_2,\quad x\in B_R,\ \ 0\le\tau<t\le T. \tag{26}$$

Маємо

$$|K_1| \le \Big| \int\limits_{B_{2Rr}} \left|\partial_{x_2}^{k_2} G(t,x;\tau,\xi)\right| \left|\Delta_{\xi}^{\xi^{(2)}(t-\tau)} f(\tau,\xi)\right| d\xi \Big| \le$$

$$\le C\,(p_3(t-\tau))^{-|k_3|/2} \int\limits_{B_{2Rr}} \prod_{l=1}^{3} (p_l(t-\tau))^{-n_l/2}\, E_c(t-\tau,x,\xi) |X_3(t-\tau)-\xi_3|^{\alpha_3}\, d\xi \le$$

$$\le C\,(p_3(t-\tau))^{-|k_3|/2+\alpha_3/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \prod_{l=1}^{3} (p_l(t-\tau))^{-n_l/2}\, E_{c_1}(t-\tau,x,\xi)\, d\xi \le C\,(t-\tau)^{-5|k_3|/2+5\alpha_3/2}.$$

Для випадку $|k_3| = 1$ маємо оцінку

$$|K_1| \le C(t-\tau)^{-1+(5\alpha_3-3)/2}, \quad 0 \le \tau < t \le T, \;\; x \in B_R, \tag{27}$$

яка є достатньою, якщо $\alpha_3 > 3/5$.

Оцінимо K_2. При $|k_3| = 1$ маємо

$$|K_2| \le \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2Rr}} \left|\partial_{x_3}^{k_3} G(t,x;\tau,\xi)\right| \left|\Delta_{\xi}^{\xi^{(2)}(t-\tau)} f(\tau,\xi)\right| d\xi \Big| \le$$

$$\le 2CM(p_3(t-\tau))^{-1/2} \exp\Big\{-\frac{c}{2}\frac{r^2R^2}{p_3(t-\tau)}\Big\} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \prod_{l=1}^{3} (p_l(t-\tau))^{-n_l/2} E_{c/2}(t-\tau,x,\xi)\, d\xi,$$

звідки

$$|K_2| \le C\,(t-\tau))^{-1+(5\alpha_3-3)/2}, \quad 0 \le \tau < t \le T, \;\; x \in B_R. \tag{28}$$

З оцінок (27) і (28) з $\alpha_3 > 3/5$ та зображення (26), оскільки R – довільне додатне число, оделжуємо формулу (14) для всіх $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$.

Доведемо формулу (15) для $t \in [t_1, T]$, де $t_1 > 0$. Для цього розглянемо сукупність функцій

$$v_h(t,x) \equiv \int\limits_0^{t-h} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi, \quad 0 < t_1 \le t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < h < t_1. \tag{29}$$

Маємо

$$\partial_t v_h(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;t-h,\xi) f(t-h,\xi)\, d\xi + \int\limits_0^{t-h} \partial_t \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi \Bigg) d\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;t-h,\xi) f(t-h,\xi)\, d\xi + \int\limits_0^{t-h} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi \equiv I_h + J_h,$$

$$0 < t_1 \le t \le T, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < h < t_1. \tag{30}$$

Щоб обгрунтувати можливість диференціювання за t під знаком інтеграла по $\mathbb{R}^n$, досить довести, що інтеграл по $\mathbb{R}^n$ з J_h (позначимо його через J^0) збігається рівномірно щодо $t \in [t_2 - h/3, \min\{t_2 + h/3, T\}]$, де t_2 – довільно фіксоване число з $[t_1, T]$, для будь-яких фіксованих $\tau \in (0, t_2 - 2h/3]$ і $x \in \mathbb{R}^n$.

Запишемо

$$J^0 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t,x;\tau,\xi) \Delta_{\xi}^{\xi^{(2)}(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \Big(\partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} G(t,x;\tau,\xi) d\xi_3 \Big) \Delta_{\xi^{(2)}(t-\tau)}^{\xi^{(1)}(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi_1\, d\xi_2 +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \Big(\partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G(t,x;\tau,\xi)\, d\xi_2\, d\xi_3 \Big) \Delta_{\xi^{(1)}(t-\tau)}^{X(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi_1 +$$
$$+ \partial_t \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) d\xi \Big) f(\tau, X(t-\tau)) \equiv J^1 + J^2 + J^3 + J^4. \tag{31}$$

Оскільки G – ФРЗК для рівняння (1), то

$$\partial_t G(t,x;\tau,\xi) = \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} G(t,x;\tau,\xi) + \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}} G(t,x;\tau,\xi) +$$
$$+ \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} G(t,x;\tau,\xi) + b \sum_{j=1}^{n_1} x_{1j} \partial_{x_{1j}} G(t,x;\tau,\xi),$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{32}$$

Інтегруючи рівність (32), з урахуванням (4)–(6) отримуємо такі рівності

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t,x;\tau,\xi) d\xi = \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) d\xi +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) d\xi + \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) d\xi +$$
$$+ b \sum_{j=1}^{n_1} x_{1j} \partial_{x_{1j}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) d\xi = 0, \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^n; \tag{33}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_t G(t,x;\tau,\xi) d\xi_2 d\xi_3 = \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} G(t,x;\tau,\xi) d\xi_2 d\xi_3 +$$
$$+ b \sum_{j=1}^{n_1} x_{1j} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_{1j}} G(t,x;\tau,\xi) d\xi_2 d\xi_3, \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi_1 \in \mathbb{R}^{n_1}; \tag{34}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_t G(t,x;\tau,\xi) d\xi_3 = \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_{2j}} G(t,x;\tau,\xi) d\xi_3 +$$
$$+ \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} G(t,x;\tau,\xi) d\xi_3 + b \sum_{j=1}^{n_1} x_{1j} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_{1j}} G(t,x;\tau,\xi) d\xi_3,$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (\xi_1, \xi_2) \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}. \tag{35}$$

З (32), враховуючи оцінки (2), отримуємо

$$
\begin{aligned}
|\partial_t G(t,x;\tau,\xi)| \le \sum_{j=1}^{n_2} |x_{1j}|\, |\partial_{x_{2j}} G(t,x;\tau,\xi)| + \sum_{j=1}^{n_3} |x_{2j}|\, |\partial_{x_{3j}} G(t,x;\tau,\xi)| + \\
+ + \sum_{j,s=1}^{n_1} |a_{js}|\, |\partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} G(t,x;\tau,\xi)| + |b| \sum_{j=1}^{n_1} |x_{1j}|\, |\partial_{x_{1j}} G(t,x;\tau,\xi)| \le \\
\le C \prod_{l=1}^{3} (p_l(t-\tau))^{-n_l/2}\, E_c(t-\tau,x,\xi) \,\Big(\sum_{j=1}^{n_2} |x_{1j}| (p_2(t-\tau))^{-1/2} + \\
+ \sum_{j=1}^{n_3} |x_{2j}| (p_3(t-\tau))^{-1/2} + (p_1(t-\tau))^{-1} + \sum_{j=1}^{n_1} |x_{1j}| (p_1(t-\tau))^{-1/2} \Big) \le \\
\le C(1+|x_1|+|x_2|) \prod_{l=1}^{3} p_l(t-\tau))^{-n_l/2} E_c(t-\tau,x,\xi) \times \\
\times \Big((p_1(t-\tau))^{-1} + (p_2(t-\tau))^{-1/2} + (p_3(t-\tau))^{-1/2} \Big).
\end{aligned} \tag{36}
$$

Оцінимо ліву частину рівності (34). Крім оцінок (2) використовуватимемо (9). Маємо

$$
\begin{aligned}
\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_t G(t,x;\tau,\xi) d\xi_2 d\xi_3 \Big| \le \sum_{j,s=1}^{n_1} |a_{js}| \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} |\partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} G(t,x;\tau,\xi)|\, d\xi_2 d\xi_3 \Big| + \\
+ |b| \sum_{j=1}^{n_1} |x_{1j}| \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} |\partial_{x_{1j}} G(t,x;\tau,\xi)|\, d\xi_2 d\xi_3 \Big| \le C\,(1+|x_1|) \times \\
\times (p_1(t-\tau))^{-1-n_1/2}\, E_c^1(t-\tau, X_1(t-\tau), \xi_1).
\end{aligned} \tag{37}
$$

Аналогічно з (35) маємо

$$
\begin{aligned}
\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_t G(t,x;\tau,\xi) d\xi_3 \Big| = \sum_{j=1}^{n_2} |x_{1j}| \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} |\partial_{x_{2j}} G(t,x;\tau,\xi)| d\xi_3 \Big| + \\
+ \sum_{j,s=1}^{n_1} |a_{js}| \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} |\partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} G(t,x;\tau,\xi)| d\xi_3 \Big| + |b| \sum_{j=1}^{n_1} |x_{1j}| \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} |\partial_{x_{1j}} G(t,x;\tau,\xi)| d\xi_3 \Big| \le \\
\le C\,(1+|x_1|) \Big((p_1(t-\tau))^{-1} + (p_2(t-\tau))^{-1/2} \Big) \times \\
\times E_c^1(t-\tau, X_1(t-\tau), \xi_1) E_c^2(t-\tau, X_2(t-\tau), \xi_2).
\end{aligned} \tag{38}
$$

Перейдемо до оцінки інтегралів із зображення (31). Вважаючи $x \in B_R$, подамо J^1 вигляді суми $J^1 := J_1^1 + J_2^1$, де

$$
J_1^1 = \int\limits_{B_{2Rr}} \partial_t G(t,x;\tau,\xi) \Delta_\xi^{\xi^{(2)}(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi, \quad J_2^1 = \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2Rr}} \partial_t G(t,x;\tau,\xi) \Delta_\xi^{\xi^{(2)}(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi.
$$

За допомогою оцінок (2), нерівностей (9) і умови $\mathbf{\Gamma}$ отримуємо

$$
|J_1^1| \le \Big| \int\limits_{B_{2Rr}} |\partial_t G(t,x;\tau,\xi)|\, \Big| \Delta_\xi^{\xi^{(2)}(t-\tau)} f(\tau,\xi) \Big|\, d\xi \Big| \le
$$

$$\leq C\,(1+|x_1|+|x_2|)\Big((p_1(t-\tau))^{-1}+(p_2(t-\tau))^{-1/2}+(p_3(t-\tau))^{-1/2}\Big)\times$$
$$\times\int\limits_{B_{2Rr}}\prod_{l=1}^{3}(p_l(t-\tau))^{-n_l/2}\,E_c(t-\tau,x,\xi)\,|X_3(t-\tau)-\xi_3|^{\alpha_3}d\xi\leq$$
$$\leq C\,(1+|x_1|+|x_2|)\Big((p_1(t-\tau))^{-1}+(p_2(t-\tau))^{-1/2}+(p_3(t-\tau))^{-1/2}\Big)\times$$
$$\times(p_3(t-\tau))^{\alpha_3/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\prod_{l=1}^{3}(p_l(t-\tau))^{-n_l/2}\,E_{c_1}(t-\tau,x,\xi)\,d\xi\leq$$
$$\leq C\,(1+|x_1|+|x_2|)\Big((p_1(t-\tau))^{-1}+(p_2(t-\tau))^{-1/2}+(p_3(t-\tau))^{-1/2}\Big)\times$$
$$\times(p_3(t-\tau))^{\alpha_3/2}\leq C\,(t-\tau)^{-1+(5\alpha_3-3)/2},\quad 0\leq\tau<t\leq T,\quad x\in B_R; \tag{39}$$

$$|J_2^1|\leq\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2Rr}}|\partial_t G(t,x;\tau,\xi)|\,\Big|\Delta_\xi^{\xi^{(2)}(t-\tau)}f(\tau,\xi)\Big|\,d\xi,\Big|\leq$$
$$\leq 2CM\,(1+|x_1|+|x_2|)\Big((p_1(t-\tau))^{-1}+(p_2(t-\tau))^{-1/2}+(p_3(t-\tau))^{-1/2}\Big)\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\prod_{l=1}^{3}(p_l(t-\tau))^{-n_l/2}\,E_{c/2}(t-\tau,x,\xi)\,\exp\left\{-\frac{c}{2}\frac{r^2R^2}{p_3(t-\tau)}\right\}d\xi\leq$$
$$\leq C\,(t-\tau)^{-1+(5\alpha_3-3)/2},\quad 0\leq\tau<t\leq T,\quad x\in B_R. \tag{40}$$

Оцінимо $J^2:=J_1^2+J_2^2$, де

$$J_1^2=\int\limits_{B'_{2Rr}}\Big(\partial_t\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}G(t,x;\tau,\xi)d\xi_3\Big)\,\Delta^{\xi^{(1)}(t-\tau)}_{\xi^{(2)}(t-\tau)}f(\tau,\xi)\,d\xi_1\,d\xi_2,$$
$$J_2^1=\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}\setminus B'_{2Rr}}\Big(\partial_t\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}G(t,x;\tau,\xi)d\xi_3\Big)\,\Delta^{\xi^{(1)}(t-\tau)}_{\xi^{(2)}(t-\tau)}f(\tau,\xi)\,d\xi_1\,d\xi_2,$$

а B'_R – куля радіуса R в $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$. Маємо

$$|J_1^2|\leq\Big|\int\limits_{B'_{2Rr}}\Big|\partial_t\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}G(t,x;\tau,\xi)d\xi_3\Big|\,\Big|\Delta^{\xi^{(1)}(t-\tau)}_{\xi^{(2)}(t-\tau)}f(\tau,\xi)\Big|\,d\xi_1\,d\xi_2\Big|\leq$$
$$\leq C\,(1+|x_1|)\prod_{l=1}^{2}(p_l(t-\tau))^{-n_l/2}\Big((p_1(t-\tau))^{-1}+(p_2(t-\tau))^{-1/2}\Big)\times$$
$$\times\int\limits_{B'_{2Rr}}E_c^1(t-\tau,X_1(t-\tau),\xi_1)E_c^2(t-\tau,X_2(t-\tau),\xi_2)\,|X_2(t-\tau)-\xi_2|^{\alpha_2}\,d\xi_1\,d\xi_2\leq$$
$$\leq C\,(t-\tau)^{-1+(3\alpha_2-1)/2},\quad 0\leq\tau<t\leq T,\quad x\in B_R; \tag{41}$$

$$|J_2^2|\leq\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}\setminus B'_{2Rr}}\Big|\partial_t\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}G(t,x;\tau,\xi)d\xi_3\Big|\,\Big|\Delta^{\xi^{(1)}(t-\tau)}_{\xi^{(2)}(t-\tau)}f(\tau,\xi)\Big|\,d\xi_1\,d\xi_2\Big|\leq$$
$$\leq 2CM\,(1+|x_1|)(p_2(t-\tau))^{-1/2}\exp\left\{-\frac{c}{2}\frac{r^2R^2}{p_2(t-\tau)}\right\}\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \prod_{l=1}^{2} (p_l(t-\tau))^{-n_l/2} \, E^1_{c/2}(t-\tau, X_1(t-\tau), \xi_1) \, E^2_{c/2}(t-\tau, X_2(t-\tau), \xi_2) d\xi_1 \, d\xi_2 \le$$

$$\le C\,(t-\tau)^{-1+(3\alpha_2-1)/2}, \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad x \in B_R. \tag{42}$$

Аналогічно, вважаючи $x \in B_R$, оцінюємо інтеграл $J^3 := J^3_1 + J^3_2$, де

$$I^3_1 = \int\limits_{B''_{2Rr}} \Big(\partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G(t,x;\tau,\xi)\, d\xi_2\, d\xi_3 \Big) \, \Delta^{\xi^{(2)}(t-\tau)}_{X(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi_1,$$

$$J^3_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1} \setminus B''_{2Rr}} \Big(\partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G(t,x;\tau,\xi)\, d\xi_2\, d\xi_3 \Big) \, \Delta^{\xi^{(2)}(t-\tau)}_{X(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi_1,$$

а B''_R – куля радіуса R в $\mathbb{R}^{n_1}$. Маємо

$$|J^3_1| \le \Big| \int\limits_{B''_{2Rr}} \Big| \partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G(t,x;\tau,\xi)\, d\xi_2\, d\xi_3 \Big| \, \Big| \Delta^{\xi^{(2)}(t-\tau)}_{X(t-\tau)} f(\tau,\xi) \Big| \, d\xi_1 \Big| \le$$

$$\le C\,(1+|x_1|) \int\limits_{B''_{2Rr}} (p_1(t-\tau))^{-1-n_1/2} E^1_c(t-\tau, X_1(t-\tau), \xi_1)\, |X_1(t-\tau) - \xi_1|^{\alpha_1}\, d\xi_1 \le$$

$$\le C\,(t-\tau)^{-1+\alpha_1/2}, \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad x \in B_R; \tag{43}$$

$$|J^3_2| \le \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1} \setminus B''_{2Rr}} \Big| \partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G(t,x;\tau,\xi)\, d\xi_2\, d\xi_3 \Big| \, \Big| \Delta^{\xi^{(2)}(t-\tau)}_{X(t-\tau)} f(\tau,\xi) \Big| \, d\xi_1 \Big| \le$$

$$\le 2CM\,(1+|x_1|) \exp\left\{ -\frac{c}{2} \frac{r^2 R^2}{p_1(t-\tau)} \right\} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1} \setminus B''_{2Rr}} (p_1(t-\tau))^{-1-n_1/2} \, E^1_{c/2}(t-\tau, X_1(t-\tau), \xi_1)\, d\xi_1 \le$$

$$\le C\,(t-\tau)^{-1+\alpha_1/2}, \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad x \in B_R. \tag{44}$$

На підставі (33) $J^4 = 0$.

З (31) та оцінок (39)–(44) випливає оцінка $J^0 \le C\,(t-\tau)^{-1+\alpha/2}$, $0 \le \tau < t \le T$, $x \in B_R$, якій $\alpha = \min\{\alpha_1, 3\alpha_2 - 3, 5\alpha_3 - 3\}$. Ця оцінка забезпечує рівномірну збіжність інтеграла J_h для $x \in B_R$. Оскільки R – довільне, то це твердження правильне для $x \in \mathbb{R}^n$.

Залишилось перевірити, що $\lim\limits_{h \to 0} I_h = f(t,x)$. Це робиться аналогічно, як у випадку обмежених коефіцієнтів [4].

2) Рівність нулю відповідних похідних випливає з оцінок $I^{(k_l)}$, $l \in \{1,2,3\}$. □

3 Висновки

Для виродженого параболічного рівняння другого порядку типу Колмогорова зі сталими коефіцієнтами в групі старших і зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів досліджено властивості об'ємного потенціалу за просторовими і часовою змінними. Такі властивості важливі для встановлення теорем про інтегральні зображення розв'язків та коректну розв'язність задачі Коші.

Список літератури

[1] Zabolotko T. O., Ivasyshen S. D., Pasichnyk H. S. *On fundamental solution of the Cauchy problem for somo paraboic equation with growing lowest coefficients and some of its applications* Nauk. Visnyk Cherniv. Univer. 2012, **2** (2–3), 81–89. (in Ukrainian)

[2] Babych O. O., Ivasyshen S. D., Pasichnyk H. S. *Fundamental solution of the Cauchy problem for degenerate paraboic equation with growing lowest coefficients.* Nauk. Visnyk Cherniv. Univer. 2011, **1** (1–2), 13–24. (in Ukrainian)

[3] Ivasyshen S. D., Pasichnyk H. S. *Fundamental solution of the Cauchy problem for paraboic equation with growing lowest coefficients.* Proceedings of Institute of Mathematics NAS of Ukraine. 2014. **11** (2), 126–153. (in Ukrainian)

[4] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhäuser, Basel, 2004. (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. **152**).

[5] Medynsky I., Pasichnyk H. *On the properties of the volume potential for one parabolic equation with growing lowest coefficients.* Coll. Scientific Papers "Current problems of mechanics and mathematics" 2023. 349–350. – URL: http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/proceedings.mpmm2023.pdf. (in Ukrainian)

[6] Medynsky I., Pasichnyk H. On the properties of solutions of one equation of the Kolmogorov type, the coefficients of which are increasing functions. Proc. of the Intern. Conf. "Mathematics and information technologies", Chernivtsi, Ukraine, September 28-–30, 2023, Chernivtsi National University, Chernivtsi, 2023, 265–266. – URL: https://fmi.chnu.edu.ua/media/qhufs0d5/materialy-mizhnorodnoi-naukovoi-konferentsii-fmi55.pdf.

Надійшло 01.11.2023

Medynsky I. P., Pasichnyk H. S. *The properties of the volume potential for one parabolic equation with growing lowest coefficients*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 2 (2023), 197–210.

The class of equations considered in the paper is a combination of two classes of equations: a degenerate parabolic equation of the Kolmogorov type and a parabolic equation with increasing coefficients in the group of younger members.Such a combination occurs in the problems of the theory of stochastic processes where, in the case of a normal Markov process, the Kolmogorov-Fokker-Planck equation has a similar form. The coefficients of this equations are constant in the group of principal terms and ones are increasing functions in the group of lowest terms. The article is devoted to the study of the properties of the volume potential, the kernel of which is the fundamental solution of the Cauchy problem for such an equation. Estimates of the fundamental solution of the Cauchy problem have a more complex structure than in the case of the classical Kolmogorov equation. These properties concern the existence of the derivatives included in the equation. They are used to establish theorems on the integral representations of solutions of the Cauchy problem and theorems on the correct solvability of the Cauchy problem in the corresponding classes of functional spaces. Such studies are carried out in this work. The obtained results are new and published for the first time.