Лопушанська Г. П., М'яус О. М., Пасічник О. В.

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ПРО ВИЗНАЧЕННЯ БАГАТЬОХ НЕВІДОМИХ ІЗ РОЗПОДІЛІВ ТИПУ ШВАРЦА

Знайдено достатні умови однозначної розв'язності оберненої задачі знаходження m невідомих функцій із розподілів типу Шварца у правій частині рівняння дифузії з дробовою похідною Джрбашяна-Нерсесяна-Капуто за часом при використанні m інтегральних за часом умов перевизначення. Задача зводиться до розв'язування лінійного операторного рівняння другого роду стосовно невідомого розв'язку задачі Коші, неперервного зі значеннями у просторі розподілів Шварца, і лінійної неоднорідної алгебричної системи рівнянь для знаходження виразів невідомих функцій через нього.

Ключові слова і фрази: рівняння дробової дифузії, похідна дробового порядку, обернена задача, розподіл типу Шварца, інтегральна за часом умова перевизначення.

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна,
Національний університет "Львівська політехніка" , Львів, Україна
e-mail: *lhp@ukr.net, myausolya2016@gmail.com, olena.pasichnyk@lnu.edu.ua*

Вступ

Використовуючи різні додаткові умови, у [1, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14, 16, 17, 18, 19] та інших працях розглянуто обернені задачі на визначення невідомих правих частин у рівняннях дифузії з дробовою похідною за часом.

У цій праці, використовуючи інтегральні за часом умови перевизначення, вивчаємо обернену задачу про знаходження невідомих розподілів типу Шварца у правій частині рівняння дифузії з дробовою похідною за часом. Узагальнюємо результати [11] про класичну розв'язність задачі з невідомими двома функціями із просторів типу Шварца швидко спадаючих на нескінченності функцій у правій частині такого рівняння.

Відзначимо, що інтегральні за часом умови перевизначення використовувались при дослідженні різних обернених задач у різних функційних просторах, зокрема, дробової дифузії: у [9, 10, 12] з невідомим, залежним від часу, множником у правій частині рівняння, у [4] – з невідомим молодшим коефіцієнтом, у [9] – з невідомими початковими даними розв'язку.

УДК 517.95
2010 *Mathematics Subject Classification:* 80A23,35S10.

1 Допоміжні факти і формулювання задачі.

Нехай $Q = \mathbb{R}^n \times (0,T]$, α – мультиіндекс, $S(\mathbb{R}^n)$ – простір швидко спадаючих на безмежності нескінченно диференційовних функцій (простір Шварца), $S_\gamma(\mathbb{R}^n)$ $(\gamma > 0)$ є простором типу $S(\mathbb{R}^n)$ [3, с. 201]:

$$S_\gamma(\mathbb{R}^n) = \{v \in S(\mathbb{R}^n) : |D^\alpha v(x)| \le C_\alpha e^{-a|x|^{\frac{1}{\gamma}}},\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \ \forall\, \alpha\}$$

із деякими додатними сталими $C_\alpha = C_\alpha(v)$ і $a = a(v)$. Відомо [3, с. 202, 211], що $S_\gamma(\mathbb{R}^n) = \cup_{a>0} S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, де

$$S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) = \{v \in S(\mathbb{R}^n) : |D^\alpha v(x)| \le C_{\alpha,\delta} e^{-(a-\delta)|x|^{\frac{1}{\gamma}}},\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \ \forall\, \alpha,\ \ \forall\, \delta > 0\}$$

із деякими додатними сталими $C_{\alpha,\delta} = C_{\alpha,\delta}(v)$, $S_{\gamma,(a_2)}(\mathbb{R}^n) \subset S_{\gamma,(a_1)}(\mathbb{R}^n)$ при $a_1 < a_2$, а також

$$S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) = \{v \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : ||v||_{k,(a)} = \sup_{|\alpha|\le k, x\in\mathbb{R}^n} e^{a(1-\frac{1}{k})|x|^{\frac{1}{\gamma}}} |D^\alpha v(x)| < +\infty\ \ \forall k \in \mathbb{N}, k \ge 2\}.$$

Зауважимо, що

$$||v||_{k,(a)} \le ||v||_{k+p,(a)}\quad \forall k, p \in \mathbb{N},\ k \ge 2, v \in S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n).$$

Послідовність $v_m(x)$ збігається при $m \to +\infty$ до нуля у просторі $S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, якщо для кожного мультиіндекса α послідовність $D^\alpha v_m(x)$ збігається при $m \to +\infty$ до нуля рівномірно на довільному компакті $|x| \le C < +\infty$ і норми $||v_m||_{k,(a)}$ обмежені для всіх $m, k \in \mathbb{N},\ k \ne 1$.

Нехай $S_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) = \{v \in C(\bar{Q}) : v|_{t=T} = 0,\ v(\cdot,t) \in S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)\ \ \forall t \in [0,T]\}$.

Через E' позначаємо простір лінійних неперервних функціоналів на E, а через (f,φ) – значення розподілу $f \in E'$ на основній функції $\varphi \in E$.

При $u \in \mathcal{S}'_\gamma(\bar{Q})$, $\varphi \in \mathcal{S}_\gamma(\mathbb{R}^n)$ формулою

$$\big((u(x,t),\varphi(x)),\eta(t)\big) = \big(u(x,t),\varphi(x)\eta(t)\big)\quad \forall \eta \in C[0,T]$$

визначено розподіл $\big(u(x,\cdot),\varphi(x)\big) \in C'[0,T]$ і кажемо, що розподіл u неперервний за змінною $t \in [0,T]$, якщо $\big(u(x,\cdot),\varphi(x)\big) \in C[0,T]$ для кожної основної функції φ. Вводимо відповідні простори таких розподілів

$$\mathcal{S}'_{\gamma,C}(\bar{Q}) = \{f \in \mathcal{S}'_\gamma(\bar{Q}) : \big(f(x,\cdot),\varphi(x)\big) \in C[0,T]\ \ \forall \varphi \in \mathcal{S}_\gamma(\mathbb{R}^n)\},$$
$$\mathcal{S}'_{\gamma,(a),C}(\bar{Q}) = \{f \in \mathcal{S}'_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) : \big(f(x,\cdot),\varphi(x)\big) \in C[0,T]\ \ \forall \varphi \in \mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Подібно при $u \in \mathcal{S}'_\gamma(\bar{Q})$, $\eta \in C[0,T]$ визначаємо розподіл $(u(\cdot,t),\eta(t)) \in S'_\gamma(\mathbb{R}^n)$:

$$\big((u(x,t),\eta(t)),\varphi(x)\big) = \big(u(x,t),\varphi(x)\eta(t)\big)\quad \forall \varphi \in \mathcal{S}_\gamma(\mathbb{R}^n).$$

Через $f * g$ позначаємо згортку функцій f і g, $(g \hat{*} \varphi)(x) = \big(g(\xi),\varphi(x+\xi)\big)$,

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}, & \lambda > 0 \\ f'_{1+\lambda}(t), & \lambda \le 0 \end{cases},$$

де $\Gamma(\lambda)$ – гама-функція, $\theta(t)$ – функція Хевісайда.

Похідну Рімана-Ліувіля $v^{(\beta)}(t)$ порядку $\beta > 0$ визначають формулою

$$v^{(\beta)}(t) = f_{-\beta}(t) * v(t),$$

а похідну Джрбашяна-Нерсесяна-Капуто дробового порядку (регуляризовану дробову похідну) як

$D^\beta v(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\beta-1} \frac{d^m}{d\tau^m} v(\tau) d\tau$ при $m-1 < \beta < m,\ m \in \mathbb{N},\ D^1 v = \frac{dv}{dt}$.

Нехай $A(x,D)$ – лінійний еліптичний диференціальний вираз другого порядку

$$A(x,D)u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} + a(x)u,$$

і далі вважаємо, що його коефіцієнти $a_{ij}, a_i, a, \quad i,j \in \{1,\ldots,n\}$ є мультиплікаторами у просторі $S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ (добутки їх і всіх їхніх похідних із функціями з $S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ належать $S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$), $C_{2,\beta}(\bar{Q}) = \{v \in C(\bar{Q}) : Av, D_t^\beta v \in C(Q)\}$.

При $\beta \in (0,1]$ вивчаємо обернену задачу

$$D_t^\beta u - A(x,D)u = \sum_{l=1}^m R_l(x) g_l(t) + F(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,0) = F_1(x), \ \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\eta_l(t)dt = \Phi_l(x), \ \ x \in \mathbb{R}^n, \ \ l \in \{1,\ldots,m\} \tag{3}$$

про визначення набору функцій $(u, R_1, \ldots, R_m)$ при заданих g_l, Φ_l, η_l ($l \in \{1,\ldots,m\}$), F, F_1.

Позначаємо через $\widehat{A}(x,D)$ формально спряжений до $A(x,D)$ оператор,

$$(L^{reg}v)(x,t) = D_t^\beta v(x,t) - Av(x,t),$$

$$(\widehat{L}v)(x,t) = f_{-\beta}(t) \hat{*} v(x,t) - \widehat{A}v(x,t), \quad (x,t) \in Q.$$

Означення 1. *Функція $u \in \mathcal{S}'_{\gamma,C}(\bar{Q})$ ($u \in \mathcal{S}'_{\gamma,(a),C}(\bar{Q})$) називається розв'язком задачі Коші (1), (2), якщо вона задовольняє тотожність*

$$\big(u, \widehat{L}\psi\big) = \sum_{l=1}^m \Big(R_l(y), \int_0^T \eta_l(t)\psi(y,t)dt\Big) + (F,\psi) + \Big(F_1(y) f_{1-\beta}(t), \psi(y,t)\Big) \\ \forall \psi \in \mathcal{S}_\gamma(\bar{Q}) \quad (\forall \psi \in \mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})). \tag{4}$$

Означення грунтується на формулі Гріна

$$\int_Q v(x,\tau)(\widehat{L}\psi)(x,\tau)dxd\tau = \int_Q (L^{reg}v)(x,\tau)\psi(x,\tau)dxd\tau \\ + \int_{\mathbb{R}^n} v(x,0)\big(f_{1-\beta}(\tau), \psi(x,\tau)\big)dx, \quad v,\psi \in C_{2,\beta}(\bar{Q}), \ \ v|_{t=T} = 0. \tag{5}$$

Означення 2. *Набір* $(u, R_1, \ldots, R_m) \in \mathcal{S}'_{\gamma,C}(\bar{Q}) \times [\mathcal{S}'_\gamma(\mathbb{R}^n)]^m$ *(відповідно* $(u, R_1, \ldots, R_m) \in \mathcal{S}'_{\gamma,(a),C}(\bar{Q}) \times [\mathcal{S}'_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n))]^m$*) називається розв'язком оберненої задачі (1)-(3), якщо він задовольняє тотожність (4) для кожної* $\psi \in \mathcal{S}_\gamma(\bar{Q})$ *(відповідно* $\psi \in \mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$*) і умови (3) в сенсі*

$$\frac{1}{T}\int_0^T \big(u(x,t), \varphi(x)\big)\eta_l(t)dt = (\Phi_l, \varphi), \;\; l \in \{1, \ldots, m\} \;\; \forall \varphi \in \mathcal{S}_\gamma(\mathbb{R}^n) \;\; (\varphi \in \mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)). \quad (6)$$

Означення 3. *Пара функцій* $(G_0(x,t,y,\tau), G_1(x,t,y))$ *називається вектор-функцією Гріна задачі Коші*

$$\begin{gathered} D_t^\beta u - A(x,D)u = F_0(x,t), \quad (x,t) \in Q, \\ u(x,0) = F_1(x), \;\; x \in \mathbb{R}^n, \end{gathered} \quad (7)$$

якщо за достатньо регулярних даних (обмеженої, неперервної і гельдерової за просторовими змінними для кожного t *функції* F_0*, обмеженої і гельдерової* F_1*) функція*

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)F_0(y,\tau)dy + \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_1(x,t,y)F_1(y)dy, \quad (x,t) \in \bar{Q} \quad (8)$$

є класичним (із $C_{2,\beta}(\bar{Q})$*) розв'язком задачі Коші (7).*

Вектор-функція Гріна задачі Коші існує [2, 8, 13, 15], причому

$$G_1(x,t,y) = \int\limits_0^t f_{1-\beta}(\tau)G_0(x,t,y,\tau)d\tau, \quad (x,t) \in Q,$$

правильні [8] оцінки компонент вектор-функції Гріна

$$\begin{gathered} |D_x^\alpha G_0(x,t,y,\tau)| \leq Ct^{-\beta\frac{n+|\alpha|}{2}+\beta-1}e^{-c(|x-y|(t-\tau)^{-\frac{\beta}{2}})^{\frac{2}{2-\beta}}}\Psi_{n+|\alpha|-2}(|x-y|(t-\tau)^{-\frac{\beta}{2}}), \\ |D_x^\alpha G_1(x,t,y)| \leq Ct^{-\beta\frac{n+|\alpha|}{2}}e^{-c(|x-y|t^{-\frac{\beta}{2}})^{\frac{2}{2-\beta}}}\Psi_{n+|\alpha|-2}(|x-y|t^{-\frac{\beta}{2}}), \end{gathered} \quad (9)$$

де $\Psi_m(z) = \begin{cases} 1, & m<0 \\ 1+|ln|z||, & m=0 \\ |z|^{-m}, & m>0 \end{cases}$ при $|z| < 1$, $\quad \Psi_m(z) = \Psi_m(1)$ при $|z| > 1$, і, наприклад, $c < (2-\beta)\Big(\frac{\beta^\beta}{4}\Big)^{\frac{1}{2-\beta}}$, якщо $A(D)$ – оператор Лапласа. Тут і далі c, C, C_k $(k \in \mathbb{N})$ – додатні сталі.

Позначаємо

$$(\widehat{G}_0\varphi)(y,t,\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) G_0(x,t,y,\tau)dx,$$

$$(\widehat{G}_1\varphi)(y,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) G_1(x,t,y)dx,$$

$$(\widehat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,\tau) = \int\limits_{\tau}^{T} dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x,t) G_0(x,t,y,\tau)dx,$$

$$(\widehat{\mathcal{G}}_1\varphi)(y) = \int\limits_{0}^{T} dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x,t) G_1(x,t,y)dx,$$

$$y \in \mathbb{R}^n, \ \ 0 \le \tau < t \le T.$$

Теорема 1. *За припущення*

$(A):\quad \gamma \ge 1 - \frac{\beta}{2}$, $F \in \mathcal{S}'_\gamma(\bar{Q})$, $F_1, R_l \in \mathcal{S}'_\gamma(\mathbb{R}^n)$, $g_l \in C[0,T]$, $l = \overline{0,m}$

існує єдиний розв'язок $u \in \mathcal{S}'_{\gamma,C}(\bar{Q})$ задачі Коші (1), (2). Він визначений формулою

$$\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big) = \int\limits_0^t \Big(\sum_{l=1}^m R_l(\cdot)g_l(\tau) + F(\cdot,\tau), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\Big)d\tau + \Big(F_1(\cdot), (\widehat{G}_1\varphi)(\cdot,t)\Big), \tag{10}$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}_\gamma(\mathbb{R}^n), \ t \in [0,T].$$

За припущення

$(A'):\quad \gamma \ge 1,\ 0 < aT^{\frac{\beta}{2\gamma}} \le c,\ F \in \mathcal{S}'_{\gamma,(a),C}(\bar{Q})$, $F_1, R_l \in \mathcal{S}'_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, $g_l \in C[0,T]$, $l = \overline{0,m}$

існує єдиний розв'язок $u \in \mathcal{S}'_{\gamma,(a),C}(\bar{Q})$ задачі Коші (1), (2). Він визначений формулою (10) для довільних $\varphi \in \mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, $t \in [0,T]$.

Доведення. Твердження теореми є наслідком теореми 1 із [9].

2 Розв'язок оберненої задачі

Нехай $u \in \mathcal{S}'_{\gamma,(a),C}(\bar{Q})$ – розв'язок задачі Коші (1), (2), $\varphi \in \mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, $\eta_l \in C^1[0,T]$,

$$k_{l,j} = k_{l,j}(T) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T g_l(s)\eta_j(s)ds, \quad N_j = N_j(T) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\eta_j(t)dt.$$

Зауважимо, що

$$\int\limits_0^T \big(Au(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\eta_j(t)dt = \int\limits_0^T \big(u(\cdot,t),\widehat{A}\varphi(\cdot)\big)\eta_j(t)dt = \big(\Phi_j, \widehat{A}\varphi\big) = \big(A\Phi_j, \varphi\big),\ j \in \{1,\dots,m\}.$$

З означення розв'язку задачі при $\psi(x,t)=\varphi(x)\eta_j(t)$ та $\eta_j \in C^1[0,T]$ маємо

$$\int_0^T \big(u(x,t),\varphi(x)\big)(f_{-\beta}\hat{*}\eta_j)(t)dt - \int_0^T \big(Au(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\eta_j(t)dt$$

$$= \sum_{l=1}^m (R_l,\varphi)\int_0^T g_l(t)\eta_j(t)dt + \int_0^T \big(F(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\eta_j(t)dt + \big(F_1,\varphi\big)\int_0^T f_{1-\beta}\eta_j dt,\ j\in\{1,\dots,m\},$$

де $(f_{-\beta}\widehat{*}\eta)(t) = (f'_{1-\beta}\widehat{*}\eta)(t) = -\int\limits_t^T f_{1-\beta}(s-t)\eta'(s)ds$, а враховуючи умову (3), матимемо

$$\sum_{l=1}^m k_{l,j}(R_l,\varphi) = \frac{1}{T}\int_0^T \big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)(f_{-\beta}\hat{*}\eta_j)(t)dt$$
$$-\Big[(A\Phi,\varphi)+N_j(F_1,\varphi)+\frac{1}{T}\int_0^T \big(F(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\eta_j(t)dt\Big]\quad \forall\varphi\in\mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n),\quad j\in 1,\dots,m. \tag{11}$$

Одержали лінійну неоднорідну алгебричну систему рівнянь щодо невідомих $(R_l,\varphi),\ l\in 1,\dots,m$. Зокрема, у випадку

$(B):\quad k_{l,j} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T g_l(t)\eta_j(t)dt = \delta_{l,j}$, де $\delta_{l,j}$ – символи Кронекера,
$\eta_j\in C^1[0,T]$, $l,j\in\{1,\dots,m\}$

матимемо

$$(R_j,\varphi) = \frac{1}{T}\int_0^T \big(u(\cdot,s),\varphi(\cdot)\big)(f_{-\beta}\hat{*}\eta_j)(s)ds$$
$$-\Big[(A\Phi,\varphi)+N_j(F_1,\varphi)+\frac{1}{T}\int_0^T \big(F(\cdot,s),\varphi(\cdot)\big)\eta_j(s)ds\Big]\quad \forall\varphi\in\mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n),\quad j\in\{1,\dots,m\}. \tag{12}$$

За теоремою 1 за припущення (A') існує єдиний розв'язок задачі Коші (1), (2) і він має вигляд

$$\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big) = \int_0^t \Big(\sum_{j=1}^m R_j(\cdot)g_j(\tau)+F(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\Big)d\tau + \Big(F_1(\cdot),(\widehat{G}_1\varphi)(\cdot,t)\Big),$$
$$\forall\varphi\in\mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n),\ t\in[0,T]. \tag{13}$$

Підставляємо знайдені за формулами (12) функції R_j у (13). Одержуємо

$$\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big) = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^m \int_0^t g_j(\tau)d\tau\int_0^T \big(u(\cdot,s),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)(f_{-\beta}\hat{*}\eta_j)(s)ds$$
$$+\big(u_0(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big), \tag{14}$$

де

$$\big(u_0(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)=\int\limits_0^t \big(F(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)d\tau+\big(F_1(\cdot),(\widehat{G}_1\varphi)(\cdot,t)\big)$$

$$-\sum_{j=1}^m \int\limits_0^t g_j(\tau)\Big[\big(A\Phi(\cdot),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)+N_j\big(F_1(\cdot),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big) \tag{15}$$

$$+\frac{1}{T}\int\limits_0^T \big(F(\cdot,s),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)\eta_j(s)ds\Big]d\tau \quad \forall\varphi\in\mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n),\ t\in[0,T].$$

Припущення (C): $\gamma\ge 1,\ 0<aT^{\frac{\beta}{2\gamma}}\le c,\ F\in\mathcal{S}'_{\gamma,(a),C}(\bar{Q}),\ F_1,\Phi,A\Phi\in\mathcal{S}'_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n),$
$g_j\in C[0,T],\ \eta_j\in C^1[0,T],\ j\in\{1,\dots,m\}.$

Як у [9, лема 4] доводимо правильність наступного твердження.

Лема 1. *За припущень (B), (C) набір* $(u,R_1,\dots,R_m)\in\mathcal{S}'_{\gamma,(a),C}(\bar{Q})\times[\mathcal{S}'_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)]^m$ *є розв'язком оберненої задачі (1)-(3) тоді й тільки тоді, коли u задовольняє рівняння (14), а функції $R_j,\ j\in\{1,\dots,m\}$ визначені формулою (12).*

Припущення (D): функція $T\sum\limits_{j=1}^m \max\limits_{\tau\in[0,T]}|g_j(\tau)|\max\limits_{s\in[0,T]}|\eta'_j(s)|$ обмежена монотонно зростаючою функцією $b(T)$ на $[0,T_0]$ при деякому $T_0<\left(\frac{c}{a}\right)^{2\gamma/\beta}$.

Теорема 2. *За припущень (B), (C), (D) існує таке число $T_1\in[0,T_0]$, при якому обернена задача* (1)-(3) *однозначно розв'язна у просторі $\mathcal{S}'_{\gamma,(a),C}(\bar{Q})\times[\mathcal{S}'_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)]^m$. При цьому u – розв'язок рівняння (14), функції $R_j,\ j\in\{1,\dots,m\}$ визначені формулою (12).*

Доведення. Як при доведенні теореми 1 із [9] показуємо, що за припущення (C) функція $u_0\in\mathcal{S}'_{\gamma,(a),C}(\bar{Q})$ і подібно, що при $u\in\mathcal{S}'_{\gamma,(a),C}(\bar{Q})$ визначені формулою (12) функції $R_j\in\mathcal{S}'_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n),\ j\in\{1,\dots,m\}$. Враховуючи лему 1, залишається довести розв'язність рівняння (14) у кожному з просторів

$$M_{k,a}=\{v\in\mathcal{S}'_{\gamma,(a),C}(\bar{Q}):||v||_{k,(a)}=\max_{t\in[0,T]}\sup_{\varphi\in\mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)}\frac{\big|\big(v(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\big|}{||\varphi||_{k,(a)}}<+\infty\},\quad k\ge k_0,$$

де k_0 залежить від порядків сингулярностей заданих розподілів (див. [9, лема 1]).

На $M_{k,a}$ вводимо оператор

$$\big((Pv)(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)=\frac{1}{T}\sum_{j=1}^m\int\limits_0^t g_j(\tau)d\tau\int\limits_0^T\big(v(\cdot,s),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)(f_{-\beta}\hat{*}\eta_j)(s)ds$$
$$+\big(u_0(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\quad\forall\varphi\in\mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n).$$

Згідно з [9, лема 2], для довільної $\varphi\in\mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ функції $(\widehat{G}_0\varphi)(y,t,\tau)$ і $(\widehat{G}_1\varphi)(y,t)$ належать до $\mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$. При цьому за припущень щодо γ,a,T

$$||(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)||_{k,(a)}\le C(t-\tau)^{\beta-1}\,||\varphi||_{k,(a)},\quad 0\le\tau<t\le T,$$
$$||(\widehat{G}_1\varphi)(\cdot,t)||_{k,(a)}\le C\,||\varphi(\cdot,t)||_{k,(a)},\quad t\in[0,T].$$

Тому при $\varphi \in \mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, $v \in M_{k,a}$

$$\frac{|\big((Pv)(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)|}{||\varphi||_{k,(a)}} \le \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m}\int\limits_0^t |g_j(\tau)|d\tau \int\limits_0^T \frac{|\big(v(\cdot,s),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)|}{||\varphi||_{k,(a)}}\,|(f_{-\beta}\hat{*}\eta_j)(s)|ds$$

$$+\frac{|\big(u_0(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)|}{||\varphi||_{k,(a)}} \le \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m}\int\limits_0^t |g_j(\tau)|d\tau \int\limits_0^T \frac{||(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)||_{k,(a)}}{||\varphi||_{k,(a)}}\,|(f_{-\beta}\hat{*}\eta_j)(s)|ds\,||v||_{k,a}$$

$$+||u_0||_{k,a} \le \frac{C_1}{T}\sum_{j=1}^{m}\int\limits_0^t (t-\tau)^{\beta-1}|g_j(\tau)|d\tau \int\limits_0^T |(f_{-\beta}\hat{*}\eta_j)(s)|ds\,||v||_{k,a} + ||u_0||_{k,a},$$

а так як

$$|(f_{-\beta}\hat{*}\eta_j)(y,s)| = |\int_0^{T-s}\frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\eta_j'(\tau+s)d\tau| \le C_2(T-s)^{1-\beta}\max_{\tau\in[0,T]}|\eta_j'(\tau)|,$$

то

$$||Pv||_{k,a} \le C_3 T^{1-\beta}\sum_{j=1}^{m}\int\limits_0^t (t-\tau)^{\beta-1}|g_j(\tau)|d\tau\ \max_{s\in[0,T]}|\eta_j'(s)|\,||v||_{k,a} + ||u_0||_{k,a}$$

$$\le C_4 T^{1-\beta}\,t^{\beta}\sum_{j=1}^{m}\max_{\tau\in[0,T]}|g_j(\tau)|\ \max_{s\in[0,T]}|\eta_j'(s)|\,||v||_{k,a} + ||u_0||_{k,a}$$

$$\le C_4\,b(T)\,||v||_{k,a} + ||u_0||_{k,a}.$$

Враховуючи припущення (D), одержуємо однозначну розв'язність лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду (14) для всіх $\varphi \in \mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, $T \in (0,T_1)$ при деякому $T_1 \in (0,T_0]$.

Доведемо єдиність розв'язку задачі (1)-(3). Якщо є два її розв'язки

$$(u_1, R_{11},\dots,R_{m1}),\ \ (u_2,R_{12},\dots,R_{m2}),$$

то при $u = u_1 - u_2$, $R_j = R_{j1} - R_{j2}$, $j \in \{1,\dots,m\}$ набір $(u,R_1,\dots,R_m)$ задовольняє задачу

$$D_t^{\beta}u - A(x,D)u = \sum_{j=1}^{m}R_j(x)g_j(t)\quad (x,t)\in Q,$$

$$u(x,0)=0,\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T \big(u(x,t),\varphi(x)\big)\eta_l(t)dt = 0,\ \ l\in\{1,\dots,m\}\quad \forall\varphi\in\mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n).$$

Як вище, показуємо, що функція u задовольняє рівняння вигляду (14) із $u_0 = 0$,

$$(R_j,\varphi) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \big(u(\cdot,s),\varphi(\cdot)\big)(f_{-\beta}\hat{*}\eta_j)(s)ds\quad \forall\varphi\in\mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n),\ \ j\in\{1,\dots,m\}. \tag{16}$$

За доведеним у теоремі 2 $u = 0$, і тоді з (16) одержуємо $R_j = 0$, $j \in 1, \dots, m$.

Розглянемо загальний випадок (не припускаючи виконання умови (B)).

Припущення (E): $d = d(T) = det(k_{l,j})_{l,j\in\{1,\dots,m\}} \neq 0$.

За припущення (E) з системи (11) знаходимо

$$(R_j, \varphi) = \frac{1}{d(T)} \sum_{l=1}^{m} k^d_{l,j} \Big\{ \frac{1}{T} \int_0^T \big(u(\cdot, s), \varphi(\cdot)\big)(f_{-\beta} \hat{*} \eta_l)(s) ds$$
$$-\Big[(A\Phi, \varphi) + N_l(F_1, \varphi) + \frac{1}{T} \int_0^T \big(F(\cdot, s), \varphi(\cdot)\big)\eta_l(s) ds\Big]\Big\} \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n), \quad j \in \{1, \dots, m\}, \tag{17}$$

де $k^d_{l,j}$ – алгебричне доповнення до елемента $k_{l,j}$ матриці $(k_{l,j})_{l,j\in\{1,\dots,m\}}$, і підставляємо знайдені розподіли R_j у формулу (13). Одержуємо

$$\big(u(\cdot, t), \varphi(\cdot)\big) = \frac{1}{Td(T)} \int_0^t \sum_{l,j=1}^{m} g_j(\tau)\, k^d_{l,j} \Big[\int_0^T \Big(u(\cdot, s), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot, t, \tau)\Big) (f_{-\beta} \hat{*} \eta_l)(s) ds\Big] d\tau \tag{18}$$
$$+\big(v_0(\cdot, t), \varphi(\cdot)\big) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n), \ t \in [0, T],$$

$$\big(v_0(\cdot, t), \varphi(\cdot)\big) = \int_0^t \big(F(\cdot, \tau), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot, t, \tau)\big) d\tau + \big(F_1(\cdot), (\widehat{G}_1\varphi)(\cdot, t)\big)$$
$$-\frac{1}{d(T)} \int_0^t \sum_{l,j=1}^{m} g_j(\tau)\, k^d_{l,j} \Big[\big(A\Phi(\cdot), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot, t, \tau)\big) + N_l\big(F_1(\cdot), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot, t, \tau)\big)$$
$$+\frac{1}{T} \int_0^T \big(F(\cdot, s), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot, t, \tau)\big)\eta_l(s) ds\Big] d\tau, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n), \ t \in [0, T].$$

Припущення (F): функція $\frac{T}{d(T)} \sum\limits_{l,j=1}^{m} \max\limits_{\tau\in[0,T]} |g_j(\tau)|\, |k^d_{l,j}| \max\limits_{s\in[0,T]} |\eta'_l(s)|$ обмежена монотонно зростаючою функцією $D(T)$ на $[0, T_0]$ при деякому $T_0 < \left(\frac{c}{a}\right)^{2\gamma/\beta}$.

Припущення (E) і (F) виконуються, зокрема, при $g_1(t) = t$, $g_2(t) = 1$, $\eta_1(t) = t^2 - 2Tt$, $\eta_2(t) = 1$ у випадку $m = 2$. Тут $d(T) = -\frac{T^4(8-3T)}{12}$, $D(T) = \frac{120}{3(8-3T)}$.

Повторюючи схему доведення теореми 2, одержуємо такий результат.

Теорема 3. *За припущень (C), (E), (F) існує таке число* $T_1 \in [0, T_0]$, *при якому обернена задача* (1)-(3) *однозначно розв'язна у просторі* $\mathcal{S}'_{\gamma,(a),C}(\bar{Q}) \times [\mathcal{S}'_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)]^m$. *При цьому u – розв'язок рівняння (18), функції $R_j,\ j \in \{1, \dots, m\}$ визначені згідно з (17).*

Висновки

Знайдено достатні умови локальної за часом розв'язності оберненої задачі про визначення m невідомих функцій із простору розподілів типу Шварца у правій частині рівняння дифузії з дробовою похідною при m інтегральних за часом умовах перевизначення.

Список літератури

[1] Aleroev T.S., Kirane M., Malik S.A. *Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determination condition.* EJDE. 2013, **2013** (270), 1-16.

[2] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004.

[3] Gelfand I.M., Shilov G.E. Gelfand I.M., Shilov G.E. Spaces of test and generalized functions, Vol. 2. *Gostechizdat, Moskow.* 1958 (in Russian) Також: Generalized Functions, Vol. 2: Spaces of Fundamental and Generalized Functions. AMS Chelsea Publ., 2016.

[4] Janno J., Kasemets K. *Uniqueness for an inverse problem for a semilinear time-fractional diffusion equation.* Inverse Probl. Imaging. 2017, **11** (1), 125-149. doi: 10.3934/ipi.2017007

[5] Jin B., Rundell W. *A turorial on inverse problems for anomalous diffusion processes.* Inverse Problems. 2015, **31**, 035003. –doi:10.1088/0266-5611/31/3/035003.

[6] Kian Y., Yamamoto M. *On existence and uniqueness of solutions for semilinear fractional wave equations.* Fract. Calculus Appl. Anal. 2017. **20**, 117-138.

[7] Kinash N., Janno Ja. *An Inverse Problem for a Generalized Fractional Derivative with an Application in Reconstruction of Time- and Space-Dependent Sources in Fractional Diffusion and Wave Equations.* Mathematics. 2019, **7** (19). ARTN 1138.10.3390/math7121138.

[8] Kochubei A.N. *Fractional parabolic systems.* Potential analysis. 2012, **37**, 1-30.

[9] Lopushanska H., Lopushansky A. *Inverse problem with a time-integral condition for a fractional diffusion equation.* Math. Meth. Appl. Sci. 2019, **42** (6), 3327-3340. https://doi.org/10.1002/mma.5587

[10] Lopushanska H., Lopushansky A. *Inverse problems for a time fractional diffusion equation in the Schwartz-type distributions.* Math. Meth. Appl. Sci. 2021, **44** (3), 2381-2392.

[11] Lopushansky A.O., Lopushanska H.P. *Inverse problem for fractional diffusion equation in Schwarz-type spaces.* J. Math. Sci. 2022, **265** (3), 394-407. https://link.springer.com/article/10.1007/s10958-022-06060-y.

[12] Lopushansky A., Lopushanska H., Myaus O. *An inverse fractional source problem in a space of periodic spatial distributions.* Fractional differ. calc. 2016, **6** (2), 267-274. http://dx.doi.org/10.7153/fdc-06-17.

[13] Mainardi F. *The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation.* Appl. Math. Lett. 1996, **9** (6), 23-28.

[14] Sakamoto K., Yamamoto M. *Initial value/boundary-value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems.* J. Math. Anal. Appl. 2011, **382** (1), 426-447.

[15] Schneider W.R., and Wyss W. *Fractional diffusion and wave equations.* J. Math. Phys. 1989, **30**, 134-144.

[16] Slodiĉka M., Ŝiŝkovâ K., Van Bockstal K. *Uniqueness for an inverse source problem of determining a space dependent source in a time-fractional diffusion equation.* Appl. Math. Lett. 2019, **91**, 15-21.

[17] Wang Jun-Gang, Ran Yu-Hong. *An iterative method for an inverse source problem of time-fractional diffusion equation.* Inverse Problems in Science and Engineering. 2018, **26** (10).

[18] Wen J., Cheng J.-F. *The method of fundamental solution for the inverse source problem for the space-fractional diffusion equation.* Inverse Problems in Science and Engineering. 2018, **26** (7), 925-941.

[19] Zhang Y. and Xu X. *Inverse source problem for a fractional diffusion equation.* Inverse Problems. 2011, **27**, 1-12.

Надійшло 31.10.2023

Lopushanska H.P., Myaus O.N., Pasichnyk O. V. *Inverse problem on determining many unknowns from Schwartz-type distributions*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 2 (2023), 162–172.

We find the sufficient conditions for the unique (local in time) solvability of an inverse problem of finding m unknown functions $R_l(x)$, $l \in \{1, \dots, m\}$ from the Schwartz-type distributions $S'_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ in a source term of a diffusion equation

$$D_t^{\beta} u - A(x, D)u = \sum_{l=1}^{m} R_l(x) g_l(t) + F(x, t), \quad (x, t) \in Q = \mathbb{R}^n \times (0, T]$$

with the Djrbasian-Nersesian-Caputo time-fractional derivative of the order $\beta \in (0, 1)$ where $A(x, D)$ is an elliptic differential operator of the second order,

$$S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) = \{v \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) : ||v||_{k,(a)} = \sup_{|\alpha| \le k, x \in \mathbb{R}^n} e^{a(1-\frac{1}{k})|x|^{\frac{1}{\gamma}}} |D^{\alpha} v(x)| < +\infty \ \ \forall k \in \mathbb{N}, k \ge 2\}.$$

We use time-integral over-determination conditions

$$\frac{1}{T} \int_0^T u(x, t) \eta_l(t) dt = \Phi_l(x), \ \ x \in \mathbb{R}^n, \ \ l \in \{1, \dots, m\}$$

with the given $\eta_l \in C^1[0, T]$ and Schwartz-type distributions $\Phi_l(x)$, $l \in \{1, \dots, m\}$. Note that time-integral over-determination conditions were used in the study of various inverse problems in various functional spaces.

By properties of the Green vector-function the problem boils down to solving linear operator equation of the second kind with respect to the unknown solution u of the Cauchy problem, continuous with values in Schwartz-type distributions, and a linear inhomogeneous algebraic system of equations for finding expressions of unknown functions $R_l(x)$, $l \in \{1, \dots, m\}$ through it. We generalize the results of [11] on the classical solvability of a problem with two unknown functions from Schwartz-type spaces of rapidly decreasing functions at infinity on the right-hand side of such an equation.