УДК 517.956

©2014 р. Т.І. Фірман

Львівський національний університет імені Івана Франка

# УКОРОЧЕННЯ ЗЛІЧЕННОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ КВАЗІЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

За допомогою методу характеристик встановлено достатні умови, за яких можна вкоротити зчисленну гіперболічну систему квазілінійних диференціальних рівнянь. За цих умов, розв'язки вихідної системи та вкороченої скінченної сиситеми будуть відрізнятися не більше, ніж на деяку фіксовану малу величину.

Using the method of characteristics we establish sufficient conditions under which one can shorten a countable hyperbolic system of quasilinear differential equations. Under these conditions, the solutions of the initial and shortened system differ by, at most, some fixed small value.

**1. Вступ.** Теорія зліченних диференціальних рівнянь є частиною теорії звичайних диференціальних рівнянь і багато питань з їхньої розв'язності повторює деякі загальновідомі факти розв'язності диференціальних рівнянь в різних функціональних просторах. Основні проблеми дослідження зліченних систем, тобто диференціальних рівняння в просторі $\mathfrak{M}$ обмежених числових послідовностей, наведені в роботах [1-6]. Розв'язність початково-крайових задач для зліченних систем рівнянь з частинними похідними [2,3] також зводиться до розв'язності відповідних задач для зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь [4,5].

У цій праці деякий аналог методу вкорочення зліченних диференціальних систем [2-4] застосовано до гіперболічної зліченної системи квазілінійних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними. Подібний підхід для напівлінійних систем використано в [7].

**2. Формулювання задачі.** У смузі $\Pi^T = \{(x,t) : -\infty < x < \infty, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ розглянемо задачу Коші для зліченної квазілінійної гіперболічної системи рівнянь

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u_1,u_2,...)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u_1,u_2,...), \quad i \in \mathbb{N} \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u_i(x,0) = g_i(x), \quad i \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

При виконанні певних умов, відшукання розв'язку задачі (1)-(2) зводиться до побудови розв'язку задачі Коші для зліченних систем диференціальних рівнянь першого порядку [6-8].

Позначимо через $\varphi_i[u](\tau; x, t)$ (для спрощення записуватимемо $\varphi_i[u](\tau)$) характеристики системи (1), тобто розв'язки задачі

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi, \tau, u_1(\xi,\tau), u_2(\xi,\tau), ...), \ i \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

$$\xi|_{\tau=t} = x. \tag{4}$$

Коректну розв'язність такої задачі для довільного фіксованого набору функцій $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), ...)$ наведено в [4].

Надалі будемо використовувати позначення $u = (u_1, u_2, ...)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ...)$, $f = (f_1, f_2, ...)$, $g = (g_1, g_2, ...)$. Позначимо також $(u, u^n) = (u_1, u_2, ..., u_n, u^n_{n+1}, u^n_{n+2}, ...)$.

Нехай тепер $\varphi^n_i[u^n](\tau; x, t)$ розв'язок системи

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi, \tau, u^n_1(\xi,\tau), ..., u^n_n(\xi,\tau), 0, 0, ...), i \in \mathbb{N} \tag{5}$$

з початковими умовами (4).

Поряд з системою (1) розглянемо систему рівнянь

$$\frac{\partial u^n_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u^n_1,u^n_2,...)\frac{\partial u^n_i}{\partial x} = f_i(x,t,u^n_1,u^n_2,...), \quad i \in \{1,...,n\} \tag{6}$$

з початковими умовами

$$u_i^n(x,0) = g_i(x), \;\; i \in \{1,...,n\}, \qquad (7)$$

де

$$u_{n+j}^n(x,t) \equiv g_{n+j}(\varphi_{n+j}^n[u^n](0;x,t))), \; j \in \mathbb{N}.$$

Систему (6) назвемо вкороченою системою для системи (1) [2].

Розглянемо систему (1) в області $D \times G$, де $D$ – фундаментальна область [8], а $G$ – підмножина функцій $u \in C^\infty$, обмежених сталою $U$. Елементами простору $C^\infty$ є зчисленна сукупність неперервних функцій. У просторі $C^\infty$ визначимо норму

$$||u|| = \sup_{\substack{i\in\mathbb{N} \\ (x,t)\in\Pi^T}} \{|u_i(x,t)|\}.$$

Для спрощення виразів будемо використовувати позначення $f[u(x,t)](s,\tau) =: f(s,\tau,u_1(x,t),u_2(x,t),...)$.

Інтегруванням кожного з рівнянь системи (1) вздовж відповідних характеристик, одержимо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i(x,t) = g_i(\varphi_i[u](0;x,t)) + \qquad (8)$$

$$+\int_0^t f_i[u(\varphi_i[u](\tau),\tau)](\varphi_i[u](\tau),\tau)d\tau, \;\; i\in\mathbb{N}.$$

Аналогічно для вкороченої системи (6) будемо мати

$$u_i^n(x,t) = g_i(\varphi_i^n[u^n](0;x,t)) +$$

$$+\int_0^t f_i[u^n(\varphi_i^n[u^n](\tau),\tau)](\varphi_i^n[u^n](\tau),\tau)d\tau, \;\; (9)$$

$$i\in\{1,...,n\},$$

$$u_i^n(x,t) \equiv g_i(\varphi_i^n[u^n](0;x,t)), \;\; i\in\{n+1,...\}.$$

Під узагальненими розв'язками задач (1)–(2) та (6)–(7) будемо розуміти неперервні розв'язки систем (8) і (9), відповідно [8].

Дослідимо тепер за яких умов розв'язки задач (1) - (2) та (6) - (7) будуть як завгодно близькими.

**3. Основний результат.** Для одержання основного результату проведемо низку оцінок, які надамо у вигляді леми, сформулювавши перед тим деякі допоміжні твердження.

**Означення.** *Функція $f : \mathbb{R}^2\times\mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ задовольняє посилену умову Коші-Ліпшиця за змінними $u_1,u_2,...,u_n,...$ з деякою неперервною функцією $\alpha:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$, якщо виконується нерівність*

$$|\lambda_i(x,t,u_1,u_2,...,u_n,u'_{n+1},...) -$$

$$-\lambda_i(x,t,u_1,u_2,...,u_n,u''_{n+1},...)| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(n)\alpha(x,t)\cdot\Delta u,$$

*де* $\Delta u = \sup\limits_i |u'_{n+i} - u''_{n+i}|$, $i\in\mathbb{N}$, $\varepsilon(n)\to 0$, *при* $n\to\infty$.

Будемо вважати, що функція $f : \mathbb{R}^2\times\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ задовольняє умову Ліпшиця за змінною $x$ в $\Pi^T$, якщо $f_i \in Lip_x(\Pi^T)$ для довільного набору $u_1,u_2,...$ та для всіх $i\in\mathbb{N}$.

Надалі сталі Ліпшиця для функцій $u,\lambda,f,g$ позначатимемо через $L,\Lambda,F,G$, відповідно. Інші сталі, а саме букви $E$ з індексами, будемо використовувати для позначення комбінації відомих сталих з метою уникнення громіздких виразів.

Через $U(t)$ позначимо функцію

$$U(t) = \sup_{\substack{1\leqslant i\leqslant n, \\ x,\tau\leqslant t}} \{|u_i(x,\tau) - u_i^n(x,\tau)|\}.$$

**Лема.** *Припустимо, що:*

1) $\lambda : D\times\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ *задовольняє посилену умову Коші-Ліпшиця з функцією* $\alpha(x,t)$ і $\lambda\in C(D)\cap Lip_x(D)$ *при фіксованих* $u_1,u_2,...$;

2) $g:\mathbb{R}\to\mathfrak{M}$ *задовольняє умову Ліпшиця.*

*Тоді справджуються співвідношення:*

$$\sup_i\{|\varphi_i[u](\tau;x,t) - \varphi_i^n[u^n](\tau;x,t)|\} \leqslant$$

$$\leqslant E_1\varepsilon(n) + E_2\int_0^t U(\tau)d\tau,$$

$$\sup_i\{|g_i(\varphi_i[u](\tau;x,t)) - g_i(\varphi_i^n[u^n](\tau;x,t))|\} \leqslant$$

$$\leqslant E_3\varepsilon(n) + E_4\int_0^t U(s)ds,$$

*де* $E_1 = ATUe^{(\Lambda+AL)T}$, $E_2 = Ae^{(\Lambda+AL)T}$, $E_3 = GE_1$, $E_4 = GE_2$.

**Доведення.** Нехай $\Delta$–довільний відрізок прямої $t=0$ який містить точку $x$, точки $\varphi_i(0;x,t)$, та точки $\varphi_i^n(0;x,t)$. Позначимо через $\Omega = \Delta\times[0,T]\cap D$ і $A = \max\limits_{(\xi,\tau)\in\Omega}|\alpha(\xi,\tau)|$.

Перша нерівність леми випливає з оцінок

$$|\varphi_i[u](\tau) - \varphi_i^n[u^n](\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_t^\tau \Big|\lambda_i[u(\varphi_i[u](s),s)](\varphi_i[u](s),s) - \right.$$

$$\left. -\lambda_i[(u^n,0)(\varphi_i^n[u^n](s),s)](\varphi_i^n[u^n](s),s)\Big|ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_t^\tau \Big|\lambda_i[u(\varphi_i[u](s),s)](\varphi_i[u](s),s) - \right.$$

$$-\lambda_i[(u^n,0)(\varphi_i^n[u^n](s),s)](\varphi_i^n[u^n](s),s) \pm$$

$$\pm\lambda_i[u(\varphi_i[u](s),s)](\varphi_i^n[u^n](s),s) \pm$$

$$\left.\pm\lambda_i[(u,0)(\varphi_i[u](s),s)](\varphi_i^n[u^n](s),s)\Big|ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_t^\tau \Lambda|\varphi_i[u](s) - \varphi_i^n[u^n](s)|ds\right| +$$

$$+\left|\int_t^\tau A\sup_{1\leqslant i\leqslant n}\{|u_i(\varphi_i[u](s),s) - \right.$$

$$\left. -u_i^n(\varphi_i^n[u^n](s),s)|\}ds\right| +$$

$$+\left|\int_t^\tau A\varepsilon(n)\sup_i\{|u_{n+i}(\varphi_{n+i}[u](s),s)|\}ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \Lambda\left|\int_t^\tau |\varphi_i[u](s) - \varphi_i^n[u^n](s)|ds\right| +$$

$$+A\left|\int_t^\tau \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\{|u_i(\varphi_i[u](s),s) - \right.$$

$$-u_i^n(\varphi_i^n[u^n](s),s)\pm$$

$$\left.\pm u_i(\varphi_i^n[u^n](s),s)|\}ds\right| + ATU\varepsilon(n) \leqslant$$

$$\leqslant \Lambda\left|\int_t^\tau |\varphi_i[u](s) - \varphi_i^n[u^n](s)|ds\right| +$$

$$+AL\left|\int_t^\tau \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\{|\varphi_i[u](s) - \varphi_i^n[u^n](s)|\}ds\right| +$$

$$+A\left|\int_t^\tau \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\{|u_i(\varphi_i^n[u^n](s),s) - \right.$$

$$\left. -u_i^n(\varphi_i^n[u^n](s),s)|\}ds\right| + ATU\varepsilon(n) \leqslant$$

$$\leqslant (\Lambda + AL)\left|\int_t^\tau \sup_i\{|\varphi_i[u](s) - \varphi_i^n[u^n](s)|\}ds\right| +$$

$$+A\left|\int_t^\tau U(s)ds\right| + ATU\varepsilon(n).$$

Отже, маємо

$$\sup_i\{|\varphi_i[u](\tau;x,t) - \varphi_i^n[u^n](\tau;x,t)|\} \leqslant$$

$$\leqslant (\Lambda + AL)\left|\int_t^\tau \sup_i\{|\varphi_i[u](s;x,t) - \right.$$

$$\left. -\varphi_i^n[u^n](s;x,t)|\}ds\right| +$$

$$+A\int_0^t U(s)ds + ATU\varepsilon(n).$$

За лемою Гронуолла-Беллмана одержуємо

$$\sup_i\{|\varphi_i[u](\tau;x,t) - \varphi_i^n[u^n](\tau;x,t)|\} \leqslant$$

$$\leqslant (A\int_0^t U(s)ds + ATU\varepsilon(n))e^{(\Lambda+AL)T} =$$

$$= E_1\varepsilon(n) + E_2 \int\limits_0^t U(s)ds.$$

Використовуючи першу нерівність, легко отримаємо другу оцінку леми

$$\sup_i\{|g_i(\varphi_i[u](\tau;x,t)) - g_i(\varphi_i^n[u^n](\tau;x,t))|\} \leqslant$$

$$\leqslant G\sup_i\{|\varphi_i[u](\tau;x,t) - \varphi_i^n[u^n](\tau;x,t)|\} \leqslant$$

$$\leqslant E_3\varepsilon(n) + E_4 \int\limits_0^t U(s)ds.$$

*Лема доведена.*

Тепер сформулюємо теорему.

**Теорема.** *Припустимо, що:*

1) $\lambda, f : D \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ *задовольняють посилену умову Коші-Ліпшиця з функціями* $\alpha(x,t)$ *та* $\beta(x,t)$*, відповідно, і* $\lambda, f \in C(D) \cap Lip_x(D)$ *при довільно фіксованих* $u_1, u_2, ...$;

2) $|f_i(x,t,u_1,u_2,...)| \leqslant a_i \quad a_i$ *– деяка стала, причому* $a_i \to 0$*, при* $i \to \infty$;

3) $g : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}$ *задовольняє умову Ліпшиця.*

*Тоді узагальнені розв'язки задач* (1)-(2) *і* (6)-(7) *будуть як завгодно близькими при достатньо великому, але скінченному значені* $n$.

**Доведення.** Нехай $B = \max\limits_{(\xi,\tau)\in\Omega}\{|\beta(\xi,\tau)|\}$.

Оцінимо різницю $|u_i(x,t) - u_i^n(x,t)|$ для $i \in \{n+1, ...\}$, тобто

$$|u_i(x,t) - u_i^n(x,t)| \leqslant$$

$$\leqslant |g_i(\varphi_i[u](0;x,t)) - g_i(\varphi_i^n[u^n](0;x,t))| +$$

$$+ \int\limits_0^t \Big| f_i[u(\varphi_i[u](s),s)](\varphi_i[u](s),s) \Big| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant E_3\varepsilon(n) + E_4 \int\limits_0^t U(\tau)d\tau + Ta_i.$$

Для $i \in \{1, ..., n\}$ отримаємо оцінку

$$|u_i(x,t) - u_i^n(x,t)| \leqslant$$

$$\leqslant |g_i(\varphi_i[u](0;x,t)) - g_i(\varphi_i^n[u^n](0;x,t))| +$$

$$+ \int\limits_0^t \Big| f_i[u(\varphi_i[u](\tau),\tau)](\varphi_i[u](\tau),\tau) -$$

$$- f_i[u^n(\varphi_i[u^n](\tau),\tau)](\varphi_i[u^n](\tau),\tau) \Big| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant E_3\varepsilon(n) + E_4 \int\limits_0^t U(\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \Big| f_i[u(\varphi_i[u](\tau),\tau)](\varphi_i[u](\tau),\tau) -$$

$$- f_i[u^n(\varphi_i[u^n](\tau),\tau)](\varphi_i[u^n](\tau),\tau) \pm$$

$$\pm f_i[u(\varphi_i[u](\tau),\tau)](\varphi_i[u^n](\tau),\tau) \pm$$

$$\pm f_i[(u,u^n)](\varphi_i[u^n](\tau),\tau) \Big| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant E_3\varepsilon(n) + E_4 \int\limits_0^t U(\tau)d\tau +$$

$$+F \int\limits_0^t |\varphi_i[u](\tau) - \varphi_i^n[u^n](\tau)|d\tau +$$

$$+B \int\limits_0^t \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\{|u_i(\varphi_i[u](\tau),\tau) -$$

$$-u_i^n(\varphi_i^n[u^n](\tau),\tau) \pm u_i(\varphi_i^n[u^n](\tau),\tau)|\}d\tau +$$

$$+B\tilde{\varepsilon}(n) \int\limits_0^t \sup_i\{|u_{n+i}(\varphi_i[u](\tau),\tau) -$$

$$-u_{n+i}^n(\varphi_i^n[u^n](\tau),\tau)|\}d\tau \leqslant$$

$$\leqslant E_3\varepsilon(n) + E_4 \int\limits_0^t U(\tau)d\tau + TFE_1\varepsilon(n) +$$

$$+TFE_2 \int\limits_0^t U(\tau)d\tau + B \int\limits_0^t U(\tau)d\tau +$$

$$+BL \int\limits_0^t \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\{|\varphi_i[u](\tau) - \varphi_i^n[u^n](\tau)|\}d\tau +$$

$$+2TBU\tilde{\varepsilon}(n) \leqslant (E_3 + TFE_1)\varepsilon(n) +$$

$$+(E_4 + TFE_2 + B) \int\limits_0^t U(\tau)d\tau + 2TBU\tilde{\varepsilon}(n) +$$

$$+BLTE_1\varepsilon(n)+BLTE_2\int\limits_0^t U(\tau)d\tau=$$

$$=E_5\varepsilon(n)+E_6\tilde{\varepsilon}(n)+E_7\int\limits_0^t U(\tau)d\tau.$$

Для функції $U(t)$ маємо

$$U(t)\leqslant E_5\varepsilon(n)+E_6\tilde{\varepsilon}(n)+E_7\int\limits_0^t U(\tau)d\tau$$

за лемою Гронуолла-Беллмана одержимо

$$U(t)\leqslant (E_5\varepsilon(n)+E_6\tilde{\varepsilon}(n))e^{E_7t}\leqslant$$
$$\leqslant (E_5\varepsilon(n)+E_6\tilde{\varepsilon}(n))e^{E_7T}<\delta$$

при достатньо великому значенні $n$.

Отже, $|u_i(x,t)-u_i^n(x,t)|\leqslant\delta$ для всіх значень $i\in\{1,...,n\}$.

Для $i\in n+1,...$ отримаємо

$$|u_i(x,t)-u_i^n(x,t)|\leqslant E_3\varepsilon(n)+Ta_i+$$

$$+E_4\int\limits_0^t U(\tau)d\tau\leqslant E_3\varepsilon(n)+Ta_i+TE_4\delta<\varepsilon$$

при достатньо великому значенні $n$, тобто $|u_i(x,t)-u_i^n(x,t)|<\varepsilon$ для всіх $i\in 1,2....$

*Теорема доведена.*

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Персидский К. П. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения в нелинейных пространствах. / К. П. Персидский. – Алма-Ата: Наука, 1976. – Т.2 – 246с.*

2. *Жаутыков О. А. О построении решений задачи Коши для бесконечных систем линейных уравнений в частных производных / О. А. Жаутыков// Изв. АН КазССР. Сер. матем. и механ.– 1959. – вып.8(12).– С. 3-17.*

3. *Жаутыков О. А. К построению характеристик уравнений в частных производных первого порядка счетного множества переменных на основе метода редукции / О. А. Жаутыков// Изв. высших учеб. заведений. Математика.– 1960. – №3(16).– С. 127-140.*

4. *Самойленко А. М. Счетные системы дифференциальных уравнений /А. М. Самойленко, Ю. В. Теплинськuй.– К.: Ин-т математики, 1993. – 308с.*

5. *Яцюк В. Т. К исследованию счетных систем дифференциальных уравнений в пространстве $C^\infty$ / В. Т. Яцюк// Асимптотические и качественные методы в теории нелинейных колебаний. К.: Изд.Ин-та математики АН УССР, 1971. – С. 218-239.*

6. *Самойленко А. М. Метод укорочення для зліченноточкових крайових задач у просторі обмежених числових послідовностей /А. М. Самойленко, Ю. В. Теплінський, В. А. Недокіс// Укр. мат. журн.–2004.–Т.56, № 9.– С. 1203-1230.*

7. *Хома Г. П. Вкорочення зчисленної системи диференціальних рівнянь в частинних похідних / Г. П. Хома, В. Т. Яцюк // Укр. мат. журн. – 1971. – №3. – С. 417-420.*

8. *Фірман Т. І. Розв'язність задачі Коші для зліченної гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку / Т. І. Фірман // Наук вісн Ужгород унв-ту. Серія матем. і інформ. – 2013. – Вип. 24, №2. – С. 206-213.*