Візінська І.І.

МОДЕЛЮВАННЯ СТІЙКОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Здійснено аналіз зв'язків між розв'язками диференціально-різницевих рівнянь та відповідних апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь. Запропоновано алгоритми дослідження стійкості лінійних систем із запізненням та знаходження верхньої межі запізнення, для якої зберігається стійкість системи із запізненням.

Ключові слова і фрази: диференціально-різницеве рівняння, запізнення, схеми апроксимації, стійкість, нестійкість, квазіполіном, неасимптотичні корені квазіполінома.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *i.tuzyk@chnu.edu.ua*

Вступ

Диференціально-різницеві та диференціально-функціональні рівняння є математичними моделями багатьох прикладних задач в системах автоматичного регулювання та керування, хімічних, біологічних, технічних, економічних та інших процесах, еволюція яких залежить від передісторії. Так, в біологічних системах еволюція зв'язана з такими довготривалими процесами, як розмноження, розвиток і вимирання, які відбуваються не миттєво, а з певним запізнюванням. У техніці численні системи керування включають фізичну затримку, яку необхідно враховувати при розробці та налаштуванні законів керування зі зворотним зв'язком [1, 2].

Для задач стійкості, осциляції, біфуркації, керування та стабілізації розв'язків лінійних диференціально-функціональних рівнянь важливу роль відіграє розміщення коренів відповідних характеристичних рівнянь, які у випадку таких рівнянь називають квазіполіномами.

При дослідженні апроксимації системи лінійних диференціально-різницевих рівнянь виявилось, що наближення неасимптотичних коренів їх квазіполіномів можна знаходити за допомогою характеристичних многочленів відповідних апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь. У даній роботі досліджуються застосування схем

УДК 517.925
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34K20, 34K28, 34K40.
Information on some grant ...

© Візінська І.І., 2023

апроксимації диференціально-різницевих рівнянь [3, 4, 5] до наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів та аналізу стійкості розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь із запізненням.

1 Алгоритм дослідження стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь із запізненням

Основні результати, що відносяться до теорії стійкості розв'язків диференціально-різницевих та диференціально-функціональних рівнянь наведені в роботах [6, 7, 8]. Найбільше важливих результатів в теорії стійкості одержано для лінійних систем із запізненням та нейтрального типу [6, 8, 9].

Розглянемо лінійну систему із запізненням

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + \sum_{i=1}^{k} B_i x(t - \tau_i), \tag{1}$$

де A, B_i, $i = \overline{1,k}$, – сталі $n \times n$ матриці, $0 < \tau_1 < ... < \tau_k$.

Теорія стійкості для систем (1) на даний час є достатньо добре дослідженою.

Теорема 1. *[6, 7] Для того, щоб нульовий розв'язок системи (1) був експоненціально стійкий, необхідно і досить, щоб усі корені його характеристичного квазіполінома*

$$\Phi(\lambda) = \det\left(\lambda E - A - \sum_{i=1}^{k} B_i e^{-\lambda\tau_i}\right) = 0 \tag{2}$$

лежали у лівій півплощині

$$Re\lambda < 0. \tag{3}$$

У випадку лінійних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + \sum_{i=1}^{k} B_i x(t - \tau_i) + \sum_{i=1}^{k} C_i \frac{dx(t-\tau_i)}{dt}, \tag{4}$$

умова (3) на корені характеристичного квазіполінома

$$\Psi(\lambda) = \det\left(\lambda E - A - \sum_{i=1}^{k} B_i e^{-\lambda\tau_i} - \lambda \sum_{i=1}^{k} C_i e^{-\lambda\tau_i}\right) = 0 \tag{5}$$

не забезпечує експоненціальну стійкість його нульового розв'язку, оскільки є можливість появи ланцюжка нулів рівняння (5), які необмежено наближаються до уявної осі. Проте, якщо замість умови (3) виконується така умова

$$Re\lambda \le -\alpha < 0,\ \alpha > 0,$$

то нульовий розв'язок системи лінійних рівнянь нейтрального типу (4) вже буде експоненціально стійким [10].

Таким чином, розміщення нулів квазіполіномів визначає стійкість розв'язків лінійних стаціонарних диференціально-різницевих рівнянь. Перевірка на практиці розміщення коренів квазіполіномів можлива тільки для найпростіших випадків.

Будемо досліджувати розміщення коренів квазіполіномів за рахунок їх наближення коренями характеристичних рівнянь відповідних апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь.

Для системи із запізненням (1) відповідна апроксимуюча система звичайних рівнянь згідно [3, 4] має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dz_0}{dt} &= Az_0(t) + \sum_{i=1}^{k} B_i z_{l_i}(t), \quad l_i = \left[\frac{\tau_i m}{\tau}\right], \\ \frac{dz_i}{dt} &= \mu\left(z_{i-1}(t) - z_i(t)\right), \ i = \overline{1,m}, \mu = \frac{m}{\tau}. \end{aligned} \tag{6}$$

Для характеристичного многочлена системи (6) маємо зображення

$$\Psi_m(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda E - A & 0 & ... & -B_1 & ... & -B_k \\ -\mu E & (\mu+\lambda)E & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & -\mu E & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & (\mu+\lambda)E \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Елементи визначника (7) – матриці розмірності $n \times n$, а в першому рядку ненульові блоки знаходяться на позиціях l_i, $i = \overline{0,k}$.

Розкриваючи визначник (7) за елементами першого рядка нескладно одержати [4]

$$\Psi_m(\lambda) = \det\left(\lambda E - A - \sum_{i=1}^{k} B_i \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)^{l_i}\right)(\mu+\lambda)^{mn} \tag{8}$$

і для фіксованих $\lambda \in Z$ послідовність функцій

$$H_m(\lambda) = \frac{\Psi_m(\lambda)}{(\mu+\lambda)^{mn}}, \ m \in N \tag{9}$$

збігається при $m \to \infty$ до квазіполінома (2). Отже, функція $H_m(\lambda)$ апроксимує при достатньо великих m квазіполіном (2). Оскільки, згідно рівності (9) нулі функції $\Psi_m(\lambda)$ та $H_m(\lambda)$ збігаються, то нулі характеристичного рівняння (7) можна брати за наближення неасимптотичних нулів квазіполінома (2).

Має місце така теорема.

Теорема 2. *[4] Якщо нульовий розв'язок системи із запізненням (1) експоненціально стійкий (нестійкий), тоді існує $m_0 > 0$ таке, що при $m \geq m_0$ нульовий розв'язок апроксимуючої системи (5) також експоненціально стійкий (нестійкий).*

Якщо для всіх $m \geq m_0$ нульовий розв'язок системи (5) експоненціально стійкий (нестійкий), тоді нульовий розв'язок системи із запізненням (1) експоненціально стійкий (нестійкий).

Зауваження 1. *Із теореми 2 слідує, що існує число m_0 таке, що при $m \geq m_0$ асимптотична стійкість (нестійкість) нульового розв'язку системи із запізненням (1) еквівалентна асимптотичній стійкості (нестійкості) нульового розв'язку апроксимуючої системи лінійних диференціальних рівнянь (5).*

Розглянемо рівність

$$\Phi(\lambda) = H_m(\lambda) + R_m(\lambda), \tag{10}$$

де $R_m(\lambda) = \Phi(\lambda) - H_m(\lambda)$.

Число m_0 потрібно вибирати так, щоб при $m \geq m_0$ виконувалась нерівність

$$\min_{\lambda} |\Phi(\lambda)| > \max_{\lambda} |R_m(\lambda)|. \tag{11}$$

Відзначимо, що точне знаходження екстремальних виразів у співвідношенні (11) часто є складною задачею. Тому достатньо обмежитись знаходженням нижньої та верхньої оцінок для $\Phi(\lambda)$ та $R_m(\lambda)$.

Теорему 2 можна застосувати для дослідження стійкості розв'язків лінійних диференціально-різницевих рівнянь із запізненням. Схему такого дослідження сформулюємо у вигляді алгоритму [11].

1. Для лінійного диференціального рівняння будуємо апроксимуючу систему лінійних диференціальних рівнянь.

2. Знаходимо характеристичний многочлен апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь.

3. Приводимо знайдений многочлен до вигляду, зручного для знаходження його коренів на ЕОМ.

4. Застосовуємо спеціалізоване програмне забезпечення і знаходимо корені характеристичного многочлена апроксимуючої системи при достатньо великих m.

5. Аналізуючи розміщення коренів характеристичного многочлена визначаємо стійка чи нестійка апроксимуюча система звичайних диференціальних рівнянь.

6. Застосовуємо теорему 2 і робимо висновок про стійкість чи нестійкість вихідного диференціально-різницевого рівняння.

Приклад 1. *Розглянемо лінійну систему із запізненням*

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bx(t-\tau), \tag{12}$$

де A, B – 2×2 сталі матриці, $\tau > 0$.

Скористаємось класичною схемою апроксимації (6) для системи (12) матимемо

$$\begin{gathered} \frac{dz_0(t)}{dt} = Az_0(t) + Bz_m(t), \\ \frac{dz_i(t)}{dt} = \mu\left(z_{i-1}(t) - z_i(t)\right),\ i = \overline{1,m}, \mu = \frac{m}{\tau}. \end{gathered} \tag{13}$$

Якщо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, тоді характеристичне рівняння системи (13) матиме вигляд

$$\Psi_m(\delta) = \left(\frac{m}{\tau}\right)^2 s^{2m+2} + s^{2m+1}\left(-a_{11}\frac{m}{\tau} - a_{22}\frac{m}{\tau} - 2\left(\frac{m}{\tau}\right)^2\right) +$$

$$+s^{2m}\left(a_{11}a_{12}+a_{11}\frac{m}{\tau}+a_{22}\frac{m}{\tau}-a_{21}a_{22}\right)+s^{m+1}\left(-b_{22}\frac{m}{\tau}-b_{11}\frac{m}{\tau}\right)+$$
$$+s^{m}\left(a_{11}b_{22}+b_{21}\frac{m}{\tau}+b_{11}a_{22}+b_{11}\frac{m}{\tau}-a_{21}b_{12}-a_{12}b_{21}\right)+b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}. \qquad (14)$$

Корені многочлена (14) можна знаходити, використовуючи стандартні процедури обчислення коренів многочлена, які наявні в ППП Matlab, Mathematica, Maple, бібліотеці NumPy.

У нашій роботі використовується функція roots із бібліотеки NumPy, яка знаходить корені многочлена за його коефіцієнтами.

У випадку, коли

$$A=\begin{pmatrix}-0.9 & -6.5\\ 4.8 & -0.9\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1.39 & -0.65\\ 0.48 & -1.39\end{pmatrix},$$

обчислюємо корені характеристичного рівняння для різних значень τ та знаходимо, що нульовий розв'язок системи (12) є експоненціально стійким при

$$\tau\in(0,\tau_1)\cup(\tau_2,\tau_3).$$

Значення величин τ_1, τ_2, τ_3 для різних m наведені в таблиці 1

Таблиця 1

Розмірність апроксимуючої системи m	*Умови стійкості*
$m=100$	$\tau\in(0;0.2740)\cup(0.8035;1.3580)$
$m=400$	$\tau\in(0;0.2720)\cup(0.8310;1.2299)$
$m=500$	$\tau\in(0;0.2718)\cup(0.8330;1.2299)$

2 Оцінка впливу запізнення на стійкість розв'язків лінійних диференціально-різницевих рівнянь

В інженерній практиці системи із запізненням часто заміняють системами без запізнення на тій підставі, що воно мале.

Розглянемо математичне обґрунтування можливості заміни диференціально-різницевих рівнянь із запізненням на звичайні диференціальні рівняння, а також вивчимо способи знаходження верхніх меж запізнення, для яких режим стійкості систем із запізненням є аналогічний режиму стійкості відповідних систем без запізнення.

Розглянемо лінійну систему із запізненням (1) і відповідну їй систему без запізнення

$$\frac{dx(t)}{dt}=\left(A+\sum_{i=1}^{k}B_i\right)x(t). \qquad (15)$$

Теорема 3. *[12, 13] Якщо нульовий розв'язок (15) асимптотично стійкий, тоді існує стала $\Delta>0$ така, що при умові $0\le\tau\le\Delta$ нульовий розв'язок системи із запізненням (1) також асимптотично стійкий.*

Перші оцінки величини Δ були встановлені в роботі [12] для системи лінійних диференціально-різницевих рівнянь вигляду

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} x_j(t) + b_{ij} x_j(t - \tau_{ij}) \right), \ i = \overline{1,n}, \tag{16}$$

де $\tau_{ij} \geq 0$, $i, j = \overline{1,n}$, $\tau = \max\limits_{i,j}(\tau_{ij})$.

У випадку $n = 2$ для величини Δ маємо рівність [12]

$$\Delta = \frac{1}{7000} \sqrt{\min\left(\frac{q^2}{A^n}, \frac{qp^2}{A^n}\right)} \cdot \frac{1}{A}, \tag{17}$$

де $p = -(a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22})$, $q = (a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - (a_{21} + b_{21})(a_{12} + b_{12})$, $A = \max\limits_{ij}(|a_{ij}|, |b_{ij}|) > 0$.

Якщо ж $n = 1$, тобто маємо скалярне диференціально-різницеве рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t - \tau),$$

то маємо відповідну оцінку для Δ:

$$\Delta = \frac{1}{10 \max(|a|, |b|)}. \tag{18}$$

Оцінки верхньої межі запізнення (17) та (18), що забезпечують стійкість лінійних систем із запізненням, виявились дуже грубими.

Подальше уточнення верхньої межі для оцінки запізнення здійснено в роботах [13, 14] для системи диференціальних рівнянь із запізненням вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t - \tau), \tag{19}$$

де A, B – $n \times n$ сталі матриці, запізнення $\tau > 0$.

Відповідна (19) система без запізнення

$$\frac{dx}{dt} = (A + B)x(t). \tag{20}$$

Якщо нульовий розв'язок системи (20) асимптотично стійкий, тоді існує єдина додатно визначена матриця H, яка є розв'язком рівняння Ляпунова [13]

$$\left(A^T, B^T\right) H + H(A + B) = -C,$$

для довільної симетричної додатно визначеної матриці C і при $0 \leq \tau \leq \Delta$, де

$$\Delta = \lambda_{\min}(C) \left[2 \left(\|A\| + \|B\| \right) \|HB\|^{-1} \left(\lambda_{\min}(H) / \lambda_{\max}(H) \right)^{1/2} \right] \tag{21}$$

нульовий розв'язок системи (19) буде асимптотично стійкий [14].

Розглянемо застосування схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь системою звичайних диференціальних рівнянь для знаходження верхньої межі запізнення у системі (19), для якої зберігається стійкість [5, 11, 15].

1. Системі із запізненням (19) поставимо у відповідність апроксимуючу систему (5), характеристичний многочлен якої має вигляд (7).

2. Задаємо деяке $\Delta = \Delta_0$ (наприклад, $\Delta_0 = 1$) та уточнюючий крок $h_0 = \Delta$.

3. Наближаємо квазіполіном (2) системи із запізненням характеристичним рівнянням апроксимуючої системи (8) і знаходимо наближений корінь квазіполінома з найбільшою дійсною частиною α при $\tau = \Delta_0$.

4. Якщо $\alpha < 0$, то для заданого Δ_0 нульовий розв'язок системи із запізненням є асимптотично стійким. Покладаємо $\Delta_0 = \Delta_0 + h_0$ та переходимо на п.3.

5. Якщо $\alpha > 0$, то для даної верхньої межі Δ_0 нульовий розв'язок системи із запізненням не є асимптотично стійким. Тоді покладаємо $\Delta_0 = \Delta_0 - h_i$, де $h_i = \dfrac{h_{i-1}}{2}$, $i = 1, 2, ...$ та переходимо на п.3 до того часу, поки $h_i > \varepsilon$, де ε – задана точність.

6. Якщо $h_i < \varepsilon$, де ε – задана точність, то верхня межа запізнення Δ_0, для якої зберігається асимптотична стійкість системи із запізненням, знайдена із заданою точністю.

Приклад 2. *Знайти максимальне значення запізнення τ, при якому нульовий розв'язок диференціально-різницевого рівняння із запізненням*

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0.25x(t) - 0.5x(t-\tau) \tag{22}$$

буде експоненціально стійким.

При $\tau = 0$ дістаємо лінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = -0.25x(t),$$

яке очевидно експоненціально стійке.

Згідно оцінки (18) дістаємо

$$\Delta_1 = \frac{1}{10\max(0.25, 0.5)} = 0.2.$$

Оцінка (21) у випадку, коли $A, B \in R$, має вид

$$\Delta = \left(2\left(|A| + |B|\right)|HB|\right)^{-1},$$

де $H = -(2(A+B))^{-1}$. Тоді отримуємо

$$\Delta_2 = \frac{8}{9}.$$

Застосовуючи для рівняння (22) класичну схему апроксимації (13), одержимо

$$\begin{gathered}\frac{dz_0(t)}{dt} = az_0(t) + bz_m(t),\\ \frac{dz_j(t)}{dt} = \mu\left(z_{j-1}(t) - z_j(t)\right),\ j = \overline{1,m}, \mu = \frac{m}{\tau}.\end{gathered} \tag{23}$$

Характеристичне рівняння системи (23) має вигляд

$$\Psi_m(\lambda) = (a - \lambda)\left(1 + \frac{\lambda\tau}{m}\right)^m + b = 0, \tag{24}$$

яке заміною $s = 1 + \dfrac{\lambda\tau}{m}$ *зводиться до рівняння*

$$s^{m+1} - \left(1 + \frac{\tau}{m}a\right)s^m - \frac{\tau}{m}b = 0, \tag{25}$$

що є зручним для обчислення його коренів на ЕОМ.

При $m = 70$ *одержуємо, що стійкість рівняння (22) зберігається при*

$$\Delta_3 = 2.4132.$$

Точне значення величини Δ*, при якому зберігається стійкість розв'язків рівняння (22) знайдено методом* D*-розбиття [16] і дорівнює*

$$\Delta^* = 2.4184.$$

Наведений приклад демонструє, що застосування схем апроксимації диференціально-різницевих рівнянь дозволяє більш точно оцінити верхню межу запізнення, для якої зберігається експоненціальна стійкість.

Список літератури

[1] Schiesser W.E. Time Delay ODE/PDE Models. Applications in Biomedical Science and Engineering, Boca Rona, 2019.

[2] Fathalla A. Rihan. Delay Differential Equations and Applications to Biology. Springer, 2021.

[3] Piddubna L.A., Cherevko I.M. *Approximation of systems of differential-difference equations by systems of ordinary differential equations.* Nonlinear oscillations, 1999, No1, 42–50. (in Ukrainian)

[4] Cherevko I.M., Matviy O.V. *On the approximation of systems with a delay and their stability.* Nonlinear oscillations, 2004, **7** (2), 208–216. (in Ukrainian)

[5] Cherevko I., Tuzyk I., Ilika S., Pertsov A. *Approximation of Systems with Delay and Algorithms for Modeling Their Stability.* 2021 11th International Conference on Advanced Computer Information Technologies ACIT'2021, Deggendorf, Germany, 15-17 September 2021, 49–52.

[6] Halanay A. Differential equations. Stability. Oscillations. Time Lags. New York; London : Acad. Press, 1968.

[7] J.K. Hale. Theory of Functional Differential Equations, Applied Mathematics Sciences 3, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[8] Gopalsamy K. Stability and Oscillation in Delay Differential Equations of Population Dynamics. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1992.

[9] Berezansky l., Braverman E. *On exponential stability of linear differential equations with several delays.* J. Math. Anal. Appl., 2006, **324**, 1336–1355.

[10] Berezansky L., Diblik J., Svoboda Z., Šmarda Z. *Exponential stability criteria for linear neutral systems with applications to neural networks of neutral type.* Journal of the Franklin Institute, 2023, **360** (1), 301–326.

[11] Tuzyk I., Cherevko I. Algorithms for studying the stability of linear systems with many delay. 12th International Conference on Advanced Computer Information Technologies, 26–28 September 2022, Spišská Kapitula, Slovakia, 164–167.

[12] Yuanxun Qin, Lion-quinq, Lian Wang. *Effect of time lags on stability of dynamical system.* Scientica sinica, 1960, **10** (6), 26–42.

[13] Khusainov D. Ya., Shatyrko A.V. The method of Lyapunov functions in the study of the stability of differential-functional systems. Kyiv, Izd-vo Kiyevskogo un-ta, 1987, 236. (in Russian)

[14] Khusainov D. Ya., Yunkova E.A. *Estimation of delay value in linear differential systems with deviating argument.* Ukrainian Mathematical Journal, 1983, **35** (2), 261–264. (in Russian)

[15] Cherevko I., Tuzyk I. Approximation of systems with delay their stability. Book of abstracts of EQUADIFF Brno, Czech Republic, 11–15 July 2022, Masaryk University, 225.

[16] Cherevko I.M., Matviy O.V. Pernay S.A. *About stability of linear systems with delay.* Naukoviy visnik Chernivets'kogo universitetu : zb. nauk. prats', Chernivtsi, Ruta, 2008, **421**: Mathematica, 66–70. (in Ukrainian)

Надійшло 10.09.2023

Vizinska I.I. *Modeling stability of differential-difference equations with delay*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 1 (2023), 71–79.

Differential-difference and differential-functional equations are mathematical models of many applied problems in automatic control and management systems, chemical, biological, technical, economic and other processes whose evolution depends on prehistory. In the study of the problems of stability, oscillation, bifurcation, control, and stabilization of solutions of linear differential-difference equations, the location of the roots of the corresponding characteristic equations is very important. Note that there are currently no effective algorithms for finding the zeros of quasipolynomials. When studying the approximation of a system of linear differential-difference equations, it was found that the approximation of nonsymptotic roots of their quasi-polynomials can be found with the help of characteristic polynomials of the corresponding approximating systems of ordinary differential equations . This paper investigates the application of approximation schemes for differential-difference equations to construct algorithms for the approximate finding of nonsymptotic roots of quasipolynomials and their application to study the stability of solutions of systems of linear differential equations with many delays. The equivalence of the exponential stability of systems with delay and of the proposed system of ordinary differential equations is established. This allowed us to build an algorithm for studying the location of non-asymptotic roots of quasi-polynomials, which are implemented on a computer.

Computational experiments on special test examples showed the high efficiency of the proposed algorithms for studying the stability of linear differential-difference equations.