Працьовитий М.В., Бондаренко О.І., Василенко Н.М., Лисенко І.М.

# НЕСКІНЧЕННОСИМВОЛЬНЕ $B$-ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ І ДЕЯКІ ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

У роботі обґрунтовано існування та єдиність $B$-зображення чисел інтервалу $(0;1)$, яке в якості основи використовує додатне число $a$, що задовольняє умову $0 < a < \frac{1}{3}$, зокрема додатний корінь $\tau$ рівняння $x^2 + x - 1 = 0$, двосторонню послідовність $(\Theta_n)$: $\Theta_0 = \frac{1-3a}{1-a}$, $\Theta_{-n} = \Theta_n = a^{|n|}$ і алфавіт $Z = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots\}$, а саме:

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{m} b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(\varnothing)},$$

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

де $\alpha_n \in Z$, $\Theta_n > 0$ $\forall n \in Z$, $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \Theta_n = 1$, $b_{n+1} \equiv \sum\limits_{i=-\infty}^{n-1} = b_n + \Theta_n$ $\forall n \in Z$.

Описано геометрію $B$-зображення чисел (геометричний зміст цифр, властивості циліндричних і хвостових множин, тополого-метричні властивості множин з обмеженнями на вживання цифр); вивчено оператори лівостороннього і правостороннього зсувів цифр, описано групу неперервних перетворень одиничного інтервала, що зберігають хвости $B$-зображення чисел.

*Ключові слова і фрази:* $B$-зображення чисел, $B$-циліндр, хвостова множина, множина канторівського типу, оператор лівостороннього зсуву, оператор правостороннього зсуву, неперервне перетворення, що зберігає хвости $B$-зображення чисел.

---

Український державний університет імені Михайла Драгоманова,
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
e-mail: *pras4444@gmail.com*, *o.i.bondarenko@udu.edu.ua*,
*vasylenkonm@gmail.com*, *i.m.lysenko@npu.edu.ua*

## Вступ

Сьогодні в науці розглядаються і ефективно використовуються різні моделі дійсного числа. Форму числу надає система числення. Іншими словами, система зображення чисел (рівносильно — система кодування чисел [8]). Одні з них мають скінченний алфавіт

УДК 511.7+517.5
2010 *Mathematics Subject Classification:* 11H.

(набір цифр), інші — нескінченний. Алфавіт може бути сталим, а може бути змінним (як у канторівських системах числення [6]). Одні системи мають одну основу, інші — кілька або навіть нескінченну їх кількість. Окремої уваги заслуговують системи з двосимвольним алфавітом (в силу мінімальності алфавіту), однією та двома основами, а також системи з нескінченним алфавітом і однією основою [2].

Наявність багатьох і принципово різних систем кодування чисел створює потужну основу для розвитку багатьох галузей математики, забезпечуючи їх арсеналом засобів задання і дослідження математичних об'єктів, зокрема складної тополого-метричної структури. В першу чергу сказане стосується метричної теорії чисел, теорії фракталів (фрактального аналізу та фрактальної геометрії), теорії ніде не монотонних та недиференційовних функцій, теорії сингулярних розподілів ймовірностей та метричної теорії динамічних систем [1, 3, 4, 5, 7].

Створення нових систем кодування чисел розширює арсенал засобів для аналітичного опису і вивчення локально складних множин, функцій, мір, перетворень простору, динамічних систем тощо [9].

Дана робота присвячена новій системі кодування чисел відрізка $[0;1]$ з нескінченним алфавітом, яким є множиною цілих чисел, однією основою $a \in (-0; \frac{1}{3})$ і двосторонньою базисною послідовністю степенів основи: $..., a^2, a^1, \frac{1-3a}{1-a}, a^1, a^2, ....$

## 1 $B$-зображення чисел

Нехай $A = Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ — алфавіт (набір цифр), $L = \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A} \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту; $a$ — заданий додатний параметр, що задовольняє умову $0 < a < \frac{1}{3}$. Покладемо

$$\Theta_0 \equiv \frac{1-3a}{1-a}, \;\; \Theta_{-n} = \Theta_n \equiv a^{|n|}, \;\; b_n \equiv \sum_{i=-\infty}^{n-1} \Theta_i.$$

Тоді $b_{n+1} = b_n + \Theta_n$ і $b_n = \begin{cases} \frac{a^{n+1}}{1-a}, & \text{якщо } n \leq 0, \\ \frac{1-2a}{1-a}, & \text{якщо } n = 1, \\ \frac{1-a-a^n}{1-a}, & \text{якщо } n > 1. \end{cases}$
Легко бачити, що $0 < b_{n-1} < b_n < b_{n+1} < 1$ для будь-якого $n \in Z$.

**Теорема 1.** *Для будь-якого числа $x \in (0;1)$ існує єдиний скінченний набір цілих чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ або єдина послідовність $(\alpha_n) \in L$ такі, що*

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{m} (b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i}) \equiv \Delta^B_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m(\varnothing)}, \tag{1}$$

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i}) \equiv \Delta^B_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots} \tag{2}$$

*Доведення.* Існування. Оскільки

$$(0;1) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [b_n; b_{n+1}),$$

то очевидно, що існує $\alpha_1 \in A$ таке, що $b_{\alpha_1} \leq x < b_{\alpha_1+1}$.

Якщо $x = b_{\alpha_1}$, то отримано розклад (1) і $x = \Delta^B_{\alpha_1(\varnothing)}$.

Якщо $x \neq b_{\alpha_1}$, тобто $b_{\alpha_1} < x < b_{\alpha_1+1}$, то

$$0 < x - b_{\alpha_1} \equiv x_1 < b_{\alpha_1+1} - b_{\alpha_1} = \Theta_{\alpha_1} \text{ і } x = b_{\alpha_1} + x_1.$$

Розглянемо тепер число $x_1 \in (0; \Theta_{\alpha_1})$. Оскільки

$$(0; \Theta_{\alpha_1}) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [b_n\Theta_{\alpha_1}; b_{n+1}\Theta_{\alpha_1}),$$

то очевидно, що існує $\alpha_2 \in A$ таке, що $b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} \leq x_1 < b_{\alpha_2+1}\Theta_{\alpha_1}$.

Якщо $x_1 = b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1}$, то $x = b_{\alpha_1} + x_1 = b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} = \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2(\varnothing)}$.

Якщо $x_1 \neq b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1}$, тобто $b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} < x_1 < b_{\alpha_2+1}\Theta_{\alpha_1}$, то

$$0 < x_1 - b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} \equiv x_2 < b_{\alpha_2+1}\Theta_{\alpha_1} - b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} = \Theta_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} \quad \text{і} \;\; x_1 = b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} + x_2.$$

Далі аналогічні міркування продовжуємо стосовно числа $x_2$. Оскільки

$$x_2 \in (0; \Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2}) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [b_n\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2}; b_{n+1}\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2}),$$

то існує $\alpha_3 \in A$ таке, що $b_{\alpha_3}\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2} \leq x_2 < b_{\alpha_3+1}\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2}$.

Якщо $x_2 = b_{\alpha_3}\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2}$, то

$$x = b_{\alpha_1} + x_1 = b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} + x_2 = b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} + b_{\alpha_3}\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2} = \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\varnothing)}.$$

Якщо ж $x_2 \neq b_{\alpha_3}\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2}$, то

$$0 \leq x_2 - b_{\alpha_3}\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2} \equiv x_3 < \Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_3}.$$

Аналогічно міркуємо стосовно $x_3$. Так за скінченну кількість кроків отримаємо

$$\begin{aligned} x =& b_{\alpha_1} + x_1 = b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} + x_2 = \cdots = \\ =& b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} + b_{\alpha_3}\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2} + \cdots + b_{\alpha_m}\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2}\ldots\Theta_{\alpha_m-1} = \\ =& \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(\varnothing)} \end{aligned}$$

Якщо ж при будь-якому $m$

$$x = b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} + b_{\alpha_3}\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2} + \cdots + b_{\alpha_m}\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2}\ldots\Theta_{\alpha_m-1} + x_m,$$

де $x_m \neq 0$, то з того, що $\Theta_j \leq \Theta_0 < 1$ для будь-якого $j \in N$ маємо

$$x_m < \prod_{i=1}^{m-1} \Theta_{\alpha_i} \to 0 (m \to 0).$$

Звідки робимо висновок про збіжність процесу розкладу числа $x$ в ряд (2).

Є д и н і с т ь. Доведемо, що числа з формально різними розкладами рівними бути не можуть. Розглянемо всі можливі випадки:

1) $x_1 = \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ і $x_2 = \Delta^B_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$,

2) $x_1 = \Delta^B_{\alpha_1\ldots\alpha_m(\varnothing)}$, $x_2 = \Delta^B_{\beta_1\ldots\beta_m(\varnothing)}$,

3) $x_1 = \Delta^B_{\alpha_1\ldots\alpha_m(\varnothing)}$, $x_2 = \Delta^B_{\beta_1\ldots\beta_m\ldots\beta_k(\varnothing)}$.

У перших двох випадках можна скористатися спільними міркуваннями. Нехай 1). Оскільки числа $x_1$ і $x_2$ мають різні зображення, то існує $m$ таке, що $\alpha_m \neq \beta_m$, але $\alpha_i = \beta_i$, за умови $i < m$. Ради конкретності, нехай $\alpha_m < \beta_m$.

Розглянемо різницю $x_2 - x_1 = C\prod\limits_{i=1}^{m-1}\Theta_{\alpha_i}$, де

$$C \equiv b_{\beta_m} - b_{\alpha_m} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{\beta_{m+k}} \prod_{i=0}^{k-1} \Theta_{\beta_{m+i}} - \sum_{k=1}^{\infty} b_{\alpha_{m+k}} \prod_{i=0}^{k-1} \Theta_{\alpha_{m+i}}.$$

Оскільки $b_{\beta_m} - b_{\alpha_m} = \Theta_{\alpha_m} + \Theta_{\alpha_m+1} + \cdots + \Theta_{\beta_m-1} \geq \Theta_{\alpha_m}$,

$$0 < b_{\beta_{m+1}} \cdot \Theta_{\beta_m} < \sum_{k=1}^{\infty} b_{\beta_{m+k}} \prod_{i=0}^{k-1} \Theta_{\beta_{m+i}} < \Theta_{\beta_m} \cdot 1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{\alpha_{m+k}} \prod_{i=0}^{k-1} \Theta_{\alpha_{m+i}} < \sum_{k=1}^{\infty} b_{\alpha_{m+k}} \prod_{i=0}^{k-1} \Theta_{\alpha_{m+i}} < \Theta_{\alpha_m} \cdot 1,$$

то

$$C \geq (\Theta_{\alpha_m} + \Theta_{\alpha_m+1}) + \cdots + \Theta_{\beta_m-1} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{\beta_{m+k}} \prod_{i=0}^{k-1} \Theta_{\beta_{m+i}} - \Theta_{\alpha_m} > 0.$$

Отже, $x_2 > x_1$.

У випадку 2), коли $\alpha_n < \beta_n$, але $\alpha_i = \beta_i$ при $i < n < m$, то висновок обгрунтовується аналогічно до випадку 1).

У випадку 3) можливі підвипадки. 3.1. Якщо $\alpha_i = \beta_i$ для всіх $i \leq m$, то

$$x_2 - x_1 = \sum_{i=m+1}^{k} b_{\beta_i} \prod_{j=1}^{i-1} \Theta_{\beta_j} > 0.$$

3.2 Нехай існує $\alpha_n \neq \beta_n$, але $\alpha_i = \beta_i$ при $i < n \leq m$. Розглянемо число $x_3 = \Delta^B_{\beta_1\ldots\beta_m(\varnothing)}$. Згідно з пунктом 3.1 $x_3 < x_2$, а згідно з пунктом 2 маємо $x_1 = x_3$, тоді і лише тоді, коли $\alpha_i = \beta_i$ для всіх $i \leq m$. Тому при $\alpha_n < \beta_n$ маємо $x_1 < x_3 < x_2$. Нехай $\alpha_n > \beta_n$. Тоді $x_1 > x_3$. Розглянемо різницю $x_1 - x_2$. Маємо

$$x_1 - x_2 = C_1 \prod_{i=1}^{n-1} \Theta_{\alpha_i}, \text{ де}$$

$$C_1 = b_{\alpha_n} - b_{\beta_n} + \sum_{i=1}^{m} b_{\alpha_{n+i}} \prod_{j=0}^{i-1} \Theta_{\alpha_{n+j}} - \sum_{i=1}^{k} b_{\beta_{n+i}} \prod_{j=0}^{i-1} \Theta_{\beta_{n+j}}.$$

Оскільки $b_{\alpha_n} - b_{\beta_n} \geq \Theta_{\beta_n}$,

$$0 < b_{\alpha_{n+1}} \cdot \Theta_{\alpha_n} \leq \sum_{i=1}^{m} b_{\alpha_{n+i}} \prod_{j=0}^{i-1} \Theta_{\alpha_{n+j}} < \Theta_{\alpha_n},$$

$$\sum_{i=1}^{k} b_{\beta_{n+i}} \prod_{j=0}^{i-1} \Theta_{\beta_{n+j}} < \Theta_{\beta_n},$$

то $C_1 > \Theta_{\beta_n} + 0 - \Theta_{\beta_n} = 0$ і $x_1 > x_2$. □

**Наслідок 1.** $\Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(\varnothing)} \neq \Delta^B_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$ *при* $\forall(\alpha_n) \in Z^n, (\beta_n) \in L$,
$\Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(\varnothing)} \neq \Delta^B_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m(\varnothing)} \Leftrightarrow k = m$ *і* $\alpha_j = \beta_j$ *при* $j = \overline{(0; n)}$

**Приклад 1.** $\Delta^B_{(0)} = b_0 + b_0 \cdot \Theta_0 + b_0\Theta_0^2 + \ldots = \frac{b_0}{1-\Theta_0} = \frac{1}{2}$.

**Означення 1.** *Розклад $x$ в суму (1) або ряд (2) називатимемо його $B$-представленням, а символічні записи $\Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(\varnothing)}$ та $\Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ — його $B$-зображенням (скінченним або нескінченним відповідно). При цьому $\alpha_n$ називатимемо $n$-ою цифрою цього $B$-зображення.*

**Зауваження 1.** *Поклавши $0 \equiv \Delta^B_{(\varnothing)}$, матимемо $B$-зображення числа 0 і усіх чисел піввідрізка* $[0; 1)$.

З єдиності $B$-зображення числа слідує, що $\alpha_n(x)$ є коректно означеною функцією числа $x$, геометричний зміст якої буде з'ясовано нижче.

Числа, для яких виконується рівність (1), називаються *$B$-скінченними*, а ті, для яких виконується рівність (2), – *$B$-нескінченними*.

Множина всіх $B$-скінченних чисел є зліченною, всюди щільною у $(0; 1)$ множиною.

$B$-зображення є засобом кодування чисел інтервала $(0; 1)$, їх ідентифікації та порівняння: *числа $x = \Delta^B_{\alpha_1\ldots\alpha_m\ldots}$ і $y = \Delta^B_{\beta_1\ldots\beta_m\ldots}$ перебувають у відношенні $x < y$ тоді і лише тоді, коли існує $k \in N$ таке, що $\alpha_k < \beta_k$, але $\alpha_i = \beta_i$ при $i < k$.*

**Означення 2.** *Числа, що мають скінченне (нескінченне) $B$-зображення називатимемо $B$-скінченними ($B$-нескінченними). Множину всіх $B$-нескінченних чисел позначатимемо $B_\infty$. Рангом $B$-скінченного числа $x = \Delta^B_{c_1\ldots c_m(\varnothing)}$ називатимемо число $m$.*

Наслідок з попередньої теореми стверджує, що $B$-скінченне число і $B$-нескінченне число рівними бути не можуть.

Легко довести наступне твердження.

**Лема 1.** *Числа $x_1 = \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ і $x_2 = \Delta^B_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$ перебувають у відношенні:*

1. $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \alpha_n = \beta_n, \forall n \in Z$.

2. $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \alpha_n < \beta_n$, *але* $\alpha_i = \beta_i$ *при* $i < n$.

Справді, твердження (1) є наслідком єдиності $B$-зображення. Обгрунтування другого міститься у доведенні теореми 1, а саме — єдиності $B$-зображення.

## 2 Циліндричні множини та їх властивості

**Означення 3.** *Множина* $\Delta^B_{c_1\ldots c_m}$ *всіх чисел* $x \in (0;1)$, *що мають скінченне або нескінченне* $B$*-зображення з першими* $m$*-цифрами* $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *відповідно, тобто*

$$\Delta^B_{c_1\ldots c_m} = \{x : x = \Delta^B_{c_1\ldots c_m\alpha_{m+1}\ldots\alpha_n(\varnothing)} \text{ або } x = \Delta^B_{c_1\ldots c_m\alpha_{m+1}\ldots\alpha_{n+k}\ldots}\}$$

*називається циліндром рангу* $m$ *з основою* $c_1c_2\ldots c_m$.

*Безпосередньо з даного означення випливають властивості циліндрів:*

$$\Delta^B_{c_1\ldots c_m i} \subset \Delta^B_{c_1\ldots c_m}; \;\; \Delta^B_{c_1\ldots c_m} = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \Delta^B_{c_1\ldots c_m i}.$$

**Лема 2.** *Циліндр* $\Delta^B_{c_1\ldots c_m}$ *є піввідрізком* $[a;d)$ *з кінцями:*

$$a = b_{c_1} + \sum_{k=2}^{m} b_{c_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{c_i}, d = a + \prod_{i=1}^{m} \Theta_{c_i}.$$

*Доведення.* Очевидно, що $\min \Delta^B_{c_1\ldots c_m} = a$. Нехай $x \in \Delta^B_{c_1\ldots c_m}$.

Тоді $x = \Delta^B_{c_1\ldots c_m c_{m+1}\ldots c_{m+n}(\varnothing)}$ або $x = \Delta^B_{c_1\ldots c_m c_{m+1}\ldots c_{m+k}\ldots}$. Тому

$$x = a + (\prod_{i=1}^{m} \Theta_{c_i}) \cdot (b_{c_{m+1}} + \sum_{i=m+2}^{m+n} b_{c_i} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{c_{m+i}}) < d$$

або

$$x = a + (\prod_{i=1}^{m} \Theta_{c_i}) \cdot (b_{c_{m+1}} + \sum_{i=m+2}^{\infty} b_{c_i} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{c_{m+i}}) < d,$$

оскільки значення виразу в останніх круглих дужках менше 1. □

**Наслідок 2.** *Довжина циліндра:* $|\Delta^B_{c_1\ldots c_m}| = \prod\limits_{i=1}^{m} \Theta_{c_i}$.

Циліндри мають властивості:

1. $\sup \Delta^B_{c_1\ldots c_m i} = \inf \Delta^B_{c_1\ldots c_m[i+1]}, \forall i \in A$,
2. $\forall (\alpha_n) \in L : \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} = \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$

Кожен циліндр рангу $m$ містить нескінченну кількість $B$-скінченних чисел.

Множина $B_c$ усіх $B$-скінченних чисел є $N$-самоподібною множиною зі структурою самоподібності:

$$B_c = \bigcup_{i\in Z} B'_i, \text{ де } B'_i = \Delta^B_i \cap B_i.$$

## 3 Множини канторівського типу

**Теорема 2.** *Множина чисел* $C[B, V_n] = \{x : \alpha_n(x) \in V_n \subset Z\}$ *є ніде не щільною, якщо нескінченну кількість разів виконується нерівність* $V_n \neq Z$. *Її міра Лебега обчислюється за формулою*

$$\lambda(C) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{E}_n)}{\lambda(E_{n-1})} = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{\lambda(E_n)}{\lambda(E_{n-1})}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - W_n), \tag{3}$$

*де* $E_0 = [0; 1)$, $E_n$ *— об'єднання циліндрів* $n$*-го рангу, серед внутрішніх точок яких є точки множини* $C$, $\overline{E}_n \equiv E_{n-1} \setminus E_n$, $W_n \equiv \sum\limits_{i \in Z \setminus V_n} \Theta_i$.

*Доведення.* Оскільки $C \subset E_{n+1} \subset E_n\ \forall\ n \in N$, то

$$\lambda(C) \leq \lambda(E_n) = \frac{\lambda(E_n)}{\lambda(E_{n-1})} \cdot \frac{\lambda(E_{n-1})}{\lambda(E_{n-2})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(E_1)}{\lambda(E_0)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda(E_k)}{\lambda(E_{k-1})};$$

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \lim_{n \to \infty} E_n.$$

Враховуючи вимірність множини $C$ і неперервності міри Лебега, маємо

$$\lambda(C) = \lim_{n \to \infty} \lambda(E_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(E_n)}{\lambda(E_{n-1})}.$$

Оскільки $E_n = E_{n-1} \setminus \overline{E}_n$, то має місце передостання з рівностей (3), але $\frac{\lambda(\overline{E}_n)}{\lambda(E_{n-1})} = W_k$, а тому виконується остання з рівностей (3).

Для доведення ніде не щільності множини $C$ при зазначених умовах досить показати, що у будь-якому $B$-циліндрі існує інтервал, що не містить точок множини $C$.

Розглянемо довільний циліндр $\Delta^B_{c_1 \ldots c_m}$. Якщо $V_k \neq Z$, де $k > m$, $j \in Z \setminus V_k$, то циліндричний інтервал $\nabla^B_{c_1 \ldots c_m \alpha_{m+1} \ldots \alpha_{m+k-1} j}$, який належить $B$-циліндру $\Delta^B_{c_1 \ldots c_m}$,точок множини $C$ не містить. Це і вимагалось довести. □

**Наслідок 3.** $\lambda(C) > 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} W_k < \infty$.

**Теорема 3.** *Множина канторівського типу*

$$C[B, V] = \{x : \alpha_n(x) \in V \neq Z\}$$

*є* $N$*-самоподібною нуль-множиною Лебега,* $N$*-самоподібна розмірність якої збігається з фрактальною розмірністю Гаусдорфа-Безиковича і є розв'язком рівняння*

$$\sum_{i \in V} \Theta_i^x = 1. \tag{4}$$

*Доведення.* Оскільки

$$C = \bigcup_{i \in V}, \quad \text{де } C'_i = \Delta_i^B \cap C \ \text{ і } \ C'_i \overset{\Theta_i}{\sim} C,$$

то множина $C$ є $N$-самоподібною. Її $N$-самоподібна розмірність є розв'язком рівняння (4), існування та єдиність якого легко обгрунтовується.

Оскільки множина $C$ задовольняє умову відкритої множини, то $N$-самоподібна розмірність і розмірність Гаусдорфа-Безиковича збігаються [8]. □

**Теорема 4.** *Множина чисел інтервала $(0;1)$ з обмеженими цифрами $B$-зображення має нульову міру Лебега.*

*Доведення.* Нехай $n$ — довільне фіксоване натуральне число, $F_n$ — множина всіх чисел $(0;1)$, $B$-цифри яких належать інтервалу $(-n;n)$. Згідно з теоремою (2) $\lambda(F_n) = 0$. Якщо

$$F \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

то

$$\lambda(F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(F_n) = 0.$$

Оскільки кожна точка $x \in (0;1)$, множина $B$-цифр якої є обмеженою, очевидно належить $F_n$ при достатньо великому $n$, а отже, і множині $F$.Тому множина таких точок має нульову міру Лебега. □

**Наслідок 4.** *Для майже всіх (в розумінні міри Лебега) точок $x$ інтервалу $(0;1)$ виконується умова*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \alpha_n(x) = \infty,$$

*де $\alpha_n(x)$ — це $n$-та $B$-цифра $x$.*

## 4 Оператори лівостороннього та правостороннього зсувів

*Оператором лівосторонього зсуву* цифр $B$-зображення чисел називається функція $\omega$, означена рівностями:

$$\omega(\Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^B_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \ \omega(\Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(\varnothing)}) = \Delta^B_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n(\varnothing)}.$$

Оскільки

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}(b_{\alpha_k}\prod_{i=1}^{k-1}\Theta_{\alpha_i}) = b_{\alpha_1} + \Theta_{\alpha_i}\cdot(b_{\alpha_2} + \sum_{k=3}^{\infty} b_{\alpha_k}\prod_{i=2}^{k-1}\Theta_{\alpha_i}) = b_{\alpha_1} + \Theta_{\alpha_1}\cdot\omega(x),$$

то

$$\omega(x) = \frac{1}{\Theta_{\alpha_1(x)}}\cdot x - \frac{b_{\alpha_1(x)}}{\Theta_{\alpha_1(x)}}$$

Звідки бачимо, що оператор лівостороннього зсуву є кусково-лінійною функцією, яка є лінійною і зростаючою на кожному циліндрі 1-го рангу, зокрема на циліндрі $\Delta_0^B$ вона має вигляд:

$$\omega(x) = \frac{1-a}{1-3a} \cdot x - \frac{a}{1-3a}.$$

На лівому кінці кожного циліндра першого рангу оператор лівостороннього зсуву набуває нульового значення, оскільки $\omega(\Delta^B_{\alpha_1(\varnothing)}) = \Delta^B_{(\varnothing)} = 0$.

*Оператором $n$-кратним лівостороннього зсуву* називається функція, означена рівністю

$$y = \omega^n(x) = \omega(\omega^{n-1}(x)).$$

Оператор $n$-кратного лівостороннього зсуву є кусково-лінійною функцією, причому лінійною на кожному $B$-циліндрі $n$-го рангу.

*Оператором правостороннього зсуву* цифр $B$-зображення з параметром $i \in Z$ називається функція $\delta_i$, означена рівностями:

$$\delta_i(x = \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots}) = \Delta^B_{i\alpha_1\alpha_2\ldots},\ \delta_i(x = \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(\varnothing)}) = \Delta^B_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(\varnothing)}.$$

Коректність означення функції $\delta_i$ випливає з єдиності $B$-зображення чисел. Оскільки

$$\delta_i(x) = b_i + \Theta_i \cdot (b_{\alpha_1} + \sum_{k>1}(b_{\alpha_k}\prod_{i=1}^{k-1}\Theta_{\alpha_i})) = b_i + \Theta_i \cdot x,$$

то функція $\delta_i(x)$ є лінійною і зростаючою на всьому проміжку $[0;1)$, причому $\delta_i(0) = \Delta^B_{i(\varnothing)} = b_i$.

Рівняння $\delta_i(x) = \omega(x)$ має нескінченну множину розв'язків: $x = \Delta^B_{(ji)}$, $j \in Z$.

## 5 Хвостові множини

Казатимемо, що зображення $B$-нескінченних числа $x_1 = \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ і $x_2 = \Delta^B_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$ мають однаковий хвіст, якщо існують натуральні $k$ і $m$ такі, що $\alpha_{k+j} = \beta_{m+j}$ для всіх натуральних $j$, що символічно записується $x_1 \backsim x_2$. Вважатимемо, що усі $B$-скінченні числа мають однаковий хвіст.

Очевидно, що бінарне відношення „мати однаковий хвіст“ є відношенням еквівалентності. Кожен з класів еквівалентності, тобто елемент фактор-множини $B_{\infty/\backsim}$, називається хвостовою множиною. Легко бачити, хвостова множина є зліченною (як зліченне об'єднання зліченних множин), а фактор-множина $B_{\infty/\backsim}$ — континуальною.

**Означення 4.** *Функцією, що зберігає хвости $B$-зображення чисел називають таку функцію, для якої для будь-якого $x \in [0;1]$ і йому відповідного значення $f(x)$ виконується умова $x \sim f(x)$, тобто існують такі номери $n$ і $m$, що $\alpha_{n+i}(x) = \alpha_{m+i}(f(x))$, $i \in N$.*

Очевидно, що оператори лівостороннього та правостороннього зсувів є функціями, що збергіають хвости $B$-зображення чисел.

**Теорема 5.** *Множина всіх неперервних бієкцій (перетворень) інтервала* $(0;1)$ *в* $(0;1)$, *які зберігають хвости* $B$*-зображення чисел, утворюють відносно операції композиція перетворень некомутативну групу (групу неперервних перетворень, що зберігають хвости* $B$*-зображення чисел).*

*Доведення.* Для доведення теореми, враховуючи те, що тотожне перетворення зберігає хвости $B$-зображення чисел, досить навести приклад нетривіального перетворення, що зберігає хвости і двох перетворень, які не комутують.

$$f(x) = \begin{cases} \delta_i(x), & \text{якщо } \Delta^B_{(ji)} \le x \le \Delta^B_{([j+1]i)}, \\ \omega(x), & \text{якщо } \Delta^B_{([j+i]i)} \le x \le \Delta^B_{([j+1][i+1])}, \end{cases} \quad i \in Z, j \in Z,$$

зокрема

$$f(x) = \begin{cases} \delta_0(x), & \text{якщо } \Delta^B_{(-10)} \le x \le \Delta^B_{(00)}, \\ \omega(x), & \text{якщо } \Delta^B_{(00)} \le x \le \Delta^B_{(01)}. \end{cases}$$

Для обгрунтування некомутативності досить розглянути наступний приклад. Розглянемо два перевторення, що зберігають хвости $B$-зображення: $\delta_i(x)$, $\omega(x)$. Тоді

$$\delta_i(\omega(x = \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})) = \Delta^B_{i\alpha_2\ldots\alpha_n} \ne \omega(\delta_i(x = \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})) = \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}. \qquad \square$$

## 6 Проєктор одного $B$-зображення в інше

Розлянемо два параметри $a_1$ і $a_2$, які визначають відповідні $B_1$-зображення та $B_2$-зображення і функцію $f$, означену рівностями

$$f(x = \Delta^{B_1}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{B_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},\ f(x = \Delta^{B_1}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(\varnothing)}) = \Delta^{B_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(\varnothing)}. \tag{5}$$

Коркність означення функції є наслідком єдиності $B$-зображення чисел. Очевидно, що $f(x) = x$, якщо $a_1 = a_2$. Далі $a_1 \ne a_2$. Функція $f$, означена рівностями (5) називається проєктором $B_1$-зображення в $B_2$-зображення.

**Теорема 6.** *При* $a_1 \ne a_2$ *функція* $f$, *означена рівностями* (5) *є неперервною, строго зростаючою сингулярною функцією.*

*Доведення.* Твердження випливає з наслідка теореми (4), який виражає нормальну властивість $B$-зображення числа, властивостей $B$-циліндрів і теореми 3.11.1 з роботи [8]. $\square$

### Список літератури

[1] Galambos J. Representations of real numbers by infinite series.Berlin: Springer-Verlag, 1976. 146 p.

[2] *Pratsovytyi M. V., Baranovskyi O. M., Bondarenko O.I., Ratushniak S.P.* One class of continuous locally complicated functions related to infinite-symbol Φ-representation of numbers. Matematychni Studii, 59(2), 123-131. https://doi.org/10.30970/ms.59.2.123-131

[3] *Pratsovytyi M.V., Lechinskii O.L.* Properties of random variable defined by the distributions of elements of their $\widetilde{Q}_\infty$-representation // Theor. Probability and Math. Statist. No.57, 1998. — P.143–148.

[4] *Pratsiovytyi M.V., Feshchenko O.Yu.* Topological-metric and fractal properties of the distributions on the set of the incomplete sums of series of positive terms // Theory of Stochastic Processes. — 2007. — 13(29), № 1-2. — P. 205–224.

[5] Schweiger F. Ergodic theory of fibred systems and metric number theory. New York: Oxford University Press., 1995. 320 p.

[6] *Бондаренко О.І., Працьовитий М.В.* Канторівська система числення, пов'язвана з двійковим рядом і послідовність Фібоначчі // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — Т.14, № 4. — Київ: Інститут математики НАН України, 2017. С.178–187.

[7] *Працьовитий М., Бондаренко О., Лисенко І., Ратушняк С.* Неперервні функції з локально складними та фрактальними властивостями, пов'язані з нескінченносимвольним $B$-зображенням чисел// Нелінійні коливання, 2023, т. 26. № 3.

[8] *Працьовитий М. В.* Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. — Київ: Наукова думка, 2022. — 316с.

[9] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

## Список літератури

[1] Galambos J. Representations of real numbers by infinite series.Berlin: Springer-Verlag, 1976. 146 p.

[2] *Pratsovytyi M. V., Baranovskyi O. M., Bondarenko O.I., Ratushniak S.P.* One class of continuous locally complicated functions related to infinite-symbol Φ-representation of numbers. Matematychni Studii, 59(2), 123-131. https://doi.org/10.30970/ms.59.2.123-131

[3] *Pratsovytyi M.V., Lechinskii O.L.* Properties of random variable defined by the distributions of elements of their $\widetilde{Q}_\infty$-representation // Theor. Probability and Math. Statist. No.57, 1998. — P.143–148.

[4] *Pratsiovytyi M.V., Feshchenko O.Yu.* Topological-metric and fractal properties of the distributions on the set of the incomplete sums of series of positive terms // Theory of Stochastic Processes. — 2007. — 13(29), № 1-2. — P. 205–224.

[5] Schweiger F. Ergodic theory of fibred systems and metric number theory. New York: Oxford University Press., 1995. 320 p.

[6] *Bondarenko O.I., Pratsovytyi M. V.* Cantor's number system associated with the binary sequence and the Fibonacci sequence // Coll. of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. — 2017. — Vol.14, № 4. — Kyiv: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2017. P.178–187.

[7] *Pratsovytyi M., Bondarenko O., Lysenko I., Ratushniak S.* Continuous functions with locally complex and fractal properties associated with an infinite $B$-image of numbers // Nonlinear oscillations, 2023, Vol. 26. № 3.

[8] *Pratsiovytyi M.V.* Two-symbol encoding systems of real numbers and their application. — Kyiv: Scientific opinion, 2022. — 316 p. (in Ukrainian)

[9] *Pratsiovytyi M.V.* Fractal approach to investigation of singular probability distributions. — Natl. Pedagog. Mykhailo Drahomanov Univ. Publ., Kyiv, 1998. (in Ukrainian)

*Надійшло 23.09.2023*

Pratsiovytyi M.V., Bondarenko O.I., Vasylenko N.M., Lysenko I.M. *Infinite-symbol $B$-representation of real numbers and some of its applications*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 1 (2023), 94–105.

In the paper we justify existence and unity $B$-representation of numbers of segment $(0;1)$, which uses as a basis a positive number $a$ that satisfies the condition $0<a<\frac{1}{3}$ in particular the positive root $\tau$ of the equation $x^2+x-1=0$, bilateral sequence $(\Theta_n)$: $\Theta_0=\frac{1-3a}{1-a}$, $\Theta_{-n}=\Theta_n=a^{|n|}$ and alphabet $Z=\{0,\pm1,\pm2,\pm,\dots\}$,
namely

$$x=b_{\alpha_1}+\sum_{k=2}^{m}b_{\alpha_k}\prod_{i=1}^{k-1}\Theta_{\alpha_i}\equiv\Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(\varnothing)},$$

$$x=b_{\alpha_1}+\sum_{k=2}^{\infty}b_{\alpha_k}\prod_{i=1}^{k-1}\Theta_{\alpha_i}\equiv\Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

where $\alpha_n\in Z$, $\Theta_n>0\ \forall n\in Z$, $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\Theta_n=1$, $b_{n+1}\equiv\sum\limits_{i=-\infty}^{n-1}=b_n+\Theta_n\ \forall n\in Z$.

The geometry of $B$-representations of numbers is described (geometric content of numbers, properties of cylinder and tail sets, topological and metric properties of sets with restrictions on the use of numbers). The left and right shift operators of numbers are studied, a group of continuous transformations of the unit interval preserving the tails of the $B$-representation of numbers is described.