Bukovinian Math. Journal. 2023, **11**, 1, 126–133 Буковинський матем. журнал 2023, Т.11, №1, 126–133

Ратушняк С.П.

НЕПЕРЕРВНА НІДЕ НЕ МОНОТОННА ФУНКЦІЯ, ОЗНАЧЕНА В ТЕРМІНАХ ЛАНЦЮГОВОГО A_2-ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

Розглядається скінченний клас функцій, визначених параметрами e_0, e_1, e_2, що належать множині $A = \{0, 1\}$, цифри нескінченного ланцюгового A_2-зображення аргумента

$$x = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ddots}} \equiv \Delta^A_{a_1 \ldots a_n \ldots},$$

де $\alpha_n \in \{\frac{1}{2}; 1\}$, $a_n = 2\alpha_n - 1$, $n \in N$, і значення функції яких перебувають у рекурентній залежності, а саме:

$$f(x = \Delta^A_{a_1 \ldots a_{2n} \ldots}) = \Delta^A_{b_1 b_2 \ldots b_n \ldots},$$

$$b_1 = \begin{cases} e_0 & \text{при } (a_1, a_2) = (e_1, e_2), \\ 1 - e_0 & \text{при } (a_1, a_2) \neq (e_1, e_2), \end{cases}$$

$$b_{k+1} = \begin{cases} b_k & \text{при } (a_{2k+1}, a_{2k+2}) \neq (a_{2k-1}, a_{2k}), \\ 1 - b_k & \text{при } (a_{2k+1}, a_{2k+2}) = (a_{2k-1}, a_{2k}). \end{cases}$$

У статті обґрунтовується коректність означення функції, її неперервність та ніде не монотонність. Вивчено варіаційні властивості функції та доведено необмеженість її варіації.

Ключові слова і фрази: ланцюгове A_2-зображення чисел, A-зображення чисел, неперервна ніде не монотонна функція, функція необмеженої варіації, циліндри ланцюгового зображення чисел.

Institution of mathematics of NAS Ukraine,
Ukrainian State Dragomanov University, Kyiv, Ukraine
e-mail: *ratush404@gmail.com*

Вступ

Неперервні ніде не монотонні функції у метричному просторі $C[0; 1]$ утворюють множину другої категорії Бера, що є наслідком відомої теореми Банаха-Мазуркевича [7] про масивність множини неперервних ніде не диференційовних функцій, оскільки ніде не монотонність є необхідною умовою недиференційовності, тобто у топологічному

УДК 511.7+519.21
2010 *Mathematics Subject Classification:* 28A80,11K50,26A27, 26A30.

сенсі майже кожна функція цього простору є ніде не монотонною. Серед ніде не монотонних функцій є функції обмеженої та необмеженої варіації. Необмеженість варіації є необхідною умовою недиференційовності, оскільки функції обмеженої варіації є різницею двох зростаючих функцій. Інтерес до неперервних ніде не монотонних функцій в останній час суттєво зріс [6, 8, 9] завдяки розвитку фрактального аналізу, оскільки переважна більшість з них мають фрактальні властивості [2] в тому чи іншому сенсі (фрактальний графік, фрактальні рівні, фрактальні множини особливостей тощо).

Переважна більшість вивчених ніде не монотонних функцій мають самоафінні графіки, що спрощує вивчення їх властивостей. Несамоподібні системи зображення чисел [5], в першу чергу, зі скінченним алфавітом, які використовуються при задані і досліджені функції, вимагають суттєво тонкіших міркувань при вивченні властивостей функції [3].

У даній роботі для означення та дослідження функції ми використовуємо нескінченні ланцюгові дроби, елементами яких є числа $\frac{1}{2}$ та 1. Вони уже знайшли своє застосування у метричній теорії чисел [1, 3], теорії розподілів випадкових величин (в першу чергу сингулярних) [4], у конструктивній теорії локально складних функцій з фрактальними властивостями.

1 Ланцюгове A_2-зображення чисел відрізка $[\frac{1}{2};1]$

Нехай $A \equiv \{0;1\}$ — алфавіт, $L \equiv A \times A \times \ldots$ — простір послідовностей елементів алфавіту (нулів та одиниць); $A_2 = \{\frac{1}{2};1\}$, $L_2 \equiv A_2 \times A_2 \times \ldots$.

Відомо [1], що для будь-якого $x \in [\frac{1}{2};1]$ існує послідовність $(a_k) \in L_2$ така, що

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}} \equiv [0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots]. \tag{1}$$

Нескінченний ланцюговий дріб (1) називається *ланцюговим A_2-дробом*, а його символічний запис $[0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots]$ — *A_2-зображенням* числа x.

Існують числа, що мають два A_2-зображення, оскільки $[0; a_1, a_2, \ldots, a_m, \frac{1}{2}, (\frac{1}{2}, 1)] = [0; a_1, a_2, \ldots, a_m, 1, (1, \frac{1}{2})]$, решта чисел мають єдине A_2-зображення (тут круглі дужки символізують період). Їх називають *A_2-бінарними* числами. Решта чисел мають єдине зображення. Їх називають *A_2-унарними* числами. Множина A_2-бінарних чисел є зліченною всюди щільною у відрізку $[\frac{1}{2};1]$.

A_2-зображення легко перекодовується засобами алфавіту A, а саме:

$$x = [0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots] \equiv \Delta^A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},$$

де $\alpha_k = 2a_k - 1, k \in \mathbb{N}$. Останнє називається *$A$-зображенням числа x*.

A-циліндром рангу m з основою $c_1 \ldots c_m$ називається множина $\Delta^A_{c_1\ldots c_m}$ усіх чисел x, що мають зображення $x = \Delta^A_{c_1\ldots c_m\beta_1\beta_2\ldots}$, де $(\beta_n) \in L$.

Безпосередньо з наведеного означення A-циліндра маємо

1) $\Delta^A_{c_1\ldots c_m} = \Delta^A_{c_1\ldots c_m 0} \cup \Delta^A_{c_1\ldots c_m 1}$; $[\frac{1}{2};1] = \bigcup\limits_{c_1\in\{0,1\}} \ldots \bigcup\limits_{c_m\in\{0,1\}} \Delta^A_{c_1\ldots c_m}$.

2) A-циліндр $\Delta^A_{c_1...c_m}$ є відрізком з кінцями: $\Delta^A_{c_1...c_m(01)}$ і $\Delta^A_{c_1...c_m(10)}$, причому який з них лівий, а який правий залежить від парності (непарності) числа m.

2) довжина циліндра $\Delta^A_{c_1...c_m}$ обчислюється за формулою

$$|\Delta^A_{c_1...c_m}| = \frac{1}{(q_{m-1}+q_m)(q_{m-1}+2q_m)} \leq \frac{1}{q^2_{m-1}},$$

де q_m — знаменник m-го порядку підхідного дробу, тобто знаменник раціонального числа, що є значенням виразу $[0; a_1, a_2, ..., a_m]$, який обчислюється за формулами $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$, $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$, де $a_n = \frac{c_n+1}{2}$;

3) основне метричне відношення

$$\frac{|\Delta^A_{c_1...c_m c}|}{|\Delta^A_{c_1...c_m}|} = \frac{1 + a\frac{q_{m-1}}{q_m}}{2a^2 + 1 + 2a\frac{q_{m-1}}{q_m}},\ a = \frac{c+1}{2},$$

зокрема

$$\frac{|\Delta^A_{c_1...c_m 0}|}{|\Delta^A_{c_1...c_m}|} = \frac{2 + \frac{q_{m-1}}{q_m}}{3 + 2\frac{q_{m-1}}{q_m}}, \quad \frac{|\Delta^A_{c_1...c_m 1}|}{|\Delta^A_{c_1...c_m}|} = \frac{1 + \frac{q_{m-1}}{q_m}}{3 + 2\frac{q_{m-1}}{q_m}}.$$

2 Основний об'єкт дослідження

Нехай (e_0, e_1, e_2) — фіксована упорядкована трійка елементів алфавіту A. Означимо функцію f рівностями

$$f(x = \Delta^A_{a_1 a_2 ... a_{2n}...}) = \Delta^A_{b_1 b_2 ... b_n ...},\ \text{де} \tag{2}$$

$$b_1 = \begin{cases} e_0 & \text{при } (a_1, a_2) = (e_1, e_2), \\ 1 - e_0 & \text{при } (a_1, a_2) \neq (e_1, e_2), \end{cases} \tag{3}$$

$$b_{k+1} = \begin{cases} b_k & \text{при } (a_{2k+1}, a_{2k+2}) \neq (a_{2k-1}, a_{2k}), \\ 1 - b_k & \text{при } (a_{2k+1}, a_{2k+2}) = (a_{2k-1}, a_{2k}). \end{cases} \tag{4}$$

Якщо $e_0 = 0$, то $1 = f(\Delta^A_{(e_1 e_2)})$, $0 = f(\Delta^A_{([1-e_1][1-e_2])}) = f(\Delta^A_{(e_1[1-e_2])}) = f(\Delta^A_{([1-e_1]e_2)})$.

Якщо $e_0 = 1$, то $0 = f(\Delta^A_{(e_1 e_2)})$, $1 = f(\Delta^A_{([1-e_1][1-e_2])}) = f(\Delta^A_{(e_1[1-e_2])}) = f(\Delta^A_{([1-e_1]e_2)})$, тобто $f(\Delta^A_{(e_1 e_2)}) = 1 - e_0$, $f(\Delta^A_{([1-e_1][1-e_2])}) = f(\Delta^A_{(e_1[1-e_2])}) = f(\Delta^A_{([1-e_1]e_2)}) = e_0$, $e_0 \in A$.

Лема 1. *Означення функції рівностями* (2),(3) *і* (4) *є коректним.*

Доведення. Коректність означення функції f може порушуватися в A-бінарних точках, а саме якщо має місце нерівність: $f(\Delta^A_{a_1...a_m 0(01)}) \neq f(\Delta^A_{a_1...a_m 1(10)}), m \in N$.

Нехай e_0, e_1, e_2 — фіксовані параметри з A. Розглянемо довільне A-бінарне $x_0 \in [\frac{1}{2}; 1]$. Тоді воно має зображення $x_0 = \Delta^A_{a_1...a_m 0(01)} = \Delta^A_{a_1...a_m 1(10)}$. Можливі випадки: $m = 2k-1$ або $m = 2k$. Нехай $m = 2k-1$ і $y_1 = f(x_0 = \Delta^A_{a_1...a_{2k-1}0(01)}) = \Delta^A_{b_1...b_k(b_k[1-b_k])}$. Тоді $y_2 = f(x_0 = \Delta^A_{a_1...a_{2k-1}1(10)}) = \Delta^A_{b_1...b'_k(b'_k[1-b'_k])}$.

Якщо $(a_{2k-1}, 1) \neq (a_{2k-3}, a_{2k-2}) \neq (a_{2k-1}, 0)$, то $b_k = b'_k$, а тому $y_1 = y_2$. Аналогічна ситуація матиме якщо $(a_{2k-1}, 1) = (a_{2k-3}, a_{2k-1}) = (a_{2k-1}, 0)$.

Якщо $(a_{2k-1},1)=(a_{2k-3},a_{2k-1})\neq(a_{2k-1},0)$, то $b'_k=1-b_k$ і $y_1=y_2$ як значення двох різних A-бінарних зображень одного й того ж числа. Аналогічна ситуація матиме місце за умови, що $(a_{2k-1},1)\neq(a_{2k-3},a_{2k-1})=(a_{2k-1},0)$.

Нехай $m=2k$ і $y_1=f(x_0=\Delta^A_{a_1\ldots a_{2k-1}a_{2k}0(01)})=\Delta^A_{b_1\ldots b_k b_{k+1}(b_{k+1}[1-b_{k+1}])}$. Тоді $y_2=f(\Delta^A_{a_1\ldots a_{2k-1}a_{2k}1(10)})=\Delta^A_{b_1\ldots b_k b_{k+1}(b'_{k+1}[1-b'_{k+1}])}$.

Якщо $(0,0)\neq(a_{2k-1},a_{2k})\neq(1,1)$, то $b_{k+1}=b'_{k+1}$, а тому $y_1=y_2$. Аналогічна ситуація матиме якщо $(0,0)=(a_{2k-1},a_{2k})=(1,1)$.

Якщо $(0,0)=(a_{2k-1},a_{2k})\neq(1,1)$, то $b'_k=1-b_k$ і $y_1=y_2$ як значення двох різних A-бінарних зображень одного й того ж числа. Аналогічна ситуація матиме місце за умови, що $(0,0)\neq(a_{2k-1},a_{2k})=(1,1)$.

Отже, означення функції рівностями (2),(3) і (4) при довільній трійці $(e_0,e_1,e_2)\in A^3$ є коректним. $\square$

Зауваження 1. *Якщо в означенні функції f змінити умову (4) на умову*

$$b_{k+1}=\begin{cases}b_k & \text{при } (a_{2k+1},a_{2k+2})=(a_{2k-1},a_{2k}),\\ 1-b_k & \text{при } (a_{2k+1},a_{2k+2})\neq(a_{2k-1},a_{2k}),\end{cases}\tag{5}$$

то отримаємо новий клас функцій, коректність означення яких вимагатиме домовленості використовувати лише одне з двох A-бінарних зображень.

Теорема 1. *Функція f, означена рівностями (2)–(4), є неперервною і ніде не монотонною.*

Доведення. Покажемо неперервність f у довільно вибраній A-унарній точці $x_0=\Delta^A_{a_1a_2\ldots a_k\ldots}$. Нехай $f(x_0)=\Delta^A_{b_1\ldots b_m\ldots}$. Якщо $x\neq x_0$, то існує номер k такий, що $a_k(x)\neq a_k(x_0)$, але $a_i(x)=a_i(x_0)$ $i=\overline{1,k-1}$, причому умова $x\to x_0$ рівносильна умові $k\to\infty$. З означення функції бачимо, що для довільного достатньо близького до x_0 числа x існує m, таке що $f(x)\in\Delta^A_{b_1\ldots b_m}$. Тоді

$$|f(x)-f(x_0)|\leq|\Delta^A_{b_1\ldots b_m}|.$$

Оскільки $|\Delta^A_{b_1\ldots b_m}|\to0$ при $m\to\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)|\leq\lim_{m\to\infty}|\Delta^A_{b_1\ldots b_m}|=0.$$

Тому $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)|=0$ і $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. Таким чином функція f є неперервною в точці x_0. Оскільки x_0 — довільна A-унарна точка, то функція f неперервна на всій множині A-унарних чисел.

Неперервність функції у кожній A-бінарній точці є наслідком коректності означення функції в A-бінарних точках, оскільки аналогічно до попереднього доводиться неперервність функції f в такій точці зліва і справа. Отже, f неперервна на всій області визначення.

Для доведення ніде не монотонності функції f досить довести, що вона немонотонна в довільному інтервалі, але для довільного інтервалу легко вказати A-циліндр, що цілком йому належить. Тому достатньо довести немонотонність функції на довільному циліндрі. Розглянемо три точки одного циліндра $\Delta^A_{c_1c_2\ldots c_{2m}}$:

$$x_1 = \Delta^A_{c_1c_2\ldots c_{2m}0011(0)}, \quad x_2 = \Delta^A_{c_1c_2\ldots c_{2m}(0)}, \quad x_3 = \Delta^A_{c_1c_2\ldots c_{2m}0001(0)}.$$

Згідно правил порівняння чисел за їх A-зображеннями маємо, що $x_1 < x_2 < x_3$. Тоді

$$f(x_1) = \Delta^A_{b_1\ldots b_m ee(e[1-e])}, \quad f(x_2) = \Delta^A_{b_1\ldots b_m(e[1-e])}, \quad f(x_3) = \Delta^A_{b_1\ldots b_m ee(e[1-e])},$$

де $f(\Delta^A_{c_1c_2\ldots c_{2m}00}) = \Delta^A_{b_1\ldots b_m e}$, $c_i \in A$, $b_n \in A$, $i = \overline{1,2m}$, $n = \overline{1,m}$, $e \in A$. Звідки бачимо, що $(f(x_1) - f(x_2))(f(x_2) - f(x_3)) < 0$, а тому на циліндрі $\Delta^A_{c_1c_2\ldots c_{2m}}$ функція f немонотонна. В силу довільності вибору циліндра $\Delta^A_{c_1c_2\ldots c_{2m}}$ функція f є ніде не монотонною на усій області визначення. $\square$

Лема 2. *Образом A-циліндра $\Delta^A_{a_1a_2\ldots a_{2k}}$ парного рангу $2k$ під дією функції f є A-циліндр $\Delta^A_{b_1\ldots b_k}$ рангу k, причому кількість прообразів циліндра $\Delta^A_{b_1\ldots b_k b_{k+1}}$ дорівнює*

$$N_{k+1} \equiv N(\Delta^A_{b_1\ldots b_k b_{k+1}}) = 3^{k - \sum\limits_{i=1}^{k} |b_{i+1} - b_i| + |b_1 - e_0|}. \tag{6}$$

Доведення. Розглянемо циліндр $\Delta^A_{a_1\ldots a_{2k}}$ і точку, що йому належить $x_0 = \Delta^A_{a_1\ldots a_{2k}\alpha_1\alpha_2\ldots}$. Нехай $y_0 = f(x_0) = \Delta^A_{b_1\ldots b_k\beta_1\ldots}$. Зрозуміло, що $y_0 \in \Delta^A_{b_1\ldots b_k}$. Покажемо, що існують точки циліндра $\Delta^A_{a_1\ldots a_{2k}}$, образ яких є кінцями циліндра $\Delta^A_{b_1\ldots b_k}$. Такими є точки

$$x_1 = \Delta^A_{a_1\ldots a_{2k-1}a_{2k}(a_{2k-1}[1-a_{2k}]a_{2k-1}a_{2k})} \text{ і } x_2 = \Delta^A_{a_1\ldots a_{2k-1}a_{2k}a_{2k-1}a_{2k}(a_{2k-1}[1-a_{2k}])},$$

оскільки

$$f(x_1 = \Delta^A_{a_1\ldots a_{2k-1}a_{2k}(a_{2k-1}[1-a_{2k}]a_{2k-1}a_{2k})}) = \Delta^A_{b_1\ldots b_{k-1}b_k(b_k)},$$

$$f(x_2 = \Delta^A_{a_1\ldots a_{2k-1}a_{2k}a_{2k-1}a_{2k}(a_{2k-1}[1-a_{2k}]a_{2k-1}a_{2k})}) = \Delta^A_{b_1\ldots b_{k-1}b_k(1-b_k)}.$$

В силу неперервності функції f, циліндр $\Delta^A_{a_1\ldots a_{2k}}$ повністю відобразиться в $\Delta^A_{b_1\ldots b_k}$.

Для доведення другої частини леми використаємо метод математичної індукції. Прообразами циліндрів 1-го рангу є:

$$f^{-1}(\Delta^A_{e_0}) = \Delta^A_{e_1e_2}, \quad f^{-1}(\Delta^A_{[1-e_0]}) = \{\Delta^A_{[1-e_1]e_2}, \Delta^A_{e_1[1-e_2]}, \Delta^A_{[1-e_1][1-e_2]}\}.$$

Прообразами циліндрів 2-го рангу є:

$$f^{-1}(\Delta^A_{e_0e_0}) = \{\Delta^A_{e_1e_2[1-e_1]e_2}, \Delta^A_{e_1e_2e_1[1-e_2]}, \Delta^A_{e_1e_2[1-e_1][1-e_2]}\}, \; f^{-1}(\Delta^A_{e_0[1-e_0]}) = \{\Delta^A_{e_1e_2e_1e_2}\};$$

$$f^{-1}(\Delta^A_{[1-e_0]e_0}) = \{\Delta^A_{[1-e_1]e_2[1-e_1]e_2}, \Delta^A_{e_1[1-e_2]e_1[1-e_2]}, \Delta^A_{[1-e_1][1-e_2][1-e_1][1-e_2]}\},$$

$f^{-1}(\Delta^A_{[1-e_0][1-e_0]}) = \{\Delta^A_{[1-e_1]e_2e_1e_2}, \Delta^A_{[1-e_1]e_2e_1[1-e_2]}, \Delta^A_{[1-e_1]e_2[1-e_1][1-e_2]}, \Delta^A_{e_1[1-e_2]e_1e_2},$
$\Delta^A_{e_1[1-e_2][1-e_1][1-e_2]}, \Delta^A_{e_1[1-e_2][1-e_1]e_2}, \Delta^A_{[1-e_1][1-e_2]e_1e_2}, \Delta^A_{[1-e_1][1-e_2][1-e_1]e_2}, \Delta^A_{[1-e_1][1-e_2]e_1e_2}\}$.

При $k = 1$ рівність (6) виконується.

Припустимо, що вона виконується для $k = n$. Розглянемо при $k = n + 1$. Циліндр $\Delta^A_{b_1\ldots b_n}$ згідно з припущенням має N_n прообразів. Якщо $b_{n+1} \neq b_n$, то кількість прообразів не зміниться, оскільки

$$N_n = 3^{n-1-\sum\limits_{i=1}^{n-1} |b_{i+1} - b_i| + |b_1 - e_0|} = 3^{n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} |b_{i+1} - b_i| - |b_{n+1} - b_n| + |b_1 - e_0|} = N_{n+1}.$$

Якщо $b_{n+1}=b_n$, то згідно означення функції $N(\Delta^A_{b_1\ldots b_n b_{n+1}})=3N(\Delta^A_{b_1\ldots b_n})$, тобто

$$N_{n+1}=3^{n-1-\sum\limits_{i=1}^{n-1}|b_{i+1}-b_i|+|b_1-e_0|+1}=3^{n-\sum\limits_{i=1}^{n-1}|b_{i+1}-b_i|-|b_{n+1}-b_n|+|b_1-e_0|}=3^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}|b_{i+1}-b_i|+|b_1-e_0|}.$$

Лему доведено. □

Зауваження 2. *Легко показати, що коли* $\Delta^A_{b_1\ldots b_m}=f(\Delta^A_{a_1\ldots a_{2m}})$, *то найменше і найбільше значення функції* f *на циліндрі* $\Delta^A_{a_1\ldots a_{2m}}$ *дорівнює* $\min\Delta^A_{b_1\ldots b_m}$ *і* $\max\Delta^A_{b_1\ldots b_m}$. *Таким чином, коливання (різниця максимума і мінімума) функції* f *на* A*-циліндрі парного рангу дорівнює довжині його образу.*

Теорема 2. *Функція* f *має необмежену варіацію.*

Доведення. Варіація $V(f)$ функції f є більшою ніж сумарна довжина V_k образів усіх A-циліндрів рангу $2k$ для будь-якого $k\in N$, тобто

$$V(f)>V_k=\sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1}\ldots\sum_{a_{2k}=0}^{1}|f(\Delta^A_{a_1a_2\ldots a_{2k}})|.$$

Враховуючи, що існує лише один A-циліндр 2-го рангу $\Delta^A_{e_0[1-e_0]}$, що є образом циліндра 4-го рангу $\Delta^A_{e_1e_2e_1e_2}$, а решта циліндрів є образом принаймні трьох циліндрів 4-го рангу, то

$$V_2>\frac{3}{2}-|f(\Delta^A_{e_1e_2e_1e_2})|>1.$$

Аналогічно міркуючи стосовно довільного циліндра $\Delta^A_{a_1\ldots a_8}$ 8-го рангу, маємо $V_4>1$.

За індукцією $V_{4k}>1$, а тому $\lim\limits_{k\to\infty}V_{4k}=\infty$, отже, f має необмежену варіацію. □

Список літератури

[1] *S. O. Dmytrenko, D. V. Kyurchev, M. V. Prats'ovytyi* A_2-continued fraction representation of real numbers and its geometry // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009. — №4. — P. 541-555. https://doi.org/10.1007/s11253-009-0236-7

[2] *M.V. Pratsiovytyi, Ya.V. Goncharenko, S.O. Dmytrenko, I.M. Lysenko, S.P. Ratushniak,* About one class of function with fractal properties // Bukovynian Mathematical Journal. 2021, T. 6, № 1 — P.273–283. (in Ukrainian)

[3] *Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Lysenko I.M., Ratushniak S.P.* Continued A_2-fractions and singular functions // *Mat. Stud.*, 58, 2022. — C.3–12.

[4] *Pratsiovytyi M.V., Chuikov A.S.* Continuous distributions whose functions preserve tails of A-continued fraction representation of numbers// Random Operators and Stochastic Equations. 2019. Vol. 27 (3). Pp. 199–206.

[5] *Працьовитий М. В.* Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. — Київ: Наукова думка, 2022. — 316с.

[6] *Працьовитий М.В.* Ніде не монотонні сингулярні функції // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки, 2011.— №12. — С. 24–36.

[7] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

[8] *Працьовитий М.В., Ратушняк С.П.* Неперервна ніде не диференційовна функція з фрактальними властивостями, визначена в термінах Q_2-зображення // *Нелінійні коливання*, Т.23. №2, 2020. — С.231–252.

[9] *Працьовитий М.В., Чуйков А.С.* Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах нега-трійкових і ланцюгових A_2-дробів. Зб. праць Ін-ту математики НАН України. 2018. Т.15, № 1. С. 147–161.

Список літератури

[1] *S. O. Dmytrenko, D. V. Kyurchev, M. V. Prats'ovytyi* A_2-continued fraction representation of real numbers and its geometry // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009. — №4. — P. 541-555. https://doi.org/10.1007/s11253-009-0236-7

[2] *M.V. Pratsiovytyi, Ya.V. Goncharenko, S.O. Dmytrenko, I.M. Lysenko, S.P. Ratushniak,* About one class of function with fractal properties // Bukovynian Mathematical Journal. 2021, T. 6, № 1 — P.273–283. (in Ukrainian)

[3] *Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Lysenko I.M., Ratushniak S.P.* Continued A_2-fractions and singular functions // *Mat. Stud.*, 58, 2022. — P.3–12.

[4] *Pratsiovytyi M.V., Chuikov A.S.* Continuous distributions whose functions preserve tails of A-continued fraction representation of numbers// Random Operators and Stochastic Equations. 2019. Vol. 27 (3). Pp. 199–206.

[5] *Pratsiovytyi M.V.* Two-symbol encoding systems of real numbers and their application. — Kyiv: Scientific opinion, 2022. — 316 p. (in Ukrainian)

[6] *Pratsiovytyi M.V.* There are no monotonic singular functions // Scientific journal of M.P. Dragomanov National University. Series 1. Phys.-math. of science, 2011.— №12. — P. 24–36. (in Ukrainian)

[7] *Pratsiovytyi M.V.* Fractal approach in the study of singular distributions. — Kyiv: M.P. Dragomanova NPU,, 1998. — 296 p. (in Ukrainian)

[8] *Pratsiovytyi M.V., Ratushniak S.P.* A continuous nowhere differentiable function with fractal properties defined in terms of Q_2-image // *Nonlinear Oscillations*, Vol.23. №2, 2020. — P.231–252. (in Ukrainian)

[9] *Pratsiovytyi M.V., Chuikov A.S.* A continuous nowhere non-monotonic function defined in terms of negative-triple and chain A_2-fractions. Coll. Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. 2018. Vol.15, № 1. P. 147–161. (in Ukrainian)

Надійшло 23.09.2023

Ratushniak S.P. *Continuous nowhere monotonic function defined it term continued A_2-fractions representation of numbers*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 1 (2023), 126–133.

We consider finite class of functions defined by parameters e_0, e_1, e_2 belonging to the set $A = \{0, 1\}$. The digits of the continued fraction A_2-representation of the argument

$$x = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ddots}} \equiv \Delta^A_{a_1 \ldots a_n \ldots},$$

where $\alpha_n \in \{\frac{1}{2}; 1\}$, $a_n = 2\alpha_n - 1$, $n \in N$, and the values of the function are in a recursive dependence, namely:

$$f(x = \Delta^A_{a_1 \ldots a_{2n} \ldots}) = \Delta^A_{b_1 b_2 \ldots b_n \ldots},$$

$$b_1 = \begin{cases} e_0 & \text{if } (a_1, a_2) = (e_1, e_2), \\ 1 - e_0 & \text{if } (a_1, a_2) \neq (e_1, e_2), \end{cases}$$

$$b_{k+1} = \begin{cases} b_k & \text{if } (a_{2k+1}, a_{2k+2}) \neq (a_{2k-1}, a_{2k}), \\ 1 - b_k & \text{if } (a_{2k+1}, a_{2k+2}) = (a_{2k-1}, a_{2k}). \end{cases}$$

In the article, we justify the well-defined of the function, continuous and nowhere monotonic function. The variational properties of the function were studied and the unbounded variation was proved.