Bukovinian Math. Journal. 2023, **11**, 1, 63–70 Буковинський матем. журнал 2023, Т.11, №1, 63–70

Барановський О.М., Гетьман Б.І., Працьовитий М.В.

ЦИЛІНДРИЧНІ МНОЖИНИ E-ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ І ФРАКТАЛЬНА РОЗМІРНІСТЬ ГАУСДОРФА–БЕЗИКОВИЧА

Для нескінченносимвольного E-зображення чисел $x \in (0,1]$, а саме:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+g_1)\ldots(2+g_1+g_2+\ldots+g_n)} \equiv \Delta^E_{g_1 g_2 \ldots g_n \ldots},$$

де $g_n \in \mathbb{Z}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$, розглядається клас E-циліндрів — множин, означених рівністю

$$\Delta^E_{c_1\ldots c_m} = \left\{x\colon x = \Delta^E_{c_1\ldots c_m g_{m+1}\ldots g_{m+k}\ldots},\ g_{m+k} \in \mathbb{Z}_0,\ k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Доведено, що для визначення (обчислення) фрактальної розмірності Гаусдорфа–Безиковича довільної борелівської множини $B \subset [0,1]$ можна обмежуватися покриттями множини B зв'язними об'єднаннями E-циліндрів одного рангу, що належать одному циліндру попереднього рангу.

Ключові слова і фрази: Ряд Енгеля, E-зображення числа, розмірність Гаусдорфа–Безиковича .

Інститут математики НАН України, Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна (Барановський О.М.)
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна (Гетьман Б.І.)
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Інститут математики НАН України, Київ, Україна (Працьовитий М.В.)
e-mail: *baranovskyi@imath.kiev.ua (Барановський О.М.), pratsiovytyi@imath.kiev.ua (Працьовитий М.В.)*

Вступ

Ключовими поняттями теорії фракталів є α-мірна міра Гаусдорфа і розмірність Гаусдорфа–Безиковича. Нагадаємо їх зміст для множин одновимірного простору [3, с. 53–56].

УДК 511.72
2010 *Mathematics Subject Classification:* 11K55, 28A80.

Нехай $0 < \alpha$ — фіксований параметр. Тоді *α-мірною мірою Гаусдорфа* (H^α-мірою Гаусдорфа) обмеженої множини $B \subset \mathbb{R}^1$ називається число

$$H^\alpha(B) = \lim_{\varepsilon \to 0} m^\alpha_\varepsilon(B),$$
$$m^\alpha_\varepsilon(B) = \inf_{|B_i| \le \varepsilon} \left\{ \sum_i |B_i|^\alpha, \bigcup_i B_i \supset B \right\},$$

де нижня грань береться за всеможливими не більш ніж зчисленними ε-покриттями $\{B_i\}$ множини B (рівносильно відрізками або інтервалами).

Число

$$\alpha_0(B) = \sup\{\alpha : H^\alpha(B) = +\infty\} = \inf\{\alpha : H^\alpha(B) = 0\}$$

називають *розмірністю Гаусдорфа–Безиковича* (або розмірністю Гаусдорфа) множини B.

Задача обчислення розмірності, взагалі кажучи, є непростою, а іноді — надзвичайно складною, оскільки операції, які беруть участь в означенні, є лише потенційно здійсненними.

Якщо Φ — клас множин, що здійснюють подрібнюючі розбиття відрізка, якому належить множина B, а покриття множини B беруться виключно з класу Φ, то отримуємо *розмірність Гаусдорфа–Безиковича* множини B *відносно класу* Φ, що записується $\alpha_0(B, \Phi)$. Зрозуміло, що $\alpha_0(B, \Phi) \ge \alpha_0(B)$. Якщо $\alpha_0(B, \Phi) = \alpha_0(B)$, то кажуть, що система покриттів Φ є *довірчою.*

Добре відомою є теорема Біллінгслі [7, 8] (або [9]), що констатує довірчість класу покриттів множини $B \subset [0, 1]$ двійковими циліндрами. Існує ряд узагальнень та аналогів цієї теореми, які пов'язані з різними системами кодування (зображення) чисел (див, наприклад, [3, с. 87–97], [6], [11], [5] або [1, с. 212–216]). Дана стаття присвячена цій же проблемі і стосується представлення чисел рядами Енгеля (E-зображення).

1 Ряди Енгеля й E-зображення чисел

З відомої теореми Енгеля [10] випливає [4], що *для будь-якого числа $x \in (0, 1]$ існує єдина послідовність (g_n) цілих невід'ємних чисел така, що*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2 + g_1) \ldots (2 + g_1 + g_2 + \ldots + g_n)} \equiv \Delta^E_{g_1 g_2 \ldots g_n \ldots}. \tag{1}$$

Ряд (1) називається *рядом Енгеля*, останній символічний запис числа x — його *E-зображенням*, при цьому $g_n = g_n(x)$ — n-м символом (цифрою) цього зображення.

Якщо існує $p \in \mathbb{N}$ таке, що $g_{m+np+j} = g_{m+j}$, $1 \le j \le p$, для будь-якого $n \in \mathbb{Z}_0$, то кажуть, що E-зображення має період

$$g_{m+1} g_{m+2} \cdots g_{m+p},$$

це записується $\Delta^E_{g_1 g_2 \ldots g_m (g_{m+1} g_{m+2} \ldots g_{m+p})}$.

Число, E-зображення якого має період (0), називається *E-раціональним.* E-зображення таких чисел мають вигляд $\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m(0)}$.

E-раціональне число є раціональним, але не кожне раціональне число є E-раціональним.

Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$ називається множина $\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}$ всіх чисел $x\in(0,1]$, E-зображення яких має перші m символів c_1, c_2, …, c_m відповідно, тобто

$$\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}=\left\{x\colon g_i(x)=c_i,\ i=\overline{1,m}\right\}.$$

Як відомо [4], циліндр $\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}$ є півінтервалом з кінцями

$$a_m=\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_{m-1}[c_m+1](0)}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(2+\sigma_1)(2+\sigma_2)\ldots(2+\sigma_k)},$$

$$b_m=\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m(0)}=a_m+\frac{1}{(2+\sigma_1)(2+\sigma_2)\ldots(2+\sigma_m)(1+\sigma_m)},$$

де $\sigma_k\equiv c_1+c_2+\ldots+c_k$.

Як бачимо, кінці циліндра $\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}$ є E-раціональними числами:

$$\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_{m-1}[c_m+1](0)}\quad\text{і}\quad\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_{m-1}c_m(0)}.$$

Позначимо через $\nabla^E_{c_1c_2\ldots c_m}$ інтервал з такими самими кінцями, що й циліндр $\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}$.

Зауваження 1. *Кожна E-раціональна точка є спільним кінцем двох циліндрів деякого рангу m, які належать одному циліндру попереднього рангу (проміжок $(0,1]$ вважається циліндром нульового рангу). При цьому число m називається рангом E-раціональної точки.*

Циліндри мають властивості:

1. $\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}=\bigcup\limits_{c=0}^{\infty}\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_mc}$;
2. $\max\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m(c+1)}=\inf\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_mc}$;
3. $|\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}|=\dfrac{1}{(2+\sigma_1)(2+\sigma_2)\ldots(2+\sigma_m)(1+\sigma_m)}$;
4. $\dfrac{|\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_mc_{m+1}}|}{|\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}|}=\dfrac{1+\sigma_m}{(2+\sigma_{m+1})(1+\sigma_{m+1})}$;
5. Для довільної послідовності (c_n), $c_n\in\mathbb{Z}_0$, виконується
$$\bigcap_{m=1}^{\infty}\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}\equiv\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}=x\in(0,1].$$

Лема 1 ([2])**.** *Для будь-якого цілого невід'ємного s і набору цілих невід'ємних чисел $(c_1,c_2,\ldots,c_m)$ має місце співвідношення:*

$$\left|\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_ms}\right|=\frac{1}{\sigma_m+s+1}\sum_{j=s+1}^{\infty}\left|\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_mj}\right|,\tag{2}$$

де $\sigma_m\equiv c_1+c_2+\ldots+c_m$.

2 Основна теорема

Однією з традиційних задач теорії розмірності Гаусдорфа–Безиковича є задача про те, чи достатньо класу множин Φ для того, щоб $\alpha_0(B,\Phi) = \alpha_0(B)$.

Можна довести, що класу U циліндрів усіх рангів, що відповідають E-зображенню чисел, недостатньо для цього, тобто нескладно змоделювати множину B, для якої $\alpha_0(B,U) \neq \alpha_0(B)$.

Нехай W — клас усіх зв'язних множин, що є об'єднаннями циліндрів одного рангу, які належать одному циліндру попереднього рангу, тобто множин виду

$$(1)\quad \Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}, \qquad (2)\quad \bigcup_{i=n}^{\infty} \Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m i},$$

$$(3)\quad \bigcup_{i=1}^{n} \Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m i}, \qquad (4)\quad \bigcup_{i=k}^{n} \Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m i}$$

для всіх натуральних чисел k, m, n і наборів натуральних чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$.

Зрозуміло, що при $n = 1$ множина (2) є множиною (1), а при $k = 1$ множина (4) є множиною (3).

Позначимо через W_ε — підклас множин з W, діаметри яких не перевищують ε.

Лема 2. *Для довільного інтервалу $u \subset (0,1]$ існує не більше чотирьох множин з $W_{|u|}$, які покривають u і мають довжини, що не перевищують $|u|$.*

Доведення. Нехай $u = (a,b)$ — довільний інтервал з $(0,1]$. Точки a і b можуть належати

1. різним циліндричним відрізкам 1-го рангу,

2. одному циліндру 1-го рангу.

Розглянемо випадок (1). Нехай $a \in \Delta^E_{a_1}$, $b \in \Delta^E_{b_1}$, $c = \sup \Delta^E_{a_1}$, $d = \inf \Delta^E_{b_1}$. Оскільки $a < b$, то $a_1 > b_1$ і $a < d < b$.

Можливі підвипадки: $a_1 - b_1 > 1$ і $a_1 - b_1 = 1$.

1.1. Нехай $a_1 - b_1 > 1$. Тоді $(a,b) = (a,d] \cup (d,b)$.

Якщо $a = \inf \Delta^E_{a_1}$, то $[a,d] = \bigcup\limits_{i=b_1+1}^{a_1} \Delta^E_i \in W_{d-a} \subset W_{b-a}$.

Якщо $a \in \nabla^E_{a_1}$, то (a,d) покривається двома множинами з W_{d-a}, а саме:

$$\Delta^E_{a_1} \quad \text{і} \quad \bigcup_{j=b_1+1}^{a_1-1} \Delta^E_j.$$

Таким чином, для покриття $[a,d]$ достатньо двох множин з W_{d-a}, а отже, W_{b-a}.

Розглянемо $[d,b]$. Якщо $b = \sup \Delta^E_{b_1}$, то $[d,b] = \Delta^E_{b_1} \in W_{b-d} \subset W_{b-a}$.

Якщо $b \in \nabla^E_{b_1}$, то розглянемо циліндри 2-го рангу $\Delta^E_{b_1 j}$, які належать $\Delta^E_{b_1}$.

Якщо $b = \sup \Delta^E_{b_1 n}$, то $[d,b] = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \Delta^E_{b_1 j} \in W_{b-d}$.

Якщо $b \in \nabla^E_{b_1 n}$, то $[d, b]$ покривають: а) дві множини з W_{b-a}:

$$\bigcup_{j=1}^{n-1} \Delta^E_{b_1 j} \quad \text{і} \quad \Delta^E_{b_1 n}, \quad \text{якщо } n > 1,$$

б) одна множина $\Delta^E_{b_1 1}$, якщо $n = 1$, оскільки $\left|\Delta^E_{b_1 1}\right| < \left|\Delta^E_{b_1+1}\right|$, $\Delta^E_{b_1+1} \subset [a, b]$.

Отже, для покриття $[d, b]$ досить двох множин з W_{b-a} і не більше чотирьох множин для покриття $[a, b]$.

1.2. Нехай $a_1 - b_1 = 1$. Тоді $c = d$, $a \in \nabla^E_{a_1}$.

Розглянемо $[a, d]$. Якщо $a = \inf \Delta^E_{a_1 k}$, то

$$[a, d] = \bigcup_{j=k}^{\infty} \Delta^E_{a_1 j} \in W_{d-a} \subset W_{b-a}.$$

Якщо $a \in \nabla^E_{a_1 k}$, то $[a, d]$ покривається двома множинами з W_{b-a}, а саме:

$$\Delta^E_{a_1 k} \quad \text{і} \quad \bigcup_{j=k+1}^{\infty} \Delta^E_{a_1 j},$$

оскільки згідно з рівністю (2) маємо $\left|\Delta^E_{a_1 k}\right| < \sum\limits_{j=k+1}^{\infty} \left|\Delta^E_{a_1 j}\right|$.

Отже, для покриття $[a, d]$ досить двох множин з W_{b-a}.

Тепер розглянемо $[d, b]$. Якщо $b = \sup \Delta^E_{b_1 n}$, то

$$[d, b] = \bigcup_{j=1}^{n} \Delta^E_{b_1 j} \in W_{b-d}.$$

Якщо $b \in \nabla^E_{b_1 n}$ і $n > 1$, то $[d, b]$ покривається двома множинами з W_{b-a}, а саме:

$$\bigcup_{j=1}^{n-1} \Delta^E_{b_1 j} \quad \text{і} \quad \Delta^E_{b_1 n},$$

оскільки $\left|\Delta^E_{b_1 n}\right| < \left|\Delta^E_{b_1 1}\right|$, $\Delta^E_{b_1 1} \subset [d, b]$.

Якщо ж $b \in \nabla^E_{b_1 1}$, то розглянемо циліндри $\Delta^E_{b_1 1 j}$ рангу 3, які належать $\Delta^E_{b_1 1}$. В цьому випадку $[d, b]$ покривається не більш ніж двома множинами з W_{b-a}, а саме: а) якщо $b = \sup \Delta^E_{b_1 1 s}$, то однією множиною:

$$\bigcup_{j=s}^{\infty} \Delta^E_{b_1 1 j},$$

б) якщо $b \in \nabla^E_{b_1 1 s}$, то двома множинами

$$\bigcup_{j=s+1}^{\infty} \Delta^E_{b_1 1 j} \quad \text{і} \quad \Delta^E_{b_1 1 s},$$

оскільки довжина останнього циліндра є меншою за діаметр першої множини. Отже, для покриття $[d,b]$ досить двох множин з W_{b-a} і чотирьох множин для покриття всього $[a,b]$.

2. Якщо a і b належать одному циліндру 1-го рангу, то існує циліндр $\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}$ деякого рангу m, якому належать числа a і b, але не існує циліндра рангу $m+1$, якому б вони належали.

У випадку, коли m парне, для доведення леми досить повторити міркування з випадку 1, де роль півінтервалу $(0,1]$ буде відігравати циліндр $\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}$.

Якщо ж m — число непарне, дійти до висновку можна аналогічними міркуваннями. При цьому числа a і b, c і d обмінюються ролями. □

Теорема 1. *Класу множин W досить для визначення розмірності Гаусдорфа–Безиковича довільної борелівської множини $B \subset [0,1]$, тобто*

$$\alpha_0(B,W) = \alpha_0(B). \tag{3}$$

Доведення. З леми 2 випливає

$$m^\alpha_\varepsilon(B,W) \le 4m^\alpha_\varepsilon(B).$$

Справді, для довільного відрізка u, що бере участь в покритті B, існує не більше чотирьох множин ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 з W, для яких

$$|\omega_i|^\alpha \le |u|^\alpha \quad \text{для довільного } \alpha \in (0,1).$$

З іншого боку,

$$m^\alpha_\varepsilon(B) \le m^\alpha_\varepsilon(B,W),$$

оскільки у визначенні $m^\alpha_\varepsilon(B)$ інфімум береться по ширшому класу покриттів, який включає і множини з W. Таким чином,

$$m^\alpha_\varepsilon(B) \le m^\alpha_\varepsilon(B,W) \le 4m^\alpha_\varepsilon(B)$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$. Звідки

$$H^\alpha(B) \le H^\alpha(B,W) \le 4H^\alpha(B),$$

тобто $H^\alpha(B)$ і $H^\alpha(B,W)$ одночасно по α набувають значень 0 та ∞. А це означає, що має місце рівність (3). Теорему доведено. □

Список літератури

[1] Барановський О.М., Працьовитий М.В., Торбін Г.М. Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їхні застосування. Наук. думка, Київ, 2013.

[2] Гетьман Б.І. *Метричні властивості множини чисел, визначених умовами на їх розклади в ряд Енгеля.* Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки 2009, № 10, 47–58.

[3] Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, Київ, 1998.

[4] Працьовитий М.В., Гетьман Б.І. *Ряди Енгеля та їх застосування.* Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки 2006, № 7, 105–116.

[5] Albeverio S., Baranovskyi O., Kondratiev Yu., Pratsiovytyi M. *On one class of functions related to Ostrogradsky series and containing singular and nowhere monotonic functions.* Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки 2013, № 15, 24–41.

[6] Albeverio S., Koval V., Pratsiovytyi M., Torbin G. *On classification of singular measures and fractal properties of quasi-self-affine measures in* $\mathbb{R}^2$. Random Oper. Stoch. Equ. 2008, **16** (2), 181–211. doi:10.1515/ROSE.2008.010

[7] Billingsley P. *Hausdorff dimension in probability theory.* Illinois J. Math. 1960, **4** (2), 187–209. doi:10.1215/ijm/1255455863

[8] Billingsley P. *Hausdorff dimension in probability theory II.* Illinois J. Math. 1961, **5** (2), 291–298. doi:10.1215/ijm/1255629826

[9] Billingsley P. Ergodic theory and information. Wiley, New York, London, Sydney, 1965.

[10] Engel F. Entwicklung der Zahlen nach Stammbrüchen. In: Verh. d. 52. Versamml. dtsch. Philologen u. Schulmänner, Marburg, 1913, Teubner, Leipzig, 1914, 190–191.

[11] Kinney J.R., Pitcher T.S. *The dimension of some sets defined in terms of f-expansions.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 1966, **4** (4), 293–315. doi:10.1007/BF00539116

Література

[1] Baranovskyi O.M., Pratsiovytyi M.V., Torbin G.M. Ostrogradsky–Sierpiński–Pierce series and their applications. Nauk. Dumka, Kyiv, 2013. (in Ukrainian)

[2] Hetman B.I. *Metric properties of the set of numbers defined by conditions on their expansions by Engel series.* Nauk. Chasop. Nats. Pedagog. Univ. Mykhaila Drahomanova. Ser. 1. Fiz.-Mat. Nauky 2009, no. 10, 47–58. (in Ukrainian)

[3] Pratsiovytyi M.V. Fractal approach to investigation of singular probability distributions. Natl. Pedagog. Mykhailo Drahomanov Univ. Publ., Kyiv, 1998. (in Ukrainian)

[4] Pratsiovytyi M.V., Hetman B.I. *Engel series and their applications.* Nauk. Chasop. Nats. Pedagog. Univ. Mykhaila Drahomanova. Ser. 1. Fiz.-Mat. Nauky 2006, no. 7, 105–116. (in Ukrainian)

[5] Albeverio S., Baranovskyi O., Kondratiev Yu., Pratsiovytyi M. *On one class of functions related to Ostrogradsky series and containing singular and nowhere monotonic functions.* Nauk. Chasop. Nats. Pedagog. Univ. Mykhaila Drahomanova. Ser. 1. Fiz.-Mat. Nauky 2013, no. 15, 24–41.

[6] Albeverio S., Koval V., Pratsiovytyi M., Torbin G. *On classification of singular measures and fractal properties of quasi-self-affine measures in* $\mathbb{R}^2$. Random Oper. Stoch. Equ. 2008, **16** (2), 181–211. doi:10.1515/ROSE.2008.010

[7] Billingsley P. *Hausdorff dimension in probability theory.* Illinois J. Math. 1960, **4** (2), 187–209. doi:10.1215/ijm/1255455863

[8] Billingsley P. *Hausdorff dimension in probability theory II.* Illinois J. Math. 1961, **5** (2), 291–298. doi:10.1215/ijm/1255629826

[9] Billingsley P. Ergodic theory and information. Wiley, New York, London, Sydney, 1965.

[10] Engel F. Entwicklung der Zahlen nach Stammbrüchen. In: Verh. d. 52. Versamml. dtsch. Philologen u. Schulmänner, Marburg, 1913, Teubner, Leipzig, 1914, 190–191.

[11] Kinney J.R., Pitcher T.S. *The dimension of some sets defined in terms of f-expansions.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 1966, **4** (4), 293–315. doi:10.1007/BF00539116

Надійшло 22.09.2023

Baranovskyi O.M., Hetman B.I., Pratsiovytyi M.V. *Cylindrical sets of E-representation of numbers and fractal Hausdorff–Besicovitch dimension*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 1 (2023), 63–70.

For infinite-symbol E-representation of numbers $x \in (0, 1]$:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+g_1)\ldots(2+g_1+g_2+\ldots+g_n)} \equiv \Delta^E_{g_1 g_2 \ldots g_n \ldots},$$

where $g_n \in \mathbb{Z}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, we consider a class of E-cylinders, i.e., sets defined by equality

$$\Delta^E_{c_1 \ldots c_m} = \Big\{x \colon x = \Delta^E_{c_1 \ldots c_m g_{m+1} \ldots g_{m+k} \ldots},\ g_{m+k} \in \mathbb{Z}_0,\ k \in \mathbb{N}\Big\}.$$

We prove that, for determination (calculation) of fractal Hausdorff–Besicovitch dimension of any Borel set $B \subset [0, 1]$, it is enough to use coverings of the set B by connected unions of E-cylinders of the same rank that belong to the same cylinder of the previous rank.