

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут"

ВЕКТОР-ФУНКЦІЇ ГРІНА КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО РІВНЯННЯ ФОККЕРА–ПЛАНКА–КОЛМОГОРОВА НОРМАЛЬНОГО МАРКОВСЬКОГО ПРОЦЕСУ

Розглядаються задачі Діріхле та Неймана в півпросторі для модельного рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова нормального марковського процесу. Знайдено в явному вигляді та досліджено властивості вектор-функцій Гріна цих задач.

We consider Dirichlet and Neumann problems in a half-space for Fokker–Planck–Kolmogorov equation of a normal Markovian process. We obtain explicit forms for Green’s vector functions for these problems and investigate their properties.

Вступ

У теорії випадкових процесів і статистичній радіотехніці [1–3] виникають параболічні рівняння другого порядку, в яких коефіцієнти при похідних першого порядку за просторовими змінними є лінійними функціями цих змінних, а інші коефіцієнти сталі. Ці рівняння є рівняннями Фоккера–Планка–Колмогорова нормальних марковських процесів [3, с. 177–179]. Серед таких рівнянь, зокрема, є рівняння

$$\begin{aligned} (Lu)(t, x) &:= \partial_t u(t, x) - \\ &- \sum_{j=1}^n \left[a^2 \partial_{x_j}^2 u(t, x) + b \partial_{x_j} (x_j u(t, x)) \right] = \\ &= f(t, x), \\ t > 0, \quad x &:= (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (1)$$

в якому a і b – дійсні сталі, причому $a > 0$.

У статті [4] для деяких з указаних вище рівнянь (у тому числі для рівняння (1)) одержано явні формули для фундаментального розв’язку задачі Коші (ФРЗК) Z , за допомогою яких досліджено його властивості.

ФРЗК для рівняння (1) визначається формулою

$$\begin{aligned} Z(t, x, \xi) &:= (4\pi a^2 q(t))^{-n/2} e^{nb t} E_{1/(4a^2)}(t, x, \xi), \\ t > 0, \{x, \xi\} &\subset \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$q(t) := \begin{cases} \frac{1}{2b} (e^{2bt} - 1), & b \neq 0, \\ t, & b = 0; \end{cases}$$

$$E_c(t, x, \xi) :=$$

$$\exp \left\{ -c(q(t))^{-1} |e^{bt} x - \xi|^2 \right\}, \quad c > 0, \quad (3)$$

і має такі властивості:

1) функція $Z(t - \tau, x - \xi)$, в якій τ, ξ – основні, а t, x – параметричні змінні, є ФРЗК для спряженого до (1) рівняння

$$\begin{aligned} (L^*v)(\tau, \xi) &:= \left[-\partial_\tau - \sum_{j=1}^n (a^2 \partial_{\xi_j}^2 - b \xi_j \partial_{\xi_j}) \right] \times \\ &\times v(\tau, \xi) = 0, \quad \tau < 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n; \end{aligned} \quad (4)$$

2) виконуються рівності

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x, \xi) d\xi &= e^{nb t}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n; \\ \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x, \xi) dx &= 1, \quad t > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n; \end{aligned} \quad (5)$$

3) для будь-яких мультиіндексів $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ справджуються оцінки

$$\begin{aligned} \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta Z(t, x, \xi) \right| &\leq C_{\alpha\beta} \times \\ &\times (q(t))^{-(n+|\alpha|+|\beta|)/2} e^{(n+|\alpha|)bt} E_c(t, x, \xi), \\ t > 0, \{x, \xi\} &\subset \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (6)$$

в яких $C_{\alpha\beta}$ і c – додатні сталі, причому $c < 1/(4a^2)$;

4) є правильною формула згортки

$$Z(t, x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t - \gamma, x, y) Z(\gamma, y, \xi) dy,$$

$$0 < \gamma < t, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

Ці результати для ФРЗК застосовуються до встановлення коректної розв'язності задачі Коші, інтегрального зображення та властивостей розв'язків рівняння (1).

Однією з центральних проблем теорії лінійних параболічних крайових задач є детальне описання оператора, оберненого до оператора крайової задачі, в тому числі всебічне дослідження ядра цього оператора – матриці Гріна. У працях [5, 6] наведено результати, що стосуються побудови, властивостей і застосувань матриць Гріна загальних параболічних крайових задач з обмеженими коефіцієнтами в обмежених і необмежених областях.

Для різноманітних застосувань важливо мати детальну інформацію про матриці Гріна крайових задач у необмежених областях зі зростаючими на нескінченності коефіцієнтами. На теперішній час такої інформації в літературі є ще досить мало.

У нашій статті розглядаються дві крайові задачі для рівняння (1) зі зростаючими коефіцієнтами вигляду

$$(Lu)(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi^+, \quad (8)$$

$$(B^{(l)}u)(t, x)|_{x_n=0} = g(t, x'), \quad (t, x') \in \Pi', \quad (9_1)$$

$$u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \quad (10)$$

де $x := (x_1, \dots, x_n)$, $x' := (x_1, \dots, x_{n-1})$, $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$, $\Pi^+ := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} | t \in (0, \infty), x \in \mathbb{R}_+^n\}$, $\Pi' := \{(t, x') \in \mathbb{R}^n | t \in (0, \infty), x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$, $l \in \{1, 2\}$, $B^{(1)} = 1$ (умова Діріхле) і $B^{(2)} = \partial_{x_n}$ (умова Неймана).

Вектор-функцією Гріна цієї задачі називається така вектор-функція $(G_0^{(l)}, G_1^{(l)}, G_2^{(l)})$, що для довільних нескінченно диференційовних і фінітних функцій f , g і φ розв'язок

задачі (8), (9₁), (10) зображується у вигляді

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_+^n} G_0^{(l)}(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_1^{(l)}(t - \tau, x, \xi') g(\tau, \xi') d\xi' +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}_+^n} G_2^{(l)}(t, x, \xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad (t, x) \in \Pi^+.$$

Функція $G_0^{(l)}$ називається однорідною функцією Гріна, функція $G_1^{(l)}$ – ядром Пуассона, а функція $G_2^{(l)}$ – функцією впливу початкового миттєвого точкового джерела задачі (8), (9₁), (10). При цьому ці функції є розв'язками в просторі узагальнених функцій таких крайових задач:

$$LG_0^{(l)} = \delta(t, x - \xi), \quad B^{(l)}G_0^{(l)}|_{x_n=0} = 0,$$

$$G_0^{(l)} = 0 \text{ при } t < 0;$$

$$LG_1^{(l)} = 0, \quad B^{(l)}G_1^{(l)}|_{x_n=0} = \delta(t, x'),$$

$$G_1^{(l)} = 0 \text{ при } t < 0;$$

$$LG_2^{(l)} = 0, \quad B^{(l)}G_2^{(l)}|_{x_n=0} = 0,$$

$$G_2^{(l)}|_{t=0} = \delta(x - \xi),$$

де $\delta(t, x - \xi)$, $\delta(t, x')$ і $\delta(x - \xi)$ – дельта-функції, які зосереджені відповідно в точках $(0, \xi)$, $(0, 0)$ і ξ .

Метою статті є знаходження явних формул для функцій $G_j^{(l)}$, $j \in \{0, 1, 2\}$, $l \in \{1, 2\}$, та вивчення властивостей цих функцій. Оскільки в задачі (8), (9₁), (10) порядки крайових умов менші порядку рівняння, то легко переконатися (див. [5, с. 60-62]), що справджується рівність

$$G_2^{(l)}(t, x, \xi) = G_0^{(l)}(t, x, \xi),$$

$$t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}_+^n.$$

З огляду на це досить знайти й дослідити функції $G_0^{(l)}$ і $G_1^{(l)}$.

1. Ядра Пуассона

Для знаходження ядер Пуассона задач (8), (9₁), (10), $l \in \{1, 2\}$, треба розглянути ці задачі у випадку, коли $f = 0$ і $\varphi = 0$, а g є довільною нескінченно диференційовною і фінітною функцією. Для розв'язування таких задач використовуватимемо потенціали подвійного і простого шарів.

Спочатку розглянемо задачу (8), (9₁), (10) у зазначеному вище випадку. Будемо шукати її розв'язок у вигляді потенціалу подвійного шару

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{\xi_n} Z(t - \tau, x, \xi) |_{\xi_n=0} \times \\ \times \mu(\tau, \xi') d\xi', \quad (t, x) \in \Pi^+, \quad (11)$$

де Z – ФРЗК для рівняння (8), а μ – невідома функція. Априорі припускатимемо, що функція μ в області Π' обмежена та задовольняє умову Гельдера в такому сенсі:

$$\exists H > 0 \quad \exists \alpha \in (0, 1] \quad \forall \{(t, x'), (\tau, \xi')\} \subset \Pi' :$$

$$|\mu(t, x') - \mu(\tau, \xi')| \leq \\ \leq H((q(t - \tau))^{\alpha/2} + |e^{b(t-\tau)}x' - \xi'|^\alpha). \quad (12)$$

Для такої функції μ з означення та властивостей ФРЗК Z випливає, що функція (11) є розв'язком задачі (8), (10) з $f = 0$ і $\varphi = 0$. Треба підібрати функцію μ так, щоб функція (11) задовольняла умову (9₁). Для цього, скориставшись рівністю (2), запишемо формулу (11) у вигляді

$$u(t, x) = S(t, x) + T(t, x)\mu(t, x'), \\ (t, x) \in \Pi^+, \quad (13)$$

де

$$S(t, x) = 2(4a^2)^{-1-n/2} \pi^{-n/2} x_n \times \\ \times \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{(n+1)b(t-\tau)} (q(t-\tau))^{-1-n/2} \times \\ \times E_{1/(4a^2)}(t-\tau, x, (\xi', 0)) \times \\ \times (\mu(\tau, \xi') - \mu(t, x')) d\xi', \\ T(t, x) = 2(4a^2)^{-1-n/2} \pi^{-n/2} x_n \times$$

$$\times \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{(n+1)b(t-\tau)} (q(t-\tau))^{-1-n/2} \times \\ \times E_{1/(4a^2)}(t-\tau, x, (\xi', 0)) d\xi'. \quad (14)$$

Щоб знайти потрібну функцію μ , необхідно задовольнити функцією (13) крайову умову (9₁), а для цього треба знайти границі при $x_n \rightarrow 0$ виразів (14). Розглянемо спочатку вираз $T(t, x)$. Для функції

$$Z'_a(t, x', \xi') := (4\pi a^2 q(t))^{-(n-1)/2} e^{(n-1)bt} \times \\ \times E_{1/(4a^2)}(t, x', \xi'), \\ t > 0, \quad \{x', \xi'\} \subset \mathbb{R}^{n-1}, \quad (15)$$

яка згідно з (2) є ФРЗК для $(n-1)$ -вимірному рівнянню (1), скористаємося першою з рівностей (5), тобто

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} Z'_a(t, x', \xi') d\xi' = e^{(n-1)bt}, \\ t > 0, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \quad (16)$$

Тоді вираз для $T(t, x)$ набуває вигляду

$$T(t, x) = 2(4a^2)^{-3/2} \pi^{-1/2} x_n \int_0^t e^{(n+1)b(t-\tau)} \times \\ \times (q(t-\tau))^{-3/2} E_{1/(4a^2)}(t-\tau, x_n, 0) d\tau.$$

Після здійснення заміни змінної інтегрування τ за формулою

$$e^{b(t-\tau)} x_n \left(2a\sqrt{q(t-\tau)}\right)^{-1} = \gamma \quad (17)$$

одержимо

$$T(t, x) = \frac{(2a)^n}{a^2 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\gamma^2} \gamma^n (4a^2 \gamma^2 - 2bx_n^2)^{-n/2} \times \\ \times \chi_{[c(t, x_n), \infty)}(\gamma) d\gamma, \quad (18)$$

де $c(t, x_n) := e^{bt} x_n \left(2a\sqrt{q(t)}\right)^{-1}$, а χ_A – характеристична функція множини A .

Оскільки для довільного $\gamma > 0$ підінтегральна функція у (18) при $x_n \rightarrow 0$ прямує до $(2a)^{-n} e^{-\gamma^2}$ і при $\gamma > c(t, x_n)$ і $x_n > 0$ вона мажоруюється інтегровною функцією

$(2a)^{-n} e^{nbt-\gamma^2}$, $\gamma > 0$, то на підставі теореми Лебега про мажорантну збіжність у (18) можна переходити до границі при $x_n \rightarrow 0$ під знаком інтеграла та одержати рівність

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} T(t, x) = (2a^2)^{-1}, t > 0, x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \quad (19)$$

Тепер доведемо, що

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} S(t, x) = 0, t > 0, x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \quad (20)$$

За допомогою умови (12) маємо

$$\begin{aligned} S(t, x) &\leq 2(4a^2)^{-1-n/2} \pi^{-n/2} H x_n \times \\ &\times \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{(n+1)b(t-\tau)} (q(t-\tau))^{-1-n/2} \times \\ &\times E_{1/(4a^2)}(t-\tau, x, (\xi', 0)) ((q(t-\tau))^{\alpha/2} + \\ &+ |e^{b(t-\tau)} x' - \xi'|^\alpha) d\xi'. \end{aligned}$$

Використавши твердження

$$\begin{aligned} \forall r > 0 \quad \exists C_0 > 0 \quad \forall z > 0 : \\ z^r e^{-cz^2} &\leq C_0 e^{-c_0 z^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

де $0 < c_0 < c$, одержимо

$$\begin{aligned} |e^{b(t-\tau)} x' - \xi'|^\alpha E_{1/(4a^2)}(t-\tau, x', \xi') &\leq \\ &\leq C_0 (q(t-\tau))^{\alpha/2} E_{1/(8a^2)}(t-\tau, x', \xi') \end{aligned}$$

і, отже,

$$\begin{aligned} |S(t, x)| &\leq C_1 x_n \int_0^t e^{2b(t-\tau)} (q(t-\tau))^{(\alpha-3)/2} \times \\ &\times E_{1/(4a^2)}(t-\tau, x_n, 0) d\tau \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^{n-1}} Z' \sqrt{2a} (t-\tau, x', \xi') d\xi', \end{aligned}$$

де функція $Z' \sqrt{2a}$ означена рівністю (15), в якій a замінено на $\sqrt{2a}$. Для такої функції справджується рівність (16), тому маємо

$$\begin{aligned} |S(t, x)| &\leq C_2 x_n \int_0^t e^{(n+1)b(t-\tau)} \times \\ &\times (q(t-\tau))^{(\alpha-3)/2} E_{1/(4a^2)}(t-\tau, x_n, 0) d\tau. \end{aligned}$$

В останньому інтегралі зробимо заміну (17), у результаті прийдемо до нерівності

$$\begin{aligned} |S(t, x)| &\leq C_2 x_n^\alpha \int_{c(t, x_n)}^\infty e^{-\gamma^2} \times \\ &\times \gamma^n (4a^2 \gamma^2 - 2bx_n^2)^{-(n+\alpha)/2} d\gamma. \end{aligned} \quad (22)$$

Оцінивши підінтегральну функцію в (22) так само, як для інтеграла (18), одержимо оцінку

$$|S(t, x)| \leq C_3 \int_0^\infty e^{-\gamma^2} \gamma^{-\alpha} d\gamma e^{(n+\alpha)bt} x_n^\alpha,$$

з якої випливає рівність (20), бо останній інтеграл збігається.

На підставі (9₁), (13), (19) і (20) отримуємо, що

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} u(t, x) = g(t, x') = (2a^2)^{-1} \mu(t, x'),$$

$$(t, x') \in \Pi',$$

звідки $\mu(t, x') = 2a^2 g(t, x')$, $(t, x') \in \Pi'$.

Якщо тепер знайдену функцію μ підставити в рівність (11) і скористатись виразом (2) для Z , то прийдемо до такої формули для розв'язку задачі (8), (9₁), (10) з $f = 0$ і $\varphi = 0$:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_1^{(1)}(t-\tau, x-\xi') \times \\ &\times g(\tau, \xi') d\xi', \quad (t, x) \in \Pi^+, \end{aligned} \quad (23)$$

де

$$\begin{aligned} G_1^{(1)}(t, x, \xi') &:= (4\pi a^2)^{-n/2} (q(t))^{-1-n/2} \times \\ &\times e^{(n+1)bt} x_n E_{1/(4a^2)}(t, x, (\xi', 0)), \\ t > 0, \quad x &\in \mathbb{R}_+^n, \quad \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Для знаходження ядра Пуассона $G_1^{(2)}$ шукатимемо розв'язок задачі (8), (9₂), (10) з $f = 0$ і $\varphi = 0$ у вигляді потенціалу простого шару

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} Z(t-\tau, x, (\xi', 0)) \times$$

$$\times \mu(\tau, \xi') d\xi', \quad (t, x) \in \Pi^+, \quad (25)$$

де невідома функція μ припускається такою, як вище. Щоб знайти функцію μ розглянемо похідну $\partial_{x_n} u(t, x)$ і запишемо її у такому вигляді, аналогічному до (13):

$$\begin{aligned} \partial_{x_n} u(t, x) &= -Q(t, x) + R(t, x)\mu(t, x'), \\ (t, x) &\in \Pi^+, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} Q(t, x) &= 2(4a^2)^{-1-n/2} \pi^{-n/2} x_n \times \\ &\times \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{(n+2)b(t-\tau)} (q(t-\tau))^{-1-n/2} \times \\ &\times E_{1/(4a^2)}(t-\tau, x, (\xi', 0)) (\mu(\tau, \xi') - \mu(t, x')) d\xi', \\ R(t, x) &= 2(4a^2)^{-1-n/2} \pi^{-n/2} x_n \times \\ &\times \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{(n+2)b(t-\tau)} (q(t-\tau))^{-1-n/2} \times \\ &\times E_{1/(4a^2)}(t-\tau, x, (\xi', 0)) d\xi'. \end{aligned}$$

Так само, як і для функцій S і T , доводяться твердження

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} Q(t, x) = 0,$$

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} R(t, x) = (2a^2)^{-1},$$

з яких на підставі умови (9₂) випливає, що

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} \partial_{x_n} u(t, x) = g(t, x') = -(2a^2)^{-1} \mu(t, x').$$

Звідси маємо $\mu(t, x') = -2a^2 g(t, x')$, $(t, x') \in \Pi'$. Тому за допомогою (2) і (25) одержуємо для розв'язку задачі (8), (9₂), (10) з $f = 0$ і $\varphi = 0$ формулу, яка відрізняється від (23) заміною $G_1^{(1)}$ на $G_1^{(2)}$, де

$$\begin{aligned} G_1^{(2)}(t, x, \xi') &:= -2a^2 (4\pi a^2 e^{2bt} q(t))^{-n/2} \times \\ &\times E_{1/(4a^2)}(t, x, (\xi', 0)), \\ t > 0, \quad x &\in \mathbb{R}_+^n, \quad \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Отже, ядра Пуассона задач (8), (9₁), (10), $l \in \{1, 2\}$, визначаються формулами (24) і (26).

2. Однорідні функції Гріна

Згідно з результатами праць [5,6] однорідні функції Гріна $G_0^{(l)}$, $l \in \{1, 2\}$, можна шукати у вигляді

$$\begin{aligned} G_0^{(l)}(t, x, \xi) &= Z(t, x, \xi) - V^{(l)}(t, x, \xi), \\ t > 0, \quad \{x, \xi\} &\subset \mathbb{R}_+^n, \end{aligned} \quad (27)$$

де Z – ФРЗК для рівняння (1), а

$$\begin{aligned} V^{(l)}(t, x, \xi) &:= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_1^{(l)}(t-\tau, x, y') \times \\ &\times B^{(l)} Z(\tau, (y', 0), \xi) dy', \\ t > 0, \quad \{x, \xi\} &\subset \mathbb{R}_+^n. \end{aligned} \quad (28)$$

Нехай спочатку $l = 1$. Використовуючи формули (2), (15) і (24), маємо

$$\begin{aligned} V^{(1)}(t, x, \xi) &= (4\pi a^2)^{-1} x_n \times \\ &\times \int_0^t (q(t-\tau))^{-3/2} (q(\tau))^{-1/2} e^{b(2t-\tau)} \times \\ &\times \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} Z'_a(t-\tau, x', y') Z'_a(\tau, y', \xi') dy' \right) \times \\ &\times E_{1/(4a^2)}(t-\tau, x_n, 0) E_{1/(4a^2)}(\tau, 0, \xi_n) d\tau. \end{aligned}$$

Згідно з формулою згортки (7) для ФРЗК Z'_a інтеграл по \mathbb{R}^{n-1} дорівнює $Z'_a(t, x', \xi')$, тому за допомогою виразу (15) одержуємо

$$\begin{aligned} V^{(1)}(t, x, \xi) &= (4\pi a^2 q(t))^{-(n-1)/2} e^{nbt} \times \\ &\times E_{1/(4a^2)}(t, x', \xi') I^{(1)}(t, x_n, \xi_n), \end{aligned} \quad (29)$$

де

$$\begin{aligned} I^{(1)}(t, x_n, \xi_n) &:= (4\pi a^2)^{-1} x_n \int_0^t (q(t-\tau))^{-3/2} \times \\ &\times (q(\tau))^{-1/2} e^{b(t-\tau)} E_{1/(4a^2)}(t-\tau, x_n, 0) \times \\ &\times E_{1/(4a^2)}(\tau, 0, \xi_n) d\tau. \end{aligned}$$

В інтегралі зробимо заміну змінної інтегрування τ за формулою $q(\tau) = q(t)\beta$. У результаті маємо

$$I^{(1)}(t, x_n, \xi_n) := (4\pi a^2 q(t))^{-1} e^{bt} x_n \times$$

$$\times \int_0^1 (1-\beta)^{-3/2} \beta^{-1/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{(e^{bt} x_n)^2}{4a^2 q(t)(1-\beta)} - \frac{\xi_n^2}{4a^2 q(t)\beta} \right\} d\beta.$$

Останній інтеграл обчислюється, якщо в ньому послідовно зробити такі дві заміни змінних інтегрування:

$$\beta = \delta^2(1+\delta^2)^{-1}, \quad \delta = 2ae^{-bt} x_n^{-1} (q(t))^{1/2} z.$$

Після реалізації цих замін одержимо

$$I^{(1)}(t, x_n, \xi_n) = (\pi a)^{-1} (q(t))^{-1/2} \times \\ \times E_{1/(4a^2)}(t, x_n, -\xi_n) \int_0^\infty \exp \left\{ -\left(z - \frac{p}{z}\right)^2 \right\} dz,$$

де $p := (4a^2 q(t))^{-1} e^{bt} x_n \xi_n$. Звідси, врахувавши те, що останній інтеграл не залежить від $p \in \mathbb{R}$ і дорівнює $\sqrt{\pi}/2$, маємо рівність

$$I^{(1)}(t, x_n, \xi_n) = (4\pi a^2 q(t))^{-1/2} \times \\ \times E_{1/(4a^2)}(t, x_n, -\xi_n),$$

тому внаслідок (29) отримуємо формулу

$$V^{(1)}(t, x, \xi) = (4\pi a^2 q(t))^{-n/2} e^{nbt} \times \\ \times E_{1/(4a^2)}(t, x, (\xi', -\xi_n)), \\ t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}_+^n. \quad (30)$$

З рівностей (2), (27) і (30) випливає така остаточна формула:

$$G_0^{(1)}(t, x, \xi) := (4\pi a^2 q(t))^{-n/2} e^{nbt} \times \\ \times (E_{1/(4a^2)}(t, x, \xi) - E_{1/(4a^2)}(t, x, (\xi', -\xi_n))), \\ t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}_+^n. \quad (31)$$

У випадку $l = 2$

$$V^{(2)}(t, x, \xi) := \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_1^{(2)}(t-\tau, x, y') \partial_{y_n} \times \\ \times Z(\tau, y, \xi) |_{y_n=0} dy'.$$

Оскільки

$$\partial_{y_n} Z(\tau, y, \xi) |_{y_n=0} = 2(4a^2 q(\tau))^{-1-n/2} \pi^{-n/2} \times$$

$$\times e^{(n+1)b\tau} \xi_n E_{1/(4a^2)}(\tau, (y', 0), \xi),$$

то з урахуванням (7), (15) і (26) маємо

$$V^{(2)}(t, x, \xi) = -(4\pi a^2)^{-1} \xi_n \int_0^t (q(t-\tau))^{-1/2} \times \\ \times (q(\tau))^{-3/2} e^{b(t+\tau)} \times \\ \times \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} Z'_a(t-\tau, x', y') Z'_a(\tau, y', \xi') dy' \right) \times \\ \times E_{1/(4a^2)}(t-\tau, x_n, 0) E_{1/(4a^2)}(\tau, 0, \xi_n) d\tau = \\ = (4\pi a^2 q(t))^{-(n-1)/2} e^{nbt} E_{1/(4a^2)}(t, x', \xi') \times \\ \times I^{(2)}(t, x_n, \xi_n),$$

де

$$I^{(2)}(t, x_n, \xi_n) := -(4\pi a^2)^{-1} \xi_n \times \\ \times \int_0^t (q(t-\tau))^{-1/2} (q(\tau))^{-3/2} e^{b\tau} \times \\ \times E_{1/(4a^2)}(t-\tau, x_n, 0) E_{1/(4a^2)}(\tau, 0, \xi_n) d\tau.$$

Цей інтеграл обчислюється подібно до інтеграла $I^{(1)}$ і дорівнює

$$-(4\pi a^2 q(t))^{-1/2} E_{1/(4a^2)}(t, x_n, -\xi_n).$$

Тому

$$V^{(2)}(t, x, \xi) = -(4\pi a^2 q(t))^{-n/2} e^{nbt} \times \\ \times E_{1/(4a^2)}(t, x, (\xi', -\xi_n)), \\ t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}_+^n. \quad (32)$$

На підставі рівностей (2), (27) і (32) отримуємо формулу

$$G_0^{(2)}(t, x, \xi) := (4\pi a^2 q(t))^{-n/2} e^{nbt} \times \\ \times (E_{1/(4a^2)}(t, x, \xi) + E_{1/(4a^2)}(t, x, (\xi', -\xi_n))), \\ t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}_+^n. \quad (33)$$

3. Властивості ядер Пуассона та однорідних функцій Гріна

З явних виразів (24), (26), (31) і (33) для функцій $G_1^{(l)}$ і $G_0^{(l)}$, $l \in \{1, 2\}$, випливають різноманітні властивості цих функцій. Вони не тільки добре узгоджуються з відповідними властивостями матриць Гріна загальних нормальних параболічних крайових задач з обмеженими коефіцієнтами (див. [5,6]), але й їх доповнюють. Наведемо деякі з них.

1) оцінки $G_1^{(l)}$. Для будь-яких мультиіндексів $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ справджуються оцінки

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta G_1^{(l)}(t, x, \xi') \right| \leq C_{\alpha\beta} \times \\ \times (q(t))^{-(n+2-l+|\alpha+|\beta|)/2} e^{(n+|\alpha|)bt} E_c(t, x, (\xi', 0)), \\ t > 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \quad \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad (34)$$

де $C_{\alpha\beta}$ і c – додатні числа, $l \in \{1, 2\}$.

2) оцінки $G_0^{(l)}$. Для довільних мультиіндексів $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ справджуються оцінки

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta G_0^{(l)}(t, x, \xi) \right| \leq C_{\alpha\beta} \times \\ \times (q(t))^{-(n+|\alpha+|\beta|)/2} e^{(n+|\alpha|)bt} E_c(t, x, \xi), \\ t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}_+^n, \quad (35) \\ \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta V^{(l)}(t, x, \xi) \right| \leq C_{\alpha\beta} (q(t))^{-(n+|\alpha+|\beta|)/2} \times \\ \times e^{(n+|\alpha|)bt} \exp \left\{ -c(q(t))^{-1} (|e^{bt}x - \xi| + \xi_n)^2 \right\}, \\ t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}_+^n, \quad (36)$$

де $V^{(l)}$, $l \in \{1, 2\}$, – функції, означені в (30) і (32), $C_{\alpha\beta}$ і c – додатні сталі.

Доведення оцінок (34)–(36) легко провести, якщо використовувати явні вирази для функцій $G_1^{(l)}$, $G_0^{(l)}$, $V^{(l)}$ і твердження (21).

Наступні властивості однорідних функцій Гріна характерні для нормальних параболічних крайових задач, якими є задачі (8), (9₁), (10). Вони є аналогами властивостей 1) і 4) зі вступу ФРЗК Z для рівняння (1) і доводяться аналогічно.

3) нормальність $G_0^{(l)}$. Функція $G_0^{(l)}(t - \tau, x, \xi)$, в якій τ, ξ – основні, а t, x – параметричні змінні, є однорідними функціями Гріна відповідних спряжених до (8), (9₁), (10) крайових задач.

4) формула згортки для $G_0^{(l)}$. Правильна формула

$$G_0^{(l)}(t, x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} G_0^{(l)}(t - \gamma, x, y) G_0^{(l)}(\gamma, y, \xi) dy, \\ 0 < \gamma < t, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}_+^n.$$

Висновки

Одержані в статті відомості про елементи вектор-функцій Гріна крайових задач для найпростішого параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами певним чином показують, як впливають на властивості вектор-функцій Гріна наявність зростаючих коефіцієнтів. Ці відомості можуть використовуватися для встановлення коректної розв'язності задач (8), (9₁), (10), інтегрального зображення та властивостей її розв'язків. Методика виведення явних формул для елементів вектор-функцій Гріна може застосовуватись у випадку складніших крайових задач.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения / А.Т. Баруча-Рид. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. – 511 с.
2. Тихонов В.И. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов / В.И. Тихонов, Н.К. Кульман. – М.: Сов. радио, 1975. – 704 с.
3. Тихонов В.И. Марковские процессы / В.И. Тихонов, М.А. Миронов. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
4. Заболотько Т.О. Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами та деякі його застосування / Т.О. Заболотько, С.Д. Івасишен, Г.С. Пасічник // Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича. Сер.: математика: зб. наук. пр. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2012. – Т. 2, №2–3. – С. 81 – 89.
5. Івасишен С.Д. Линејные параболіческие граничне задачи / С.Д. Івасишен. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1987. – 72 с. – (Современные достижения математики и ее приложений).
6. Івасишен С.Д. Матрицы Грина параболіческих граничних задач / С.Д. Івасишен. – К.: Вища шк., 1990. – 200 с.