Городецький В.В., Мартинюк О.В., Мартинюк С.В., Колісник Р.С.

ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ АБЕЛЯ–ПУАССОНА ФОРМАЛЬНИХ РЯДІВ ЕРМІТА

У роботі досліджуються властивості перетворення Абеля–Пуассона формальних рядів Ерміта (властивість диференційовності, граничні властивості). Такі ряди ототожнюються з лінійними неперервними функціоналами, заданими на просторі $S_{1/2}^{1/2}$, який відноситься до просторів типу S. Простір $S_{1/2}^{1/2}$ збігається з класом аналітичних векторів гармонійного осцилятора – оператора – $d^2/dx^2 + x^2$, який є невід'ємним і самоспряженим у гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$. Знайдено явний вигляд функції, яка є ядром перетворення Абеля–Пуассона, досліджені властивості цієї функції. Дається застосування такого перетворення при дослідженні розв'язності задачі Коші для рівняння з частинними похідними, яке вироджується.

Ключові слова і фрази: задача Коші, перетворення Абеля–Пуассона, простори типу S, ряди Ерміта, гармонійний осцилятор.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *o.martynyuk@chnu.edu.ua*

Вступ

При дослідженні багатьох задач аналізу та математичної фізики використовуються функціональні ряди, побудовані за ортонормованими системами функцій у різних гільбертових просторах. Розв'язки таких задач зображаються у вигляді таких рядів, підсумованих певними лінійними методами (Абеля–Пуассона, Гаусса–Вейєрштрасса та ін.). Наприклад, розв'язок періодичної задачі Коші для рівняння теплопровідності збігається з перетворенням Гаусса–Вейєрштрасса тригонометричного ряду початкової функції. З розвиненням теорії узагальнених функцій такі ряди стали ототожнюватись із лінійними неперервними функціоналами, заданими на різних просторах узагальнених функцій (розподілів Шварца, ультрарозподілів, гіперфункцій тощо [1, 2, 3, 4, 5, 6]). Це дозволило значно розширити область застосування таких рядів, зокрема, у теорії позитивних та негативних просторів, які будуються за невід'ємними самоспряженими операторами у гільбертових просторах, спектри яких суто дискретні. До таких рядів

УДК 517.96
2010 *Mathematics Subject Classification:* 39B12, 45J05.
Information on some grant ...

© Городецький В.В., Мартинюк О.В., Мартинюк С.В., Колісник Р.С., 2023

відносяться і формальні ряди Ерміта, що будуються за ортонормованою у $L_2(\mathbb{R})$ системою функцій Ерміта. Такі ряди ототожнюються з неперервними функціоналами, заданими на просторах типу S. Функції Ерміта є власними функціями гармонійного осцилятора – невід'ємного самоспряженого в $L_2(\mathbb{R})$ оператора.

У цій роботі досліджуються властивості перетворення Абеля–Пуассона формальних рядів Ерміта (зокрема, властивість диференційовності за параметром, певні граничні властивості). Знайдено явний вигляд функції, яка є ядром такого перетворення, досліджені властивості цієї функції, дається застосування такого перетворення при дослідженні розв'язності задачі Коші для певного рівняння з частинними похідними, що вироджується.

1 Ортонормовані многочлени Ерміта. Функції Ерміта

Функція $F : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ називається ваговою, якщо абсолютно збіжними є інтеграли

$$\alpha_n = \int\limits_{\mathbb{R}} x^n F(x) dx, \ n \in \mathbb{Z}_+,$$

які називаються степеневими моментами функції F. За F, зокрема, можна взяти функцію $\exp(-x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. Користуючись методом математичної індукції, можна довести, що

$$\left(e^{-x^2}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{n-k} n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}, \quad x \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже, функція $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, є многочленом степеня n. Цей многочлен називається *стандартизованим* многочленом Ерміта. Многочлени $\{H_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ ортогональні на $\mathbb{R}$ з ваговою функцією $\exp(-x^2)$, при цьому

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_n(x) dx = \sqrt{\pi} 2^n n!, \ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Ортонормовані многочлени Ерміта $\hat{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, мають вигляд

$$\hat{H}_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{n! 2^n \sqrt{\pi}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n! 2^n \sqrt{\pi}}} e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n)}, \ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Многочлени $\hat{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, побудовані за ваговою функцією $F(x) = \exp(-x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, утворюють ортонормований базис у просторі $L_2(\mathbb{R}, \exp(-x^2))$. У просторі $L_2(\mathbb{R})$ ортонормований базис утворюють функції Ерміта

$$h_n(x) = e^{-x^2/2} \hat{H}_n(x) = (-1)^n \pi^{-1/4} (n! 2^n)^{-1/2} e^{x^2/2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \ x \in \mathbb{R}.$$

Функції Ерміта є власними функціями невід'ємного самоспряженого в $L_2(\mathbb{R})$ оператора $-d^2/dx^2 + x^2$ – гармонійного осцилятора, власними числами якого є $\lambda_k = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

2 Простори основних та узагальнених функцій. Формальні ряди Ерміта

Символом S_β^β, $\beta > 0$ – фіксований параметр, позначають сукупність функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які задовольняють умову

$$\exists c > 0 \ \exists A > 0 \ \exists B > 0 \ \forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+ \ \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$\left| x^k \varphi^{(m)}(x) \right| \leq c A^k B^m k^{k\beta} m^{m\beta}$$

(сталі $c, A, B > 0$ залежать від функції φ).

Якщо $\beta \geq 1/2$, то простори S_β^β нетривіальні і утворюють щільні в $L_2(\mathbb{R})$ множини. Якщо $1/2 \leq \beta < 1$, то S_β^β складається з тих і лише тих функцій $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину і для яких

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \exp\left\{ -a|x|^{1/\beta} + b|y|^{1/(1-\beta)} \right\}, \ \{x, y\} \subset \mathbb{R},$$

де сталі $c, a, b > 0$ залежать лише від функції φ.

Простори S_β^β, $\beta \geq 1/2$, можна охарактеризувати ще так:

$$S_\beta^\beta = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \exists c, a, B > 0 \ \forall m \in \mathbb{Z}_+ \ \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$\left| \varphi^{(m)}(x) \right| \leq c B^m m^{m\beta} \exp\left\{ -a|x|^{1/\beta} \right\} \}$$

(сталі $c, a, B > 0$ залежать від функції φ).

У просторах S_β^β, $\beta \geq 1/2$, визначені операції множення на незалежну змінну, диференціювання, зсуву аргумента, розтягу та стискання: $\varphi(x) \to \varphi(\lambda x)$, $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Звідси, зокрема, випливає, що функції Ерміта h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, належать до простору $S_{1/2}^{1/2}$. Справді, $e^{-x^2} \in S_{1/2}^{1/2}$, бо

$$\left| e^{-z^2/2} \right| = e^{-x^2/2 + y^2/2}, \ z = x + iy \in \mathbb{C},$$

звідси та з характеристики просторів S_β^β, $1/2 \leq \beta < 1$, випливає, що $\dfrac{1}{\beta} = 2$, $\dfrac{1}{1-\beta} = 2$, тобто $\beta = \dfrac{1}{2}$. Функції Ерміта h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, мають вигляд $P(x)e^{-x^2/2}$, де P – многочлен Ерміта. У просторах S_β^β при $\beta \geq 1/2$ визначена операція множення на многочлен. Отже, $h_k \in S_{1/2}^{1/2}$ для кожного $k \in \mathbb{Z}_+$.

Символом $\left(S_\beta^\beta\right)'$ позначимо сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на S_β^β, зі слабкою збіжністю. Елементи простору $\left(S_\beta^\beta\right)'$, $\beta \geq 1/2$, називатимемо узагальненими функціями. Зазначимо, що S_β^β неперервно вкладається в $\left(S_\beta^\beta\right)'$, тобто кожну функцію $\varphi \in S_\beta^\beta$ можна розуміти як регулярну узагальнену функцію $f_\varphi \in \left(S_\beta^\beta\right)'$:

$$\langle f_\varphi, \psi \rangle = (\varphi, \psi)_{L_2(\mathbb{R})} = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in S_\beta^\beta.$$

Якщо $f \in \left(S_{\beta}^{\beta}\right)'$, то і $f^{(p)} \in \left(S_{\beta}^{\beta}\right)'$ для кожного $p \in \{2, 3, ...\}$, при цьому узагальнена функція $f^{(p)}$ визначається формулою

$$\left\langle f^{(p)}, \psi \right\rangle = (-1)^p \left\langle f, \psi^{(p)} \right\rangle, \quad \forall \psi \in S_{\beta}^{\beta}.$$

Відомо [6], що $S_{\beta/2}^{\beta/2} = H_{\{\beta\}} = \bigcup\limits_{\mu>0} H_{\mu,\beta}$, $\beta \geq 1$, де $H_{\mu,\beta}$ складається з тих функцій $\varphi \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$, для яких при деякому $\mu > 0$

$$\|\varphi\|_{H_{\mu,\beta}}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\mu(2k+1)^{1/\beta}} |c_k(\varphi)|^2 < \infty, \quad c_k(\varphi) = (\varphi, h_k)_{L_2(\mathbb{R})}, \ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Відповідно $\left(S_{\beta/2}^{\beta/2}\right)' = H'_{\{\beta\}} = \bigcap\limits_{\mu>0} H'_{\mu,\beta}$, де $H'_{\mu,\beta}$ складається з тих елементів $f \in \left(S_{\beta/2}^{\beta/2}\right)'$, для яких

$$\|f\|_{H'_{\mu,\beta}}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\mu(2k+1)^{1/\beta}} |c_k(f)|^2 < \infty, \quad c_k(\varphi) = \langle f, h_k \rangle, \ k \in \mathbb{Z}_+,$$

для довільного $\mu > 0$.

Кожна узагальнена функція $f \in \left(S_{\beta}^{\beta}\right)'$, $\beta \geq 1/2$, ототожнюється з її формальним рядом Ерміта $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(f) h_k$, де $c_k(f) = \langle f, h_k \rangle$, $k \in \mathbb{Z}_+$, – коефіцієнти Фур'є–Ерміта. Із загальної теорії невід'ємних самоспряжених операторів у гільбертовому просторі, власні функції якого утворюють ортонормований базис, випливає, що елементи просторів S_{β}^{β}, $\left(S_{\beta}^{\beta}\right)'$, $\beta \geq 1/2$, можна охарактеризувати за допомогою їхніх коефіцієнтів Фур'є–Ерміта так [4]:

1) $\left(f \in S_{\beta}^{\beta}\right) \Leftrightarrow \left(\exists \mu > 0 \ \exists c > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : |c_k(f)| \leq c \exp\left\{-\mu(2k+1)^{\frac{1}{2\beta}}\right\}\right)$, $\beta \geq 1/2$;

2) $\left(f \in \left(S_{\beta}^{\beta}\right)'\right) \Leftrightarrow \left(\forall \mu > 0 \ \exists c = c(\mu) > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : |c_k(f)| \leq c \exp\left\{\mu(2k+1)^{\frac{1}{2\beta}}\right\}\right)$, $\beta \geq 1/2$.

3 Властивості перетворення Абеля–Пуассона формальних рядів Ерміта

Нехай $f \in \left(S_{\beta}^{\beta}\right)'$, $\beta \geq 1/2$. Перетворенням Абеля–Пуассона формального ряду Ерміта узагальненої функції $f \in \left(S_{\beta}^{\beta}\right)'$, $\beta \geq 1/2$, називається ряд

$$f_r(x) := \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k+1} c_k(f) h_k(x), \quad c_k(f) \neq \langle f, h_k \rangle, \ k \in \mathbb{Z}_+, \tag{1}$$

де $0 < r < 1$.

Теорема 1. *Правильними є твердження:*

1) Якщо $f \in \left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$, *то ряд* (1) *при кожному* $r \in (0,1)$ *збігіється рівномірно по* $x (x \in \mathbb{R})$; $f_r \in S_{1/2}^{1/2}$ *при кожному* $r \in (0,1)$.

2) Нехай

$$K_r(x,y) := \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k+1} h_k(x) h_k(y), \quad 0 < r < 1, \ \{x,y\} \subset \mathbb{R}.$$

Тоді

$$K_r(x,y) = \pi^{-1/2}(1-r^4)^{-1/2} r \exp\left\{\frac{4xyr^2 - (1+r^4)(x^2+y^2)}{1-r^4}\right\},$$

причому $K_r(x,\cdot) \in S_{1/2}^{1/2}$ *при кожному фіксованому* $r \in (0,1)$ *та* $x \in \mathbb{R}$.

3) Якщо $f \in \left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$, *то для функції* $f_r(x)$ *правильним є зображення*

$$f_r(x) = \langle f_y, K_r(x,y) \rangle, \quad 0 < r < 1, \ x \in \mathbb{R},$$

при цьому $f_r \to f$ *при* $r \to 1$ *у просторі* $\left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$.

4) Функція $f_r(x)$ *диференційовна по* $r \in (0,1)$, *причому*

$$\frac{\partial}{\partial r} f_r(x) = \left\langle f_y, \frac{\partial}{\partial r} K_r(x,y) \right\rangle.$$

Доведення. 1) Оскільки $f \in \left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$, то

$$\forall \mu > 0 \ \exists c = c(\mu) > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : \ |c_k(f)| \le c e^{\mu(2k+1)}.$$

Тоді

$$|c_k(f_r)| = \left| r^{2k+1} c_k(f) \right| \le c e^{-\ln(1/r)(2k+1)} e^{\mu(2k+1)}.$$

Оскільки $|h_k(x)| \le 1$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$, то, поклавши $\mu = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1}{r}$, прийдемо до оцінки

$$\left| r^{2k+1} c_k(f) h_k(x) \right| \le c e^{-\frac{1}{2} \ln \frac{1}{r} (2k+1)} = c \left(\sqrt{r}\right)^{2k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \ 0 < r < 1, \ x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

з якої і випливає твердження 1).

Доведемо, що $f_r \in S_{1/2}^{1/2}$ при кожному $r \in (0,1)$. Оскільки $S_{1/2}^{1/2} = H_{\{1\}} = \bigcup_{\mu > 0} H_{\mu,1}$, де $H_{\mu,1}$ складається із тих функцій $\varphi \in S_{1/2}^{1/2}$, для яких при деякому $\mu > 0$

$$\|\varphi\|_{H_{\mu,1}}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\mu(2k+1)} |c_k(\varphi)|^2 < \infty, \quad c_k(\varphi) = (\varphi, h_k)_{L_2(\mathbb{R})}, \ k \in \mathbb{Z}_+,$$

то досить довести, що $\varphi \in H_{\mu,1}$ при деякому $\mu > 0$, тобто що

$$\|f_r\|_{H_{\mu,1}}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\mu(2k+1)} |c_k(f_r)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\mu(2k+1)} r^{2(2k+1)} |c_k(f)|^2 |h_k|^2 < \infty.$$

Візьмемо $\mu = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1}{r}$. Звідси та з (2) випливає, що

$$\|f_r\|^2_{H_{\mu,1}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{r}\right)(2k+1)} = c\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sqrt{r}\right)^{2k+1} < \infty,\ 0<r<1.$$

Отже, $f_r \in H_{\mu,1} \subset S_{1/2}^{1/2}$ при кожному $r \in (0,1)$.

Для доведення твердження скористаємося формулою [4]

$$(1-\omega^2)^{-1/2}\exp\left\{\frac{2xy\omega-(x^2+y^2)\omega^2}{1-\omega^2}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k k!}H_k(x)H_k(y),\ |\omega|<1.$$

Покладемо $\omega = r^2$, $0<r<1$. Урахувавши зв'язок між стандартизованими та ортонормованими многочленами H_k, $\hat{H}_k$, а також те, що $h_k(x) = e^{-x^2/2}\hat{H}_k(x)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$, прийдемо до співвідношення

$$\pi^{-1/2}(1-r^4)^{-1/2}r\exp\left\{\frac{2xyr^2-(x^2+y^2)r^4}{1-r^4}-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k+1}h_k(x)h_k(y) = K_r(x,y).$$

Отже,

$$K_r(x,y) = \pi^{-1/2}(1-r^4)^{-1/2}r\exp\left\{\frac{4xyr^2-(1+r^4)(x^2+y^2)}{1-r^4}\right\}.$$

Зауважимо, що $K_r(x,y)$ можна подати у вигляді

$$K_r(x,y) = c_1\exp\left\{-c_2(y-c_3)^2\right\}, \tag{3}$$

де сталі c_1, c_3 залежать від r, x, стала $c_2>0$ залежить від r. Оскільки у просторі $S_{1/2}^{1/2}$ визначені операції розтягу (стискання) та зсуву аргумента, а функція $\exp\{-y^2\}$ є елементом простору $S_{1/2}^{1/2}$, то звідси та з (3) випливає, що $K_r(x,\cdot) \in S_{1/2}^{1/2}$ при кожному $r \in (0,1)$ та $x \in \mathbb{R}$. Аналогічно можна переконатися у тому, що $K_r(\cdot,y) \in S_{1/2}^{1/2}$ при кожному $r \in (0,1)$ та $y \in \mathbb{R}$.

3) Оскільки $f \in \left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$, то, врахувавши властивості лінійності та неперервності функціонала f, одержимо

$$f_r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k+1}c_k(f)h_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k+1}\langle f,h_k\rangle h_k(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} r^{2k+1}\langle f,h_k\rangle h_k(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\langle fy, \sum_{k=0}^{n} r^{2k+1}h_k(y)h_k(x)\right\rangle = \left\langle fy, \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} r^{2k+1}h_k(x)h_k(y)\right\rangle =$$

$$= \left\langle fy, \sum_{k=0}^{n} r^{2k+1}h_k(x)h_k(y)\right\rangle = \langle f_y, K_r(x,y)\rangle.$$

Для обгрунтування проведених тут перетворень ще потрібно довести, що

$$S_{n,r,x}(y) = \sum_{k=0}^{n} r^{2k+1}h_k(x)h_k(y) \to K_r(x,y),\ n\to\infty,$$

у просторі $S_{1/2}^{1/2}$ (при фіксованих $r \in (0,1)$ і $x \in \mathbb{R}$).

Оскільки для кожного $n \in \mathbb{N}$ та фіксованих $r \in (0,1)$, $x \in \mathbb{R}$ $\{S_{n,r,x}(\cdot), K_r(x,\cdot)\} \subset S_{1/2}^{1/2}$, то досить переконатися у тому, що $r_{n,r,x}(\cdot) \to 0$ при $n \to \infty$ у просторі $S_{1/2}^{1/2} = \bigcup\limits_{\mu>0} H_{\mu,1}$, де $r_{n,r,x}(y) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} r^{2k+1} h_k(x) h_k(y)$, тобто, що

$$\|r_{n,r,x}\|_{H_{\mu,1}}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\mu(2k+1)} \left|c_k(r_{n,r,x})\right|^2 \to 0,\ n \to \infty,$$

при деякому $\mu > 0$. Зауважимо, що

$$c_k\left(r_{n,r,x}\right) = \begin{cases} 0,\ 0 \le k \le n, \\ r^{2k+1} c_k(f),\ k > n. \end{cases}$$

Тоді

$$\|r_{n,r,x}\|_{H_{\mu_0,1}}^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{2\mu_0(2k+1)} r^{2(2k+1)} \left|c_k(f)\right|^2.$$

Оскільки $f \in \left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$, то

$$\forall \mu > 0\ \exists c = c(\mu) > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+ :\ |c_k(f)| \le c e^{\mu(2k+1)}.$$

Візьмемо $\mu = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1}{r} > 0$. Тоді

$$r^{2k+1} |c_k(f)| \le c e^{-\ln(1/r)(2k+1)} e^{\mu(2k+1)} = c e^{-\frac{1}{2}\ln(1/r)(2k+1)}.$$

Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{2\mu_0(2k+1)} r^{2(2k+1)} \left|c_k(f)\right|^2$$

збігається, якщо взяти $\mu_0 = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1}{r}$. Тоді

$$\|r_{n,r,x}\|_{H_{\mu_0,1}}^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{2\mu_0(2k+1)} \left|c_k(r_{n,r,x})\right|^2 \to 0,\ n \to \infty,$$

при $\mu_0 = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1}{r}$ як залишок збіжного ряду, що й потрібно було довести.

Залишається довести, що $f_r(x) = \langle f y, K_r(x,y) \rangle \to f$ при $r \to 1$ у просторі $\left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$. Для цього символом S позначимо множину всіх числових послідовностей $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ дійсних чисел з покоординатною збіжністю, які задовольняють умову

$$\forall \mu > 0\ \exists c = c(\mu) > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+ :\ |a_k| \le c e^{\mu(2k+1)}.$$

Побудуємо відображення $F : \left(S_{1/2}^{1/2}\right) \to S$ так: кожному $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(f) h_k \in \left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$ поставимо у відповідність послідовність $\{c_k(f) = \langle f, h_k \rangle, k \in \mathbb{Z}_+\} \in S$. При цьому різним елементам з $\left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$ відповідають різні елементи з S. Справді, якщо $\langle f_1, f_2\rangle \subset \left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$, $f_1 \neq f_2$, то існує $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, $c_{k_0}(f_1) \neq c_{k_0}(f_2)$, бо у протилежному випадку

$$c_k(f_1) = c_k(f_2), \ \forall k \in \mathbb{Z}_+,$$

тобто $\langle f_1 - f_2, h_k\rangle = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$. Нехай

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varphi) h_k, \quad c_k(\varphi) = (\varphi, h_k)_{L_2(\mathbb{R})}, \ k \in \mathbb{Z}_+,$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k(\varphi) h_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Внаслідок лінійності функціонала $f_1 - f_2$

$$\langle f_1 - f_2, S_n\rangle = \left\langle f_1 - f_2, \sum_{k=0}^{n} c_k(\varphi) h_k \right\rangle = \sum_{k=0}^{n} c_k(\varphi) \langle f_1 - f_2, h_k\rangle = 0.$$

Врахувавши властивість неперервності функціонала f, а також те, що $S_n \to \varphi$ при $n \to \infty$ у просторі $S_{1/2}^{1/2}$, одержимо

$$\langle f_1 - f_2, \varphi\rangle = \left\langle f_1 - f_2, \lim_{n\to\infty} S_n \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_1 - f_2, S_n\rangle = 0.$$

Отже, відображення

$$F : \left(S_{1/2}^{1/2}\right)' \ni f \longrightarrow \{c_k(f) = \langle f, h_k\rangle, k \in \mathbb{Z}_+\} \in S$$

є ін'єкцією. Більше того, F – бієкція.

Дійсно, нехай $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\} \in S$. Визначимо функціонал f так: $\langle f, h_k\rangle = a_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Для довільної функції $\varphi = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(\varphi) h_k \in S_{1/2}^{1/2}$ покладемо, за означенням,

$$\langle f, \varphi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_k(\varphi).$$

Функціонал f визначений коректно, оскільки ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k c_k(\varphi)$ збіжний. Справді, оскільки $\varphi \in S_{1/2}^{1/2}$, то

$$\forall \mu > 0 \ \exists c > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : \ |c_k(\varphi)| \leq c e^{-\mu(2k+1)},$$

і, за умовою,

$$\forall \mu_1 > 0 \ \exists c_1 = c_1(\mu_1) > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : \ |a_k| \leq c_1 e^{\mu_1(2k+1)}. \tag{4}$$

Взявши $\mu_1 = \mu/2$, одержимо збіжність ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k c_k(\varphi)$. Очевидно, що побудований функціонал f – лінійний. Встановимо його неперервність. Нехай $\{\varphi_n, n \geq 1\} \subset S_{1/2}^{1/2}$ і

$\varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$ у просторі $S_{1/2}^{1/2} = H_{\{1\}} = \bigcup\limits_{\mu>0} H_{\mu,1}$. Це означає, що при деякому $\mu_0 > 0$

$$\|\varphi_n\|^2_{H_{\mu_0,1}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\mu_0(2k+1)} \left|c_k(\varphi_n)\right|^2 \to 0, \ n \to \infty,$$

тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\mu_0(2k+1)} \left|c_k(\varphi_n)\right|^2 < \varepsilon.$$

Звідси випливає, що

$$e^{\mu_0(2k+1)} \left|c_k(\varphi_n)\right| < \sqrt{\varepsilon}, \ \forall k \in \mathbb{Z}_+, n \geq n_0,$$

або

$$\left|c_k(\varphi_n)\right| < \sqrt{\varepsilon} e^{-\mu_0(2k+1)}, \ k \in \mathbb{Z}_+, n \geq n_0.$$

Поклавши в (4) $\mu_1 = \mu_0/2$, прийдемо до нерівності

$$|\langle f, \varphi_n \rangle| \leq c_1 \sqrt{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\mu_0}{2}(2k+1)} \leq c_2 \sqrt{\varepsilon}, \ \forall n \geq n_0.$$

Звідси випливає, що $\langle f, \varphi_n \rangle \to 0$, $n \to \infty$, тобто f – неперервний функціонал, заданий на $S_{1/2}^{1/2}$. Отже, $f \in \left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$. Таким чином, доведено, що відображення $F : \left(S_{1/2}^{1/2}\right)' \to S$ є ізоморфізмом.

Оскільки $f_r \in S_{1/2}^{1/2} \subset \left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$, то

$$F[f_r] = \left\{r^{2k+1} c_k(\varphi), k \in \mathbb{Z}_+\right\} \in S.$$

Крім того,

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ : r^{2k+1} c_k(f) \longrightarrow c_k(f), \ r \to 1,$$

тобто $F[f_r] \to F[f]$ при $r \to 1$ у просторі S. Тоді

$$H_r = F^{-1}\left[F[f_r]\right] \to F^{-1}\left[F[f]\right] = f$$

у просторі $\left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$. Твердження доведено.

4) Функція $f_r(x)$ диференційовна по r на проміжку $(0,1)$ при фіксованому x. Справді, нехай $r \in [\varepsilon, 1-\varepsilon] \subset (0,1)$, де $\varepsilon > 0$ – достатньо мале. Доведемо, що ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) r^{2k} c_k(f) h_k(x) := \gamma(r,x) \tag{5}$$

збігається рівномірно по $r \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ при фіксованому x, бо тоді $\dfrac{\partial f_r(x)}{\partial r} \gamma(r,x)$. Оскільки $|h_k(x)| \leq 1, \forall k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}$, $(2k+1) \leq \dfrac{1}{\alpha} e^{\alpha(2k+1)}$ для довільного $\alpha > 0$, то для $r \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ маємо

$$\left|(2k+1) r^{2k} c_k(f) h_k(x)\right| = \frac{1}{r}(2k+1) r^{2k+1} |c_k(f)| h_k(x) \leq \frac{1}{\alpha\varepsilon} e^{\alpha(2k+1) - \ln\frac{1}{1-\varepsilon}(2k+1)} |c_k(f)|.$$

Оскільки $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(f) h_k \in \left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$, то

$$\forall \mu > 0 \ \exists c = c(\mu) > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : \ |c_k(f)| \le c_\mu e^{\mu(2k+1)}.$$

Тоді

$$\beta_k := \left|(2k+1) r^{2k} c_k(f) h_k(x)\right| \le \frac{c_\mu}{\alpha\varepsilon} e^{\left(\alpha+\mu-\ln\frac{1}{1-\varepsilon}\right)(2k+1)}.$$

Оскільки $\alpha, \mu > 0$ – довільні, то візьмемо їх так, щоб $\alpha + \mu = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1}{1-\varepsilon}$. Тоді

$$\beta_k \le \frac{c_\mu}{\alpha\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-\varepsilon}(2k+1)} = \tilde{c}\left(\sqrt{1-\varepsilon}\right)^{2k+1}, \ 0 < \varepsilon < 1.$$

З останньої нерівності випливає, що ряд (5) збігається рівномірно по $r \in [\varepsilon, 1-\varepsilon] \subset (0,1)$. Оскільки $\varepsilon > 0$ – довільні, то функція $f_r(x)$ диференційовна по r на проміжку $(0,1)$, причому правильним є співвідношення $\dfrac{\partial f_r(x)}{\partial r} = \gamma(r,x)$. З іншого боку, урахувавши властивість лінійності та неперервності функціонала f, одержимо

$$\frac{\partial f_r}{\partial r} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{1}{\Delta r}\left[f_{r+\Delta r} - f_r\right] = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{1}{\Delta r} \langle fy, K_{r+\Delta r} - K_r \rangle =$$

$$= \lim_{\Delta r \to 0} \left\langle fy, \frac{1}{\Delta r}\left[K_{r+\Delta r} - K_r\right] \right\rangle = \left\langle f, \lim_{\Delta r \to 0} \frac{1}{\Delta r}\left[K_{r+\Delta r} - K_r\right] \right\rangle. \qquad (6)$$

Із вигляду функції $K_r(x,y)$ випливає її диференційовність по r на проміжку $(0,1)$, причому $\dfrac{\partial K_r}{\partial r}$ можна подати у вигляді ряду

$$\frac{\partial K_r(x,y)}{\partial r} = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) r^{2k} h_k(x) h_k(y).$$

Для обґрунтування проведених у (6) перетворень досить довести, що

$$\Phi_{\Delta r} = \frac{1}{\Delta r}\left[K_{r+\Delta r} - K_r\right] - \frac{\partial}{\partial r} K_r \to 0, \ \Delta r \to 0,$$

у просторі $S_{1/2}^{1/2} = H_{\{1\}} = \bigcup\limits_{\mu > 0} H_{\mu,1}$.

Отже,

$$\Phi_{\Delta r} = \frac{1}{\Delta r} \sum_{k=0}^{\infty}\left[(r+\Delta r)^{2k+1} - r^{2k+1}\right] h_k(x) h_k(y) - \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1) r^{2k} h_k(x) h_k(y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left[(2k+1)(r+\theta\Delta r)^{2k} - (2k+1) r^{2k}\right] h_k(x) h_k(y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 2k(2k+1)(r+\theta_1\Delta r)^{2k-1} h_k(x) h_k(y) \theta_1 \Delta r, \ 0 < \theta, \theta_1 < 1$$

(тут ми скористалися теоремою Лагранжа про скінченні простори).

Отже, потрібно довести, що при деякому $\mu > 0$

$$\|\Phi_{\Delta r}\|^2_{H_{\mu,1}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\mu(2k+1)} \left|c_k\left(\Phi_{\Delta r}\right)\right|^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\mu(2k+1)} 4k(2k+1)^2 (r+\theta_1\Delta r)^{2(2k-1)} h_k^2 \theta_1^2 (\Delta r)^2 \to 0,\ \Delta r \to 0.$$

Введемо позначення

$$a_{k,\mu} := e^{\mu(2k+1)}(2k)(2k+1)(r+\theta_1\Delta r)^{2k-1}\theta_1 h_k$$

і доведемо, що $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a^2_{k,\mu} < \infty$ при деякому $\mu > 0$ (тоді $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a^2_{k,\mu}(\Delta r)^2 \to 0$ при $\Delta r \to 0$). Оскільки $\Delta r \to 0$, то вважаємо $|r+\theta_1\Delta r| \le r_1 < 1$.

Зауважимо також, що $\forall \alpha > 0$: $(2k+1) \le \dfrac{1}{\alpha} e^{\alpha(2k+1)}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Тоді

$$r_1^2 |a_{k,\mu}| \le \frac{1}{\alpha^2} e^{\mu(2k+1)} e^{2\alpha(2k+1)} e^{-\ln\frac{1}{r_1}(2k+1)}.$$

Взявши $\alpha = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1}{r_1}$, $\mu = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1}{r_1} \equiv \mu_0$, прийдемо до оцінки

$$\|a_{k,\mu}\| \le \frac{1}{r_1^2} \frac{16}{\left(\ln\frac{1}{r_1}\right)^2} e^{-\frac{1}{4}\ln\frac{1}{r_1}} = \bar{c}\left(\sqrt[4]{r_1}\right)^{2k+1},\ 0 < r_1 < 1.$$

Звідси випливає збіжність ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{k,\mu}$ при $\mu = \mu_0$. Отже,

$$\|\Phi_{\Delta r}\|^2_{H_{\mu_0,1}} = \sum_{k=0}^{\infty} a^2_{k,\mu_0} (\Delta r)^2 \to 0,\ \Delta r \to 0.$$

Цим доведено, що функція $f_r(x)$ диференційовна по r на проміжку $(0,1)$ (при фіксованому $x \in \mathbb{R}$) і

$$\frac{\partial f_r(x)}{\partial r} = \left\langle fy, \frac{\partial}{\partial r} K_r(x,y) \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) r^{2k} c_k(f) h_k(x).$$

Теорема доведена. □

Деякі застосування. Розглянемо рівняння з частинними похідними вигляду

$$r\frac{\partial u(r,x)}{\partial r} + \frac{\partial^2 u(r,x)}{\partial x^2} = x^2 u(r,x), \quad (r,x) \in (0,1)\times\mathbb{R} \equiv \Omega. \tag{7}$$

Зауважимо, що це рівняння можна записати у вигляді

$$r\frac{\partial u(r,x)}{\partial r} = Au(r,x), \quad (r,x) \in \Omega,$$

де $A = -d^2/dx^2 + x^2$ – гармонійний осцилятор у гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$. При $r = 0$ (7) вироджується у рівняння $\psi''(x) = x^2\psi(x)$, яке має єдиний розв'язок $\psi(x) = 0$. Під розв'язком (7) розуміємо функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, яка задовольняє умови: 1) $u(r,x)$ диференційовна по r при кожному $x \in \mathbb{R}$; 2) $u(r,x)$ – двічі диференційовна по x при фіксованому $r \in (0,1)$, $u(r,\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$; 3) $u(r,x)$ задовольняє рівняння (7). Поставимо задачу знайти розв'язок рівняння (7), який задовольняє у просторі $\left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$ граничну умову:

$$u(r,\cdot) \to f, \quad r \to 1, \tag{8}$$

де $f \in \left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$ – задана узагальнена функція.

Теорема 2. *Задача* (7), (8) *є розв'язною, розв'язок дається формулою*

$$u(r,x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k+1} c_k(f) h_k(x) = \langle fy, K_r(x,y)\rangle\,,$$

$$c_k(f) = \langle f, h_k\rangle\,,\ k \in \mathbb{Z}_+,$$

при цьому $u(r,\cdot) \in S_{1/2}^{1/2}$ *при кожному* $r \in (0,1)$.

Доведення. Із твердження 1 теореми 1 випливає, що

$$r\frac{\partial u(r,x)}{\partial r} = r\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)r^{2k}h_k(x) = \left\langle fy, \frac{\partial}{\partial r}K_r(x,y)\right\rangle.$$

Внаслідок основної спектральної теореми для самоспряжених операторів

$$A\varphi = \int_0^{\infty} \lambda dE_\lambda \varphi, \quad \varphi \in D(A),$$

де A – гармонійний осцилятор – невід'ємний самоспряжений оператор у $L_2(\mathbb{R})$, E_λ, $\lambda \in [0,\infty)$ – його спектральна функція,

$$D(A) = \left\{\varphi \in L_2(\mathbb{R}) : \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^2|c_k(\varphi)|^2 < \infty, c_k(\varphi) = (\varphi, h_k)_{L_2(\mathbb{R})}\right\}.$$

Оскільки оператор A має дискретний спектр $\sigma A = \{\lambda_k : \lambda_k = 2k+1, k \in \mathbb{Z}_+\}$, то його спектральна функція E_λ є кусково-сталою і має розриви у точках λ_k, причому $E_{\lambda_k+0} - E_\lambda$ – оператор проектування на власний підпростір оператора A, який відповідає власному значенню λ_k. Цей підпростір є одновимірним, відповідна функція Ерміта h_k утворює його базис. Отже,

$$\left(E_{\lambda_k+0} - E_\lambda\right)\varphi = (\varphi, h_k)_{L_2(\mathbb{R})}\, h_k = c_k(\varphi)h_k,$$

а спектральна функція у цьому випадку має вигляд

$$E_\lambda\varphi(x) = \sum_{\lambda_k<\lambda} c_k(\varphi)h_k(x),$$

а інтеграл $\int\limits_0^\lambda \lambda dE_\lambda\varphi$ є таким

$$A\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left(E_{\lambda_k+0} - E_{\lambda_k}\right)\varphi = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)c_k(\varphi)h_k(x).$$

Якщо $\varphi(x) := u(r,x)$ (при фіксованому $r \in (0,1)$), то

$$Au(r,x) = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)c_k(u(r,x))h_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)r^{2k+1}c_k(f)h_k(x) = \langle fy, K_r(x,y)\rangle$$

(зауважимо, що з теореми 1 випливає, що $u(r,\cdot) \in S_{1/2}^{1/2} \subset D(A)$ при кожному $r \in (0,1)$). Звідси дістаємо, що $u(r,x)$ задовольняє рівняння (7). Оскільки $u(r,x)$ збігається з перетворенням Абеля–Пуассона граничної функції f, то

$$u(r,x) = \langle fy, K_r(x,y)\rangle \longrightarrow f$$

при $r \to 1$ у просторі $\left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$ (див. твердження 4 з теореми 1).

Теорема доведена. $\square$

Зауважимо, що розв'язок задачі (7), (8) неперервно залежить від граничної функції f у такому розумінні. Якщо $f,\ f_n \in \left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$, $n \in \mathbb{N}$, $u,\ u_n$, $n \in \mathbb{N}$ – розв'язки задачі (7), (8), які відповідають $f,\ f_n$ і $f_n \to f$ при $n \to \infty$ у просторі $\left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$, то $u_n \to u$ при $n \to \infty$ у просторі $\left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$. Справді, якщо $f_n \to f$ при $n \to \infty$ у $\left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$, то

$$c_k(f) = \langle f_n, h_k\rangle \longrightarrow \langle f, h_k\rangle\,,\ n \to \infty,$$

для кожного $k \in \mathbb{Z}_+$. Тоді

$$F[u_n] = c_k(u_n) = r^{2k+1}c_k(f_n) \longrightarrow r^{2k+1}c_k(f) = F[f],\ n \to \infty,$$

у просторі S. Звідси одержуємо, що

$$u_n = F^{-1}\left[F[u_n]\right] \to F^{-1}\left[F[f]\right] = f,\ n \to \infty,$$

у просторі $\left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$ (тут $F : \left(S_{1/2}^{1/2}\right)' \to S$ – ізоморфізм, побудований при доведенні теореми 1).

Якщо $f = \delta \in \left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$ (δ – дельта-функція Дірака), то розв'язком задачі (7), (8) є функція

$$u(r,x) = \langle \delta_y, K_r(x,y)\rangle = K_r(x,0) = \pi^{-1/2}(1-r^4)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1+r^4}{1-r^4}x^2\right\}\cdot r,$$

$$r \in (0,1),\ x \in \mathbb{R}.$$

Список літератури

[1] Komatsu H. *Hyperfunktions.* Lect. Notes in Math. 1973, **287**. 164.

[2] Sato M. *Theory of hyperfunktions. I.* J. Fact. Univ., Sect. I, 1959. 133–193.

[3] Городецький В.В. Проблема локалізації Рімана : деякі аспекти та застосування. Чернівці : Рута, 1998. 256. (in Ukrainian)

[4] Городецький В.В. Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. Чернівці : Рута, 1998. 219. (in Ukrainian)

[5] Городецький В.В. Еволюційні рівняння в зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. Чернівці : Рута, 2008. 400. (in Ukrainian)

[6] Городецький В.В., Мартинюк О.В. Параболічні псевдодиференціальні рівняння з аналітичними символами у просторах типу S : Монографія. Чернівці : Технодрук, 2019. 280. (in Ukrainian)

Список літератури

[1] Komatsu H. *Hyperfunktions.* Lect. Notes in Math. 1973, **287**. 164.

[2] Sato M. *Theory of hyperfunktions. I.* J. Fact. Univ., Sect. I, 1959. 133–193.

[3] Gorodetskyi V.V. The problem of Riemann localization: aspects and application. Chernivtsi : Ruta, 1998. 256. (in Ukrainian)

[4] Gorodetskyi V.V. The sets of initial values for smooth solutions of differential-operator equations of parabolic type. Chernivtsi: Ruta, 1998. 219. (in Ukrainian)

[5] Gorodetskyi V.V. Evolution equations in countably normed spaces of infinitely differentiable functions.. Chernivtsi: Ruta, 2008. 400. (in Ukrainian)

[6] Gorodetskyi V.V., Martynyuk O.V. Parabolic pseudo-differential equations with analytic symbols in S-type spaces : Monograph. Chernivtsi : Tekhodruk, 2019. 280. (in Ukrainian)

Надійшло 21.09.2023

Gorodetskyi V., Martynyuk O., Martynyuk S., Kolisnyk R. *Properties of the Abel–Poisson transformation of formal Hermite series*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 1 (2023), 80–93.

In the paper we investigate the properties of the Abel-Poisson transformation of the Hermite formal series (differentiability property, boundary properties). Such series are identified with linear continuous functionals defined on the space $S_{1/2}^{1/2}$, which belongs to spaces of type S. The space $S_{1/2}^{1/2}$ coincides with the class of analytic vectors of the harmonic oscillator − the operator $d^2/dx^2 + x^2$, which is integral and self-adjoint in the Hilbert space $L_2(\mathbb{R})$. An explicit form of the function, which is the core of the Abel–Poisson transformation, was found, and the properties of this function were investigated. The application of such transformation is given when studying the well-posedness of the Cauchy problem for a degenerate partial differential equation.