Шавала О.В.

ПРО ПОБУДОВУ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПО ЗАДАНИХ ПОСЛІДОВНОСТЯХ НУЛІВ І КРИТИЧНИХ ТОЧОК

Для заданих послідовностей розглядаються властивості розв'язків рівнянь $f^{(n)}+Af^m=0, \quad n,m\in\mathbb{N}$ та $f''+Af=0$.

Ключові слова і фрази: лінійні диференціальні рівняння другого порядку, нелінійні диференціальні рівняння, нулі розв'язків, цілі розв'язки, критичні точки, інтерполяційна задача.

Ukraine
e-mail: *olena.shvl@gmail.com*

Досліджуються розв'язки диференціальних рівнянь

$$f^{(n)}+Af^m=0, \quad n,m\in\mathbb{N}, \tag{1}$$

та

$$f''+Af=0, \tag{2}$$

де A – мероморфна функція.

Нехай Λ – послідовність різних комплексних чисел λ_k з їх кратностями $p_k\in\mathbb{N}$, яка не має точок скупчення в $\mathbb{C}$, M – послідовність комплексних чисел μ_k з їхніми кратностями $q_k\in\mathbb{N}$, яка не має точок скупчення в $\mathbb{C}$. Зокрема будемо розглядати випадок Λ_1 коли $p_k=1$ і M_1, коли $q_k=1$.

У роботі [1] розглянуто наступний результат

Теорема A([1, с.242]). *Для довільних послідовностей Λ_1 та M_1 таких, що $\lambda_n\neq\mu_k$, $n,k\in\mathbb{N}$ існує ціла функція A така, що рівняння (2) має цілий розв'язок f з нулями в точках λ_k, похідна якого f' має нулі в точках μ_k.*

Деякі результати для рівняння (2) можна знайти у працях [2], [3]. Рівняння (1) також присвячено праці [4], [5], подібні до нього диференціальні рівняння розглядалось в [6, с.104], [7], [8].

Нашою метою є доведення

УДК 517.53, 517.925.7
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34M03, 34M05, 34M99.

Теорема 1 ([9]). *Для довільних послідовностей* Λ_1 *та* М *комплексних чисел* $\lambda_l \neq \mu_k$, $l, k \in \mathbb{N}$ *існує мероморфна функція* A *з полюсами другого порядку в точках* λ_k *така, що рівняння* (2) *має розв'язок* f *такий, що* $f^{1/\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0; -1\}$ *є мероморфною функцією без нулів з полюсами в точках* λ_k, *похідна якого* f' *має нулі в точках* μ_k *кратності* q_k.

Для доведення теореми 1 нам знадобиться

Лема ([10, с.300-301]). *Для будь-якої послідовності* Λ_1 *і для будь-якої послідовності* $\{a_k\}$ *комплексних чисел існує ціла функція* h *така, що*

$$h(\lambda_k) = a_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Доведення теореми 1. Скористаємось деякими ідеями з праці [3]. Візьмемо цілу функцію Q з нулями в точках λ_k. За теоремою [10, с.296] така функція існує. Нехай $f = (1/Q)^\alpha e^g = Pe^g$, де g – ціла функція, яку знайдемо пізніше. Тоді $f' = P'e^g + Pg'e^g$,

$$f'/f = P'/P + g'.$$

Функція f'/f має прості полюси в точках λ_k і нулі в точках μ_k кратності q_k. Позначимо

$$P' + Pg' = P_1 e^h, \tag{3}$$

де h – ціла функція, яку знайдемо пізніше. Тоді $P_1 = \tilde{Q}^{-\alpha-1}P_2$, де функція $\tilde{Q}$ має нулі в точках Λ_1 а P_2 має нулі в точках М. За теоремою [10, с.296] така функція P_1 існує. З формули (3) маємо

$$g' = (P_1 e^h - P')/P. \tag{4}$$

Функція g' може мати прості полюси в точках λ_k. Щоб цього не було потрібно щоб

$$h(\lambda_k) = \log\left(\frac{P'}{P_1}\right)\bigg|_{z=\lambda_k}$$

де $\log v = \log|v| + i\theta$, $\theta = \arg v \in [-\pi; \pi)$. З леми випливає, що така функція h існує. Тоді з (4) знаходимо g',

$$g(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{P_1 e^h - P'}{P} dz + g(z_0)$$

і з формули $f = Pe^g$ знаходимо розв'язок рівняння (2). Отже з рівності $A = -f''/f$ одержуємо, що A – мероморфна функція з полюсами другого порядку в точках λ_k.

Аналогічно можна одержати наступний результат

Теорема 2 ([5]). *Для довільних послідовностей* Λ *та* М *комплексних чисел* $\lambda_l \neq \mu_k$, $l, k \in \mathbb{N}$ *існує мероморфна функція* A *така, що рівняння* (1) *має цілий розв'язок* f *з нулями в точках* λ_k *кратності* p_k, *похідна якого* f' *має нулі в точках* μ_k *кратності* q_k.

Зазначимо коротко деякі етапи доведення. А саме будемо вважати що шуканий розв'язок має вигляд $f = Pe^g$, де P ціла функція з нулями в точках λ_k кратності

p_k. У формулі (3) функція P_1 має нулі в точках λ_k кратності $p_k - 1$ і нулі в точках μ_k кратності q_k.

Зауваження. Для рівняння (2) аналог теореми 2 розглядався в праці [3].

Приклад 1. *Нехай* $f(z) = \sin^{-\alpha} z$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0; -1\}$. *Тоді* $f'(z) = -\alpha \sin^{-\alpha-1} z \cos z$ *і* f *є розв'язком рівняння* (2) , *де* $A(z) = -\alpha(\alpha+1)ctg^2 z - \alpha$.

Приклад 2. *Нехай* $f(z) = \sin^2 z$. *Тоді* $f'(z) = \sin 2z$ *і* f *є розв'язком рівняння* $f''' + Af^2 = 0$, *де* $A(z) = 8\cos z / \sin^3 z$.

Список літератури

[1] Sheda V. *On some properties of solutions of the differential equation* $y'' = Q(z)y$, *where* $Q(z) \not\equiv 0$ *is an entire function.* Acta F.R.N. Univ. Comen. Mathem. 1959, **4**, 223–253. (in Slovak)

[2] Heittokangas J. *A survey on Blaschke-oscillatory differential equations, with updates* Blaschke products and their applications, Editors: J. Mashreghi, E. Fricain, Springer US, 2013, 43–98.

[3] Shavala O.V. *On the construction of solutions of linear differential equations according to given sequences.* Ukr. Mat. Zh. 2017, **69** (10), 1437–1440. (in Ukrainian)

[4] Lukivska D.V., Shavala O.V. *On meromorphic solutions of differential equations with given poles.* Bukovinian Mathematical Journal 2015, **3** (2), 57–59. (in Ukrainian)

[5] Shavala O.V. On sequences of zeros and critical points of entire solutions of the equation $f^{(n)} + Af^m = 0$, All-Ukrainian Scientific Conference "Modern problems of theory of probability and mathematical analysis", Ivano-Frankivsk, Ukraine, 27.02-2.03 2018, 91–92. (in Ukrainian)

[6] Peláez J., Rättyä J. *Weighted Bergman Spaces Induced by Rapidly Increasing Weights.* Memoirs of the American Mathematical Society 2014, **227**, (1066). DOI: http://dx.doi.org/10.1090/memo/1066

[7] Hao Lia, Songxiao Li *Nonlinear differential equation and analytic function spaces* aviable at: https://arxiv.org/pdf/1510.02652.pdf

[8] Li-peng Xiao *Complex differential equations with solutions in the Hardy spaces.* Taiwanese Journal of Mathematics 2014 **18** (3), pp. 909–923. DOI: 10.11650/tjm.18.2014.3705

[9] Shavala O. On the construction of solutions of the equation $f'' + Af = 0$ according to given sequences, XI international Skorobohatko mathematical conference, Lviv, Ukraine, 26-30.10.2020, 105.

[10] Saks S., Zygmund A. Analytic functions. Nakladem Polskiego towarzystwa matematycznego, Warszawa-Wroclaw, 1952.

Надійшло 23.05.2013

Shavala O.V. *On the construction of solutions of differential equations according to given sequences of zeros and critical points*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 1 (2023), 134–137.

A part of the theory of differential equations in the complex plane $\mathbb{C}$ is the study of their solutions. To obtain them sometimes researchers can use local expand of solution in the integer degrees of an independent variable. In more difficult cases received local expand in fractional degrees of an independent variable, on so-called Newton - Poiseux series. A row of mathematicians for integration of linear differential equations applied a method of so-called generalized degree series, where meets irrational, in general real degree of an independent variable.

One of the directions of the theory of differential equations in the complex plane $\mathbb{C}$ is the construction a function f according given sequence of zeros or poles, zeros of the derivative f' and then find a differential equation for which this function be solution.

Some authors studied sequences of zeros of solutions of the linear differential equation

$$f'' + Af = 0,$$

where A is entire or analytic function in a disk $\{\mathrm{z} : |\mathrm{z}| < 1\}$.

In addition to the case when the above-mentioned differential equation has the non-trivial solution with given zero-sequences it is possible for consideration the case, when this equation has a solution with a given sequence of zeros (poles) and critical points.

In this article we consider the question when the above-mentioned differential equation has the non-trivial solution f such that $f^{1/\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0; -1\}$ is meromorphic function without zeros with poles in given sequence and the derivative of solution f' has zeros in other given sequence, where A is meromorphic function.

Let's note, that representation of function by Weierstrass canonical product is the basic element for researches in the theory of the entire functions.

Further we consider the question about construction of entire solution f of the differential equation

$$f^{(n)} + Af^m = 0, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

where A is meromorphic function such that f has zeros in given sequence and the derivative of solution f' has zeros in other given sequence.