Пукальський І.Д., Лусте І.П.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ $2B$-ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ІНТЕГРАЛЬНОЮ НЕЛОКАЛЬНОЮ УМОВОЮ

Досліджується задача вибору оптимального керування системи, що описується параболічною задачею з інтегральною умовою за часом і обмеженими внутрішнім і стартовим керуванням. Критерій якості задається сумою об'ємних інтегралів. За допомогою фундаментального розв'язку задачі Коші для $2b$-параболічного рівняння встановлено існування, єдиність та інтегральне зображення розв'язків задачі для $2b$-параболічного рівняння з інтегральною умовою за часовою змінною. Знайдено оцінки розв'язку нелокальної задачі для $2b$-параболічного рівняння з інтегральною умовою за часом та його похідних в гельдерових просторах. Одержаний результат використано при дослідженні задачі оптимального керування. За допомогою формули Тейлора та інтегрального зображення розв'язків нелокальної задачі знайдено необхідні і достатні умови існування оптимального керування системи, що описується задачею для $2b$-параболічного рівняння з інтегральною умовою за часовою змінною.

Ключові слова і фрази: нелокальна умова, фундаментальний розв'язок, резольвента, оптимальне керування, функціонал.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *i.pukalsky@chnu.edu.ua (Пукальський І.Д.), i.luste@chnu.edu.ua (Лусте І.П.)*

Вступ

Теорія оптимального керування системами, що описуються рівняннями з частинними похідними, багата результатами і активно розвивається в наш час. Її основи вперше систематично описано в монографії [1]. Важливі результати цієї теорії у випадку еволюційних рівнянь, що задані на обмеженому часовому проміжку отримані, зокрема, в працях [2], [3], [4], [5], [6]. В роботі [4] стан керованої системи описується задачею Діріхле для лінійних параболічних рівнянь зі стартовим оптимальним керуванням. Зокрема, у роботі [6] керування знаходиться у коефіцієнтах молодших членів рівняння. Робота [7] присвячена вивченню задачі оптимального керування системами, стан яких описується рівнянням теплопровідності з динамічною крайовою умовою.

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35k35, 35k20.
Information on some grant ...

Задачам вибору оптимального керування системами, що описуються параболічними крайовими задачами з обмеженим внутрішнім керуванням присвячено праці [8], [9], [10], [11], [12]. Функціонали якості визначаються об'ємними інтегралами.

У цій статті розглядається задача вибору оптимального керування системи, що описується параболічною задачею з інтегральною умовою за часом і обмеженими внутрішнім і стартовим керуванням. За допомогою фундаментального розв'язку задачі Коші для $2b$-параболічного рівняння доведено існування єдиного розв'язку параболічної задачі з інтегральною умовою за часовою змінною. Одержані результати використані для встановлення необхідних і достатніх умов існування оптимального розв'язку системи, що описується параболічною задачею з інтегральною умовою і обмеженими внутрішнім та стартовим керуванням. Критерій якості задається сумою об'ємних інтегралів.

1 Постановка задачі та основний результат

Нехай T_1, T_2, T – фіксовані додатні числа, $T_j \le T$, $j \in \{1,2\}$. Розглянемо в області $\Pi = [0,T) \times R^n$ задачу знаходження функцій (u,q), $q = (q_1,q_2)$, на яких функціонал

$$I(q) = \int_0^T dt \int_{R^n} F_1(t,x;u(t,x;q_1(x),q_2(x)),q_1(x))dx+$$

$$+\int_0^{T_2} dt \int_{R^n} F_2(t,x;u(t,x;q_1(x),q_2(x)),q_2(x))dx \tag{1}$$

досягає мінімуму в класі функцій $q \in V = \{q | q_1 \in C^{\alpha}(R^n),\ q_2 \in C^{2b+\alpha}(R^n),\ \nu_{11}(x) \le q_1 \le \nu_{12}(x),\ \nu_{21}(x) \le q_2 \le \nu_{22}(x)\}$, із яких $u(t,x;q_1(x),q_2(x))$ задовольняє при $(t,x) \in \Pi$ рівняння

$$(Lu)(t,x) \equiv \left(\partial_t - \sum_{|k|\le 2b} A_k(t,x)\partial_x^k\right) u = f(t,x;q_1(x)) \tag{2}$$

та інтегральну умову за часовою змінною

$$u(0,x;q_1(x),q_2(x)) + \int_0^{T_1} a(\tau,x)u(\tau,x;q_1(x),q_2(x))d\tau = \varphi(x;q_2(x)), \tag{3}$$

$$|k| = k_1 + \ldots + k_n, \quad \partial_x^k = \partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\cdots\partial_{x_n}^{k_n}.$$

Будемо вважати виконаними такі умови:

а) рівняння (2) параболічне [13] і $A_k(t,x) \in C^{\alpha}(\Pi)$, $a(t,x) \in C^{2b+\alpha}(\Pi)$;

б) функції $\varphi(x;q_2(x)) \in C^{2b+\alpha}(R^n)$, $f(t,x;q_1(x)) \in C^{\alpha}(\Pi)$;

в) $f(t,x;q_1(x)) = r(t)f_0(x;q_1(x))$, $F_1(t,x;u(t,x;q),q_1(x))$, $\varphi(x;q_2(x))$, $F_2(t,x;u(t,x;q),q_2(x))$ мають похідні другого порядку за змінними $(u;q_1,q_2)$, які належать, як функції змінних (t,x), x відповідно просторам $C^{\alpha}(\Pi)$, $C^{2b+\alpha}(R^n)$, $\nu_{1j} \in C^{\alpha}(\Pi)$, $\nu_{2j} \in C^{2b+\alpha}(R^n)$, $j \in \{1,2\}$.

За умов, накладених на коефіцієнти рівняння (2), існує фундаментальний розв'язок $Z(t,x,\tau,\xi)$ задачі Коші ([14], теорема 1.1)

$$(Lv)(t,x) = f(t,x;q_1(x)),\ v(0,x) = \varphi(x;q_2(x)), \tag{4}$$

за допомогою якого розв'язок задачі (4) визначається формулою

$$v(t,x;q) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^n} Z(t,x,\tau,\xi) f(\tau,\xi;q_1(\xi))d\xi + \int\limits_{R^n} Z(t,x,0,\xi)\varphi(\xi,q_2(\xi))d\xi. \tag{5}$$

При виконані умов а), б) згідно з теоремою 2.1 [14] існує єдиний розв'язок задачі (4) в просторі $C^{2b+\alpha}(\Pi)$ при довільних $q \in V$ і для нього правильна оцінка

$$\|v\|_{C^{2b+\alpha}(\Pi)} \le c\left(\|f\|_{C^{\alpha}(\Pi)} + \|\varphi\|_{C^{2b+\alpha}(R^n)}\right). \tag{6}$$

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконані умови а), б),* $\int\limits_0^T |a(\tau,x)| \left(\int\limits_{R^n} |Z(t,x,\tau,\xi)|d\xi\right) d\tau \le b < 1.$ *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (2), (3) *в просторі* $C^{2b+\alpha}(\Pi)$ *і для нього правильна оцінка*

$$\|u\|_{C^{2b+\alpha}(\Pi)} \le c\left(\|f\|_{C^{\alpha}(\Pi)} + \|\varphi\|_{C^{2b+\alpha}(R^n)}\right). \tag{7}$$

Доведення. Розв'язок задачі (2), (3) шукаємо у вигляді

$$u(t,x;q) = \int\limits_{R^n} Z(t,x,0,\xi)u(0,\xi;q)d\xi + v(t,x;q), \tag{8}$$

де $v(t,x;q)$ – розв'язок задачі Коші (4).

Задовольнивши інтегральну умову (3), матимемо

$$u(0,x;q) + \int\limits_0^{T_1} a(t,x)\left(\int\limits_{R^n} Z(t,x,0,\xi)u(0,\xi;q)d\xi\right)dt = -\int\limits_0^{T_1} a(t,x)v(t,x,q)dt \equiv F(x;q). \tag{9}$$

Розв'язок інтегрального рівняння (9) шукаємо методом послідовних наближень. Враховуючи нерівність $b<1$, одержимо розв'язок інтегрального рівняння (9), для якого правильна нерівність

$$|u(0,x;q)| \le \frac{b}{1-b}\left(\|f\|_{C(\Pi)} + \|\varphi\|_{C(R^n)}\right). \tag{10}$$

Встановимо формулу зображення розв'язку задачі (2), (3). Враховуючи нерівність $b<1$, запишемо розв'язок інтегрального рівняння (9) у вигляді

$$u(0,x;q) = F(x,q) + \int\limits_{R^n} R(x,y)F(y;q)dy, \tag{11}$$

де $R(x,y)$ – резольвента, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$R(x,\xi)=\int\limits_0^{T_1} a(t,x)Z(t,x,0,\xi)dt-\int\limits_{R^n} R(x,y)dy\int\limits_0^{T_1} a(t,y)Z(t,y,0,\xi)dt,$$

звідки отримуємо оцінку

$$\left|\int\limits_{R^n} R(x,\xi)d\xi\right|\le \frac{b}{1-b}.$$

Підставляючи у рівність (11) замість $F(x,q)$ значення

$$F(x,q)=-\int\limits_0^{T_1} a(t,x)\left[\int\limits_0^{t} d\tau\int\limits_{R^n} Z(t,x,\tau,\xi)f(\tau,\xi;q_1(\xi))d\xi+\int\limits_{R^n} Z(t,x,0,\xi)\varphi(\xi;q_2(\xi))d\xi\right]dt$$

і змінюючи порядок інтегрування, отримаємо

$$u(0,x;q)=\int\limits_0^{T_1} d\tau\int\limits_{R^n}\Gamma(T_1,x,\tau,\xi)f(\tau,\xi;q_1)d\xi+\int\limits_{R^n}\Gamma(T_1,x,0,\xi)\varphi(\xi;q_2)d\xi,$$

де

$$\Gamma(T_1,x,\tau,\xi)=-\int\limits_\tau^{T_1} a(t,x)Z(t,x,\tau,\xi)dt-\int\limits_\tau^{T_1} dt\int\limits_{R^n} a(t,y)R(x,y)Z(t,y,\tau,\xi)dy.$$

Підставляючи значення $u(0,x;q)$ у рівність (8) та змінюючи порядок інтегрування, отримаємо для розв'язку задачі (2), (3) зображення

$$u(t,x,q)=\int\limits_0^{t} d\tau\int\limits_{R^n} Z(t,x,\tau,\xi)f(\tau,\xi;q_1)d\xi+\int\limits_{R^n} Z(t,x,0,\xi)\varphi(\xi;q_2)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^{T_1} d\tau\int\limits_{R^n} G(T_1,t,x,\tau,y)f(\tau,y;q_1)dy+\int\limits_{R^n} G(T_1,t,x,0,y)\varphi(y;q_2)dy, \tag{12}$$

де

$$G(T_1,t,x,\tau,y)=\int\limits_{R^n} Z(t,x,\tau,\xi)\Gamma(T_1,\xi,\tau,y)d\xi.$$

Знайдемо оцінку норми $\|u\|_{C^{2b+\alpha}(\Pi)}$. Запишемо задачу (2), (3) у вигляді

$$(Lu)(t,x)=f(t,x;q_1),\ u(0,x;q)=\varphi(x;q_2)-\int\limits_0^{T_1} a(t,x)u(t,x;q)dt\equiv\varphi_1(x). \tag{13}$$

На підставі теореми 2.1 із [14] для задачі Коші (13) справджується оцінка

$$\|u\|_{C^{2b+\alpha}(\Pi)}\le c\left(\|f\|_{C^{\alpha}(\Pi)}+\|\varphi_1\|_{C^{2b+\alpha}(R^n)}\right). \tag{14}$$

Оскільки

$$\|\varphi_1\|_{C^{2b+\alpha}(R^n)} \leq \|\varphi\|_{C^{2b+\alpha}(R^n)} + b\|u\|_{C^{2b+\alpha}(\Pi)}, \qquad (15)$$

то, підставляючи (15) в (14), одержимо

$$\|u\|_{C^{2b+\alpha}(\Pi)} \leq \frac{c}{1-b}\left(\|f\|_{C^{\alpha}(\Pi)} + \|\varphi\|_{C^{2b+\alpha}(R^n)}\right).$$

□

2 Задача оптимального керування

В області Π розглянемо задачу (1)–(3). Будемо вважати, що виконані умови теореми 1 і умова в).

Позначимо через

$$\lambda_1(\xi) = \int_0^T dt \int_0^t r(\tau)d\tau \int_{R^n} \frac{\partial F_1(t,x;u,q_1)}{\partial u} Z(t,x,\tau,\xi)dx + \int_0^T dt \int_0^{T_1} r(\tau)d\tau \int_{R^n} \frac{\partial F_1(t,x;u,q_1)}{\partial u} \times$$

$$\times G(T_1,t,x,\tau,\xi)dx + \int_0^{T_2} dt \int_0^t r(\tau)d\tau \int_{R^n} \frac{\partial F_2(t,x;u,q_2)}{\partial u} Z(t,x,\tau,\xi)dx +$$

$$+ \int_0^{T_2} dt \int_0^{T_1} r(\tau)d\tau \int_{R^n} \frac{\partial F_2(t,x;u,q_2)}{\partial u} G(T_1,t,x,\tau,\xi)dx,$$

$$\lambda_2(\xi) = \int_0^T dt \int_{R^n} \frac{\partial F_1(t,x;u,q_1)}{\partial u} \left[Z(t,x,0,\xi) + G(T_1,t,x,0,\xi)\right] dx +$$

$$+ \int_0^{T_2} dt \int_{R^n} \frac{\partial F_2(t,x;u,q_2)}{\partial u} \left[Z(t,x,0,\xi) + G(T_1,t,x,0,\xi)\right] dx,$$

$$H_1(\xi,u,\lambda_1,q_1) = \lambda_1(\xi) f_0(\xi;q_1(\xi)) + \int_0^T F_1(t,\xi;u,q_1)dt,$$

$$H_2(\xi,u,\lambda_2,q_2) = \lambda_2(\xi)\varphi(\xi;q_2(\xi)) + \int_0^{T_2} F_2(t,\xi;u,q_2)dt,$$

$q^{(0)} = \left(q_1^{(0)}, q_2^{(0)}\right)$ – оптимальне керування, $u(t,x;q^{(0)})$ – оптимальний розв'язок задачі (1)–(3).

Правильна така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконана умова в) і умови теореми 1. Тоді*

1) якщо $\partial_{q_l} H_l > 0$, $l \in \{1,2\}$, то оптимальне керування $q^{(0)} = (\nu_{11}, \nu_{21})$;

2) якщо $\partial_{q_1} H_1 > 0$, $\partial_{q_2} H_2 < 0$, то оптимальне керування $q^{(0)} = (\nu_{11}, \nu_{22})$;

3) якщо $\partial_{q_1} H_1 < 0$, $\partial_{q_2} H_2 > 0$, то оптимальне керування $q^{(0)} = (\nu_{12}, \nu_{21})$;

4) якщо $\partial_{q_1} H_1 < 0$, $\partial_{q_2} H_2 < 0$, то оптимальне керування $q^{(0)} = (\nu_{12}, \nu_{22})$.

Доведення. Нехай $\Delta q = (\Delta q_1, \Delta q_2)$ – допустимий приріст керування $q = (q_1, q_2)$. Позначимо приріст функції $u(t, x; q_1, q_2)$ через $\Delta u = \Delta_{q_1} u + \Delta_{q_2} u$. Тоді $\Delta_{q_k} u$ в області Π будуть розв'язками параболічних рівнянь

$$(L\Delta_{q_k} u)(t,x) = \delta_{k1} r(t) \left[f_0(x; q_1(x) + \Delta q_1) - f_0(x; q_1(x)) \right] = \delta_{k1} r(t) \Delta f_0(x, q_1), \tag{16}$$

що задовольняє нелокальну умову

$$\Delta_{q_k} u(0, x; q_1, q_2) + \int_0^{T_1} a(\tau, x) \Delta_{q_k} u(\tau, x; q_1, q_2) d\tau =$$

$$= \delta_{k2} \left[\varphi(x; q_2(x) + \Delta q_2) - \varphi(x; q_2(x)) \right] = \delta_{k2} \Delta \varphi(x, q_2), \tag{17}$$

де δ_{ij} – символ Кронекера, $k \in \{1,2\}$.

Скориставшись формулою (12), для приростів $\Delta_{q_k} u$ одержимо зображення

$$\Delta_{q_1} u = \int_0^t r(\tau) d\tau \int_{R^n} Z(t, x, \tau, \xi) \Delta f_0(\xi, q_1(\xi)) d\xi +$$

$$+ \int_0^{T_1} r(\tau) d\tau \int_{R^n} G(T_1, t, x, \tau, \xi) \Delta f_0(\xi; q_1(\xi)) d\xi,$$

$$\Delta_{q_2} u = \int_{R^n} \left[Z(t, x, 0, \xi) + G(T_1, t, x, 0, \xi) \right] \Delta \varphi(\xi; q_2(\xi)) d\xi. \tag{18}$$

Розглянемо приріст функціоналу $I(q)$:

$$\Delta I(q) = \Delta_{q_1} I(q) + \Delta_{q_2} I(q). \tag{19}$$

Використовуючи формулу Тейлора, запишемо прирости $\Delta_{q_k} I$

$$\Delta_{q_k} I = \int_0^T dt \int_{R^n} \left[\frac{\partial F_1(t, x; u, q_1)}{\partial u} \Delta_{q_k} u + O\left(\|\Delta_{q_k} u\|^2 \right) + \right.$$

$$\left. + \delta_{k1} \left(\frac{\partial F_1(t, x; u, q_1)}{\partial q_1} \Delta q_1 + O\left(|\Delta q_1|^2 \right) \right) \right] dx + \int_0^{T_2} dt \int_{R^n} \left[\frac{\partial F_2(t, x; u, q_2)}{\partial u} \Delta_{q_k} u + O\left(\|\Delta_{q_k}\|^2 \right) + \right.$$

$$\left. + \delta_{k2} \left(\frac{\partial F_2(t, x; u, q_2)}{\partial q_2} \Delta q_2 + O\left(|\Delta q_2|^2 \right) \right) \right] dx. \tag{20}$$

Підставляючи (18), (20) у (19) і змінюючи при цьому порядок інтегрування, знаходимо

$$\Delta I(p) = \int\limits_{R^n} \left[\partial_{q_1} H_1(\xi, u, \lambda_1, q_1)\Delta q_1 + \partial_{q_2} H_2(\xi, u, \lambda_2, q_2)\Delta q_2 + O\left(|\Delta q_1|^2\right) + O\left(|\Delta q_2|^2\right) + \right.$$

$$\left. + O\left(\|\Delta_{q_1} u\|^2\right) + O\left(\|\Delta_{q_2} u\|^2\right)\right] dx.$$

Якщо $q_k = \nu_{k2}(x)$ і $\partial_{q_k} H_k < 0$, то при досить малих Δq_k маємо $\Delta I(q) > 0$, $k \in \{1, 2\}$.

Нехай $q^{(0)}$ – оптимальне керування, тобто $\Delta I(q) > 0$. Перевіримо виконання, наприклад, умови 4) теореми 2. Якщо вирази $\partial_{q_1} H_1$, $\partial_{q_2} H_2$ – знакозмінні величини, тобто $\partial_{q_1} H_1 > 0$ в $D \subset R^n$, $\partial_{q_2} H_2 > 0$ в $D_1 \subset R^n$ і $\partial_{q_1} H_1 < 0$ в $R^n \setminus D$, $\partial_{q_2} H_2 < 0$ в $R^n \setminus D_1$, то, використовуючи теорему про середнє значення, маємо

$$\Delta I(q) = \partial_{q_1} H_1(x^+, u^+, \lambda_1^+, q_1^+) \int\limits_D \Delta q_1 dx - \left|\partial_{q_1} H_1(x^-, u^-, \lambda_1^-, q_1^-)\right| \int\limits_{R^n \setminus D} \Delta q_1 dx +$$

$$+ \partial_{q_2} H_2(x^+, u^+, \lambda_1^+, q_1^+) \int\limits_{D_1} \Delta q_2 dx - \left|\partial_{q_2} H_2(x^-, u^-, \lambda_1^-, q_2^-)\right| \int\limits_{R^n \setminus D_1} \Delta q_2 dx +$$

$$+ \int\limits_{R^n} \left[O\left(|\Delta q_1|^2\right) + O\left(|\Delta q_2|^2\right) + O\left(|\Delta_{q_1} u|^2\right) + O\left(|\Delta_{q_2} u|^2\right)\right] dx.$$

При досить малих Δq_k знак ΔI визначається першими чотирма доданками суми. Різниця перших двох доданків і наступної пари двох доданків змінює знак $\Delta I(q)$ в залежності від величин $mesD$, $mesD_1$, Δq_k, $k \in \{1, 2\}$.

При досить малих величинах $mesD$, $mesD_1$ і $\Delta q_k > 0$ маємо $\Delta I(q) < 0$ і навпаки $\Delta I(q) > 0$, якщо малі величини $mes(R^n \setminus D)$, $mes(R^n \setminus D_1)$ і $\Delta q_k > 0$. Отже, функціонал $I(q)$ не досягає мінімуму. Знаходження оптимального керування $q^{(0)}$ у інших випадках, які залежать від знаку величин $\partial_{q_k} H_k$, $k \in \{1, 2\}$, доводяться аналогічно. □

Нехай умови теореми 2 не виконані.

Тоді правильна така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконана умова в) і умови теореми 1. Для того, щоб керування* $q^{(0)} = \left(q_1^{(0)}, q_2^{(0)}\right)$ *і відповідний розв'язок задачі* (2), (3) *було оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:*

1) функції $H_k(\xi, u; \lambda_k, q_k)$, $k \in \{1, 2\}$ *за аргументами* q_k *в точці* $q_k^{(0)}$ *досягали мінімального значення;*

2) для довільного вектора $\left(l_k^{(1)}, l_k^{(2)}\right) \neq 0$ *виконувалась нерівність*

$$\partial_u^2 F_k\left(t, x; u, q_k^{(0)}\right)\left(l_k^{(1)}\right)^2 + 2\partial_u \partial_{q_k} F_k\left(t, x; u, q_k^{(0)}\right) l_k^{(1)} l_k^{(2)} +$$

$$+ \partial_{q_k}^2 F_k\left(t, x; u, q_k^{(0)}\right)\left(l_k^{(2)}\right)^2 > 0.$$

Доведення теореми 3 проводиться за допомогою методики доведення теореми 2.14 [12].

Список літератури

[1] Lions J.-L. Optimal control of systems governed by partial differential equations. Mir, Moscow, 1972, 416. (in Russian)

[2] Balakrishnan V. Semigroup theory and control theory. Washington, 1965.

[3] Bermudez A. Some applications of optimal control theory of distributed systems. Control, Optimisation and Calculus of Variations, 2002, 8, 195-218.

[4] Casas E., Vexler B., Zuazua E. Sparse initial data identification for parabolic PDE and its finite element approximations. Mathematical Control and Related Fields, 2015, 5(3), 377-399.

[5] Gong Wei, Hinze Michael, Zhou Zhaojie. A finite element method for Dirichlet boundary control problems governed by parabolic PDEs. Hamburger Beitrage zur Angewandten Mathematik, 2014, 21, P. 1-21

[6] Zuliang Lu. Optimal control problem for a quasilinear parabolic equation with controls in the coefficients and with state constraints. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2011, 32(4), 320-327.

[7] Hamberg D., Krumbiegel K., Rehberg J. Optimal control of a Parabolic Equation with Dunamic Boundary Condition. Applied Mathematics and Optimization, 2013, 67(1), 3-31.

[8] Pukalskyi I.D. Green function of a parabolic boundary value problem and the optimization problem. Ukrainian Mathematical Journal, 2000, 52(4), 567-571. (in Ukrainian)

[9] Pukalskyi I.D. Parabolic boundary value problem and optimal control problem. Mathematical Methods and Physicomechanical Fields, 2009, 52(4), 34-41. (in Ukrainian)

[10] Pukalskyi I.D., Yashan B.O. One-sided boundary value problem with impulsive conditions for parabolic equations with degeneration. Journal of Mathematical Sciences, 2021, 256, 398-415.

[11] Pukalskyi I.D., Luste I.P. Optimal control in the multipoint boundary value problem for $2b$-parabolic equations. Bukovinian Math. Journal, 10(1) 2022, 110-119.

[12] Pukalskyi I.D., Luste I.P. Boundary value problems for parabolic equations of the second order. Tutorial Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, 2021, 284 p. (in Ukrainian)

[13] Ivasishen S.D. Green's matrices of general inhomogeneous boundary value problems for parabolic ones according to I.G. Petrovsky systems. Preprint of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, Kiev, 1968, 2-52. (in Russian)

[14] Matiichuk M.I. Parabolic and Elliptic Boundary-Value Problems with Singularities. Chernivtsi, Prut, 2003, 248 p.

Надійшло 30.03.2023

Pukalskyy I.D., Luste I.P. *Optimal control problem for a $2b$-parabolic equation with an integral non-local condition*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 1 (2023), 106–114.

The problem of choosing the optimal control of the system, which is described by a parabolic problem with an integral condition over the time and limited internal and starting control, is investigated. The quality criterion will be given by the sum of volume integrals. Using the fundamental solution of the Cauchy problem for the $2b$-parabolic equation, the existence, unity and integral representation of the solutions of the problem for the $2b$-parabolic equation with the integral condition on the time variable were established. Estimates of the solution of the nonlocal problem for the $2b$-parabolic equation with integral condition in time and its derivatives in Hölder spaces are found. The obtained result was used in the study of the problem of optimal control. With the help of the Taylor formula and the integral representation of the solutions of the nonlocal problem, the necessary and sufficient conditions for the existence of the optimal control of the system described by the problem for the $2b$-parabolic equation with the integral condition for the time variable were found.