Bukovinian Math. Journal. 2022, **10**, 2, 77–89 Буковинський матем. журнал 2022, Т.10, №2, 77–89

Городецький В.В., Мартинюк О.В.

Властивості розв'язків рівняння теплопровідності з дисипацією

Доведено коректну розв'язність задачі Коші для рівняння теплопровідності з дисипацією, коли початковою функцією є елемент простору $(S_{1/2}^{1/2})'$.

Ключові слова і фрази: задача Коші, рівняння теплопровідності, гармонійний осцилятор, коректна розв'язність, функції Ерміта.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці
e-mail: *o.martynyuk@chnu.edu.ua*

Вступ

Теорія задачі Коші для рівнянь з частинними похідними параболічного типу бере свій початок, як відомо, із дослідження властивостей розв'язків рівняння теплопровідності. Фундаментальним розв'язком такого рівняння є функція

$$G(t,x) = (2\sqrt{\pi t})^{-1} \exp\{-x^2/(4t)\}, \ t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

Сама ця функція, як функція x (при кожному $t > 0$) є елементом простору $S_{1/2}^{1/2}$. Елементами такого простору є нескінченно диференційовні на $\mathbb{R}$ функції, які разом з усіма своїми похідними спадають при $|x| \to +\infty$ як $\exp\{-ax^2\}$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Граничне значення $G(t,x)$ при $t \to +0$ і фіксованому $x \in \mathbb{R}$ (δ-функція Дірака) існує вже у просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$ усіх лінійних і неперервних функціоналів, заданих на $S_{1/2}^{1/2}$. Цей факт дозволив встановити, що $(S_{1/2}^{1/2})'$ збігається із множиною початкових значень для постановки задачі Коші для рівняння теплопровідності, при яких розв'язки такої задачі є нескінченно диференційовними за змінною x функціями. Аналогічна ситуація має місце і у випадку рівнянь параболічного типу загальнішого вигляду (М.Л. Горбачук, В.І. Горбачук, О.І. Кашпіровський, П.І. Дудников та ін. [1–5]).

У цій роботі досліджуються властивості розв'язків рівняння теплопровідності з дисипацією, яке пов'язане з гармонійним осцилятором – оператором $A = -d^2/dx^2 + x^2$ (невід'ємним і самоспряженим у $L_2(\mathbb{R})$). При цьому знайдено явний вигляд функції, яка є аналогом фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності. Знайдено формулу, яка описує всі нескінченно диференційовні розв'язки такого

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 30D15, 30D35, 30J10.

рівняння, доведено коректну розв'язність задачі Коші з початковою функцією – елементом простору $(S^{1/2}_{1/2})'$, при цьому встановлено, що $(S^{1/2}_{1/2})'$ є "максимальним" простором початкових даних задачі Коші, при яких розв'язки є нескінченно диференційовними за просторовою змінною функціями. Основним засобом дослідження є формальні ряди Ерміта, які ототожнюються з лінійними неперервними функціоналами, заданими на $S^{1/2}_{1/2}$.

1. Ортонормовані многочлени Ерміта. Функції Ерміта. Функція F: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається ваговою, якщо вона невід'ємна і така, що абсолютно збіжними є інтеграли

$$\alpha_n = \int\limits_{\mathbb{R}} x^n F(x) dx, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

які називаються степеневими моментами функції F. За F, зокрема, можна взяти функцію $\exp(-x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. Користуючись методом математичної індукції, можна довести, що

$$(e^{-x^2})^{(n)} = e^{-x^2} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{n-k} n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}, \ x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже, функція $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, є многочленом степеня n. Цей многочлен називається стандартизованим многочленом Ерміта. Многочлени $\{H_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ ортогональні на $\mathbb{R}$ з ваговою функцією $\exp(-x^2)$, при цьому

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_n(x) dx = \sqrt{\pi} 2^n n!, \ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже, ортонормовані многочлени Ерміта $\hat{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, мають вигляд

$$\hat{H}_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{n! 2^n \sqrt{\pi}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n! 2^n \sqrt{\pi}}} e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}.$$

Многочлени $\hat{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, побудовані за ваговою функцією $F(x) = \exp(-x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, утворюють ортонормований базис у просторі $L_2(\mathbb{R}, \exp(-x^2))$. У просторі $L_2(\mathbb{R})$ ортонормований базис утворюють функції Ерміта

$$h_n(x) = e^{-x^2/2} \hat{H}_n(x) = (-1)^n \pi^{-1/4} (n! 2^n)^{-1/2} e^{x^2/2} (e^{-x^2})^{(n)}, n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

2. Простори основних та узагальнених функцій. Формальні ряди Ерміта

Символом S^β_β, $\beta > 0$ – фіксований параметр, позначають сукупність функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які задовольняють умову

$$\exists c > 0 \, \exists A > 0 \, \exists B > 0 \, \forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+ \, \forall x \in \mathbb{R} : \ |x^k \varphi^{(m)}(x)| \leq c A^k B^m k^{k\beta} m^{m\beta}.$$

Якщо $\beta \geq 1/2$, то простори S^β_β нетривіальні і утворюють щільні в $L_2(\mathbb{R})$ множини. Якщо $1/2 \leq \beta < 1$, то S^β_β складається з тих і лише тих функцій φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину і для яких

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \exp\{-a|x|^{1/\beta} + b|y|^{1/(1-\beta)}\}, \{x, y\} \subset \mathbb{R},$$

де сталі $c, a, b > 0$ залежать лише від функції φ.

Топологічна структура просторах S_β^β визначається так. Символом $S_{\beta,A}^{\beta,B}$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in S_\beta^\beta$, які задовольняють умову:

$$\forall \overline{A} > A \ \forall \overline{B} > B : \ |x^k \varphi^{(m)}(x)| \leq c\overline{A}^k \overline{B}^m k^{k\beta} m^{m\beta}, \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

Ця множина перетворюється в повний зліченно нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta,\rho} = \sup_{x,k,m} \frac{|x^k \varphi^{(m)}(x)|}{(A+\delta)^k (B+\rho)^m k^{k\beta} m^{m\beta}}, \{\delta, \rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}.$$

Якщо $A_1 < A_2$, $B_1 < B_2$, то $S_{\beta,A_1}^{\beta,B_1}$ неперервно вкладається в $S_{\beta,A_2}^{\beta,B_2}$ і $S_\beta^\beta = \bigcup\limits_{A,B>0} S_{\beta,A}^{\beta,B}$.

Якщо P – деякий фіксований многочлен, то в просторі S_β^β визначена і неперервна операція множення на P. Звідси, зокрема, випливає, що функції Ерміта h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, належать до простору $S_{1/2}^{1/2}$. Справді, $e^{-x^2/2} \in S_{1/2}^{1/2}$, бо $|e^{-z^2}| = e^{-x^2/2+y^2/2}$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Звідси та з характеристики просторів S_β^β, $1/2 \leq \beta < 1$, випливає, що $\dfrac{1}{\beta} = 2$, $\dfrac{1}{1-\beta} = 2$, тобто $\beta = \dfrac{1}{2}$. Функції Ерміта h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, мають вигляд $P(x)\exp(-x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, де P – многочлен Ерміта. Отже, $h_k \in S_{1/2}^{1/2}$ для кожного $k \in \mathbb{Z}_+$.

Символом $(S_\beta^\beta)'$ позначимо сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на S_β^β зі слабкою збіжністю. Елементи простору $(S_\beta^\beta)'$ називатимемо узагальненими функціями. Зазначимо, що S_β^β неперервно вкладається в $(S_\beta^\beta)'$, тобто кожну основну функцію $\varphi \in S_\beta^\beta$ можна розуміти як регулярну узагальнену функцію $f_\varphi \in (S_\beta^\beta)'$:

$$\langle f_\varphi, \psi \rangle = (\varphi, \psi)_{L_2(\mathbb{R})} = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\psi(x)dx, \ \forall \psi \in S_\beta^\beta.$$

Якщо $f \in (S_\beta^\beta)'$, то і $f^{(p)} \in (S_\beta^\beta)'$ для кожного $p \in \{2, 3, 4, \dots\}$, при цьому узагальнена функція $f^{(p)}$ визначається формулою

$$\langle f^{(p)}, \varphi \rangle = (-1)^p \langle f, \varphi^{(p)} \rangle, \ \forall \varphi \in S_\beta^\beta,$$

(тут символом $\langle f^{(p)}, \cdot \rangle$ позначається дія функціоналу $f^{(p)}$ на основну функцію).

Кожній узагальненій функції $f \in (S_\beta^\beta)'$ відповідає формальний ряд Ерміта $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(f) h_k$, де $c_k(f) = \langle f, h_k \rangle$, $k \in \mathbb{Z}_+$, – коефіцієнти Фур'є-Ерміта. Функції Ерміта h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, є власними функціями гармонійного осцилятора $A = -\dfrac{d^2}{dx^2} + x^2$ – невід'ємно самоспряженого оператора в $L_2(\mathbb{R})$, спектр якого суто дискретний, $\lambda_k = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, – його власні числа.

Із загальної теорії невід'ємних самоспряжених операторів у гільбертовому просторі, власні функції якого утворюють ортонормований базис, випливає, що для кожної узагальненої функції $f \in (S_\beta^\beta)'$ її ряд Ерміта збігається до f у просторі $(S_\beta^\beta)'$. При цьому елементи просторів S_β^β, $(S_\beta^\beta)'$ можна охарактеризувати за допомогою їхніх коефіцієнтів Фур'є-Ерміта так [4]:

а) $(f \in S_\beta^\beta) \Leftrightarrow (\exists \mu > 0\ \exists c > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : |c_k(f)| \leq c\exp\{-\mu(2k+1)^{1/(2\beta)}\})$;

б) $(f \in (S_\beta^\beta)') \Leftrightarrow (\forall \mu > 0\ \exists c = c(\mu) > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+$: $|c_k(f)| \leq c\exp\{\mu(2k+1)^{1/(2\beta)}\})$.

Крім того, $S_{\beta/2}^{\beta/2} = H_{\{\beta\}} = \bigcup\limits_{\mu>0} H_{\mu,\beta}$, де $H_{\mu,\beta}$ складається з тих функцій $\varphi \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$, для яких при деякому $\mu > 0$

$$\|\varphi\|^2_{H_{\mu,\beta}} := \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\mu(2k+1)^{1/\beta}} |c_k(\varphi)|^2 < \infty,\ c_k(\varphi) = (\varphi, h_k)_{L_2(\mathbb{R})}, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Відповідно, $(S_{\beta/2}^{\beta/2})' = H'_{\{\beta\}} = \bigcap\limits_{\mu>0} H'_{\mu,\beta}$, при цьому якщо $f \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$, то для довільного $\mu > 0$

$$\|\varphi\|^2_{H'_{\mu,\beta}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\mu(2k+1)^{1/\beta}} |c_k(\varphi)|^2 < \infty,\ c_k(f) = \langle f, h_k\rangle, k \in \mathbb{Z}_+.$$

3. Рівняння теплопровідності з дисипацією

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - x^2 u(t,x),\ (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{1}$$

яке називатимемо рівнянням теплопровідності з дисипацією. Зауважимо, що рівняння (1) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + Au(t,x) = 0,\ (t,x) \in \Omega, \tag{2}$$

де $A = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2$ – гармонійний осцилятор (невід'ємний самоспряжений у $L_2(\mathbb{R})$ оператор).

Під розв'язком рівняння (1) розуміємо функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, яка задовольняє умови: 1) $u(t,\cdot)$ – неперервно диференційовна по t (при фіксованому $x \in \mathbb{R}$); 2) $u(\cdot,x) \in L_2(\mathbb{R})$ і $u(\cdot,x)$ – двічі неперервно диференційовна функція по x (при кожному фіксованому $t > 0$); 3) $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (1).

Теорема 1. *Функція $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, є розв'язком рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли вона зображається у вигляді*

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t(2k+1)} c_k h_k(x) = \langle f_y, K_{t,x}(y)\rangle, \tag{3}$$

де $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k = f \in (S_{1/2}^{1/2})'$,

$$K_{t,x}(y) = (2\pi \mathrm{sh}(2t))^{-1} \exp\{\mathrm{sh}^{-1}(2t)xy - \frac{1}{2}\mathrm{cth}(2t)(x^2+y^2)\},$$

при цьому $K_{t,x}(\cdot) \in S_{1/2}^{1/2}$ (при кожному $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$), $u(t,\cdot) \in S_{1/2}^{1/2}$ при кожному $t > 0$.

Доведення. Нехай $u(t,x)$ – розв'язок рівняння (1). Оскільки $u(t,x) \in L_2(\mathbb{R})$ при кожному $t \in (0,T]$, а функції Ерміта h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, утворюють ортонормований базис у $L_2(\mathbb{R})$, то

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t)h_k(x), (t,x) \in \Omega,$$

$$c_k(t) \equiv c_k(u(t,\cdot)) = (u(t,\cdot),h_k)_{L_2(\mathbb{R})}, k \in \mathbb{Z}_+,$$

причому

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(t)|^2, t \in (0,T].$$

Для відшукання $c_k(t)$ помножимо (2) скалярно на h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$; у результаті прийдемо до співвідношення

$$(u'_t,h_k) + (Au,h_k) = 0.$$

При фіксованому $k \in \mathbb{Z}_+$ маємо

$$(Au,h_k) = (u,Ah_k) = (u,(2k+1)h_k) = (2k+1)(u,h_k) = (2k+1)c_k(t)$$

(тут враховано, що h_k – власна функція оператора A, а $(2k+1)$ – його власне число). Із диференційовності функції $u(t,x)$ за змінною $t \in (0,T]$ випливає диференційовність функції $c_k(t) = (u(t,\cdot),h_k)$. Отже, функція $c_k(t)$ задовольняє рівняння

$$c'_k(t) + (2k+1)c_k(t) = 0, \ k \in \mathbb{Z}_+,$$

загальний розв'язок якого має вигляд $c_k(t) = c_k \exp\{-t(2k+1)\}$, $c_k = \mathrm{const}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Тоді

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-t(2k+1)} h_k(x), (t,x) \in \Omega.$$

причому

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 e^{-2t(2k+1)} \le c^2,$$

де $c^2 = c^2(t) > 0$. Отже,

$$\forall t > 0 \ \exists c = c(t) > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : \ |c_k(t)| \le c e^{t(2k+1)}.$$

Звідси випливає, що ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k$ є формальним рядом Ерміта деякої узагальненої функції $f \in (S^{1/2}_{1/2})'$, при цьому

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in (S^{1/2}_{1/2})', \ c_k = \langle f,h_k \rangle, \ k \in \mathbb{Z}_+,$$

тобто $c_k = c_k(t)$ – коефіцієнти Ерміта функції $f \in (S^{1/2}_{1/2})'$.

Таким чином,

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k e^{-t(2k+1)}h_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-t(2k+1)}\langle f,h_k(y)\rangle h_k(x)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\langle f_y,h_k(y)\rangle e^{-t(2k+1)}h_k(x).$$

Урахувавши властивості лінійності та неперервності функціонала f, одержимо

$$u(t,x)=\lim_{n\to\infty}\langle f_y,\sum_{k=0}^{n}e^{-t(2k+1)}h_k(y)h_k(x)\rangle=\langle f_y,\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}e^{-t(2k+1)}h_k(x)h_k(y)\rangle=$$

$$=\langle f_y,\sum_{k=0}^{\infty}e^{-t(2k+1)}h_k(x)h_k(y)\rangle\equiv\langle f_y,K_{t,x}(y)\rangle. \qquad (4)$$

Оскільки $|h_k(x)h_k(y)|\leq 1$, $\forall k\in\mathbb{Z}_+$, $\forall\{x,y\}\subset\mathbb{R}$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}e^{-t(2k+1)}h_k(x)h_k(y)$ збігається рівномірно по $\{x,y\}\subset\mathbb{R}$ при $t>0$. Крім того, $K_{t,x}(\cdot)\in S_{1/2}^{1/2}$, бо

$$|c_k(K_{t,x})|=|e^{-t(2k+1)}h_k|\leq e^{-t(2k+1)},\ \forall k\in\mathbb{Z}_+, t>0.$$

Для обґрунтування коректності проведених у (4) перетворень доведемо, що $S_{n,t,x}(y)\to K_{t,x}(y)$ при $n\to\infty$ у просторі $S_{1/2}^{1/2}$, де

$$S_{n,t,x}(y)=\sum_{k=0}^{n}e^{-t(2k+1)}h_k(x)h_k(y).$$

Нагадаємо, що $S_{1/2}^{1/2}=H_{\{1\}}=\bigcup\limits_{\mu>0}H_{\mu,1}$, де $H_{\mu,1}$ – сукупність функцій з простору $S_{1/2}^{1/2}$, для яких при деякому $\mu>0$

$$\|\varphi\|_{H_{\mu,1}}^2=\sum_{k=0}^{\infty}e^{2\mu(2k+1)}|c_k(\varphi)|^2<\infty,\ c_k(\varphi)=(\varphi,h_k)_{L_2(\mathbb{R})},k\in\mathbb{Z}_+.$$

Отже, потрібно довести, що:

1) $S_{n,t,x}\in H_{\mu,1}$ при деякому $\mu>0$ та кожному $n\in\mathbb{N}$ (при фіксованих $t>0$ і $x\in\mathbb{R}$);

2) $\|S_{n,t,x}-K_{t,x}\|_{H_{\mu,1}}\to 0$, $n\to\infty$ при фіксованих $t>0$, $x\in\mathbb{R}$.

Для доведення 1) зауважимо, що

$$c_k(S_{n,t,x})=\langle S_{n,t,x},h_k\rangle=(S_{n,t,x},h_k)_{L_2(\mathbb{R})}=\begin{cases}\exp\{-t(2k+1)\}, & \text{якщо } k\leq n,\\ 0, & \text{якщо } k>n.\end{cases}$$

Тоді для довільно фіксованого $\mu<t$ маємо:

$$\|S_{n,t,x}\|_{H_{\mu,1}}^2=\sum_{k=0}^{\infty}e^{2\mu(2k+1)}|c_k(S_{n,t,x})|^2=$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\mu(2k+1)} e^{-2t(2k+1)} |h_k(x)|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2(t-\mu)(2k+1)} < \infty$$

(тут скористалися тим, що $|h_k(x)| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$). Отже, властивість 1) доведена.

Для доведення 2) досить показати, що

$$\alpha_{n,t,x}(y) := \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-t(2k+1)} h_k(x) h_k(y) \to 0, \ n \to \infty$$

у просторі $H_{\mu,1}$, де $\mu < t$, тобто що

$$\|\alpha_{n,t,x}\|^2_{H_{\mu,1}} \to 0, \ n \to \infty,$$

при фіксованих $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Оскільки $\alpha_{n,t,x} \in H_{\mu,1} \subset S_{1/2}^{1/2}$, де $0 < \mu < t$ ($t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ фіксовані), то

$$c_k(\alpha_{n,t,x}) = \langle \alpha_{n,t,x}, h_k \rangle = (\alpha_{n,t,x}, h_k)_{L_2(\mathbb{R})} = \begin{cases} e^{-t(2k+1)}, & \text{якщо } k \geq n, \\ 0, & \text{якщо } k < n. \end{cases}$$

Тоді для $\mu < t$ маємо:

$$\|\alpha_{n,t,x}\|^2_{H_{\mu,1}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\mu(2k+1)} |c_k(\alpha_{n,t,x})|^2 =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{2\mu(2k+1)} e^{-2t(2k+1)} |h_k|^2 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-2(t-\mu)(2k+1)} \to 0$$

при $n \to \infty$ як залишок збіжного ряду. Цим доведено, що умова 2) виконується.

Далі скористаємося співвідношенням [5]

$$(1-\omega^2)^{-1/2} \exp\left\{\frac{2xy\omega - (x^2+y^2)\omega^2}{1-\omega^2}\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!2^k} H_k(x) H_k(y) \omega^k = \pi^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{H}_k(x) \hat{H}_k(y) \omega^k, |\omega| < 1, \{x,y\} \subset \mathbb{R}$$

(ω – довільно фіксований параметр). Покладемо $\omega = \exp\{-2t\}$, $t > 0$. Урахувавши зв'язок між многочленами H_n та $\hat{H}_n$ (див. п. 1), знайдемо, що

$$K_{t,x}(y) = \pi^{-1/2} e^{-(t+x^2/2+y^2/2)(1-e^{-4t})^{-1/2}} \exp\left\{\frac{2xye^{-2t} - (x^2+y^2)e^{-4t}}{1-e^{-4t}}\right\} =$$

$$= (2\pi)^{-1/2} (\mathrm{sh}(2t)^{-1/2}) \exp\{\mathrm{sh}^{-1}(2t)xy - \frac{1}{2}\mathrm{cth}(2t)(x^2+y^2)\}.$$

Нехай тепер функція $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, має вигляд (3). Доведемо, що вона є розв'язком рівняння (1). Справді, оскільки A – невід'ємний самоспряжений оператор у $L_2(\mathbb{R})$, $\sigma(A) = \{2k+1, k \in \mathbb{Z}_+\}$, то спектральна функція E_λ, $\lambda \in [0,\infty)$, є кусково-сталою і має розриви у точках $\lambda_k = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, причому $E_{\lambda_k+0} - E_{\lambda_k}$ – оператор проектування на власний підпростір оператора A, який відповідає власному значенню $\lambda_k = 2k+1$.

Цей підпростір є одновимірним, а відповідна функція Ерміта h_k утворює його базис. Отже,

$$(E_{\lambda_k+0} - E_{\lambda_k})\varphi = (\varphi, h_k)_{L_2(\mathbb{R})} h_k = c_k(\varphi) h_k,$$

а спектральна функція E_λ, $\lambda \in [0, \infty)$, у цьому випадку має вигляд

$$(E_\lambda \varphi)(x) = \sum_{\lambda_k < \lambda} c_k(\varphi) h_k(x).$$

Звідси та з основної спектральної теореми для самоспряжених операторів випливає, що

$$A\varphi = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda \varphi = \sum_{k=0}^\infty \lambda_k (E_{\lambda_k+0} - E_{\lambda_k})\varphi(x)$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \lambda_k c_k(\varphi) h_k(x), \lambda_k = 2k+1, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже,

$$Au(t,x) = \sum_{k=0}^\infty (2k+1) c_k(u(t,x)) h_k(x) = \sum_{k=0}^\infty (2k+1) e^{-t(2k+1)} c_k(y) h_k(x).$$

Функція $u(t,x)$ диференційовна по t (при кожному $x \in \mathbb{R}$). Справді, нехай $t \in [\varepsilon, T]$, де $\varepsilon > 0$. Доведемо, що ряд

$$-\sum_{k=0}^\infty c_k \cdot (2k+1) e^{-t(2k+1)} h_k(x) := \gamma(t,x) \tag{5}$$

збігається рівномірно по t (при фіксованому $x \in \mathbb{R}$), бо тоді $\partial u(t,x)/\partial t = \gamma(t,x)$, $t \in [\varepsilon, T]$. Оскільки $|h_k(x)| \leq 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$, то

$$|-(2k+1) c_k e^{-t(2k+1)} h_k(x)| \leq (2k+1)|c_k| e^{-\varepsilon(2k+1)} \leq \frac{2}{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon}{2}(2k+1)} |c_k|.$$

Оскільки $\sum_{k=0}^\infty c_k h_k = f \in (S_{1/2}^{1/2})'$, то для $\mu = \varepsilon/4$ існує стала $c_\mu > 0$ така, що

$$|c_k| \leq c_\mu e^{\frac{\varepsilon}{4}(2k+1)}, \ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Тоді

$$|-(2k+1) c_k e^{-t(2k+1)} h_k(x)| \leq \frac{2}{\varepsilon} c_\mu e^{-\frac{\varepsilon}{4}(2k+1)}, \ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже, ряд (5) збігається рівномірно при $t \geq \varepsilon$. Цим доведено, що функція $u(t,x)$ диференційовна по t на відрізку $[\varepsilon, T]$. Оскільки $\varepsilon > 0$ – довільне, то функція $u(t,x)$ диференційовна по t на проміжку $(0, T]$, при цьому правильним є співвідношення $\partial u(t,x)/\partial t = \gamma(t,x)$, $t \in (0,T]$, $x \in \mathbb{R}$. Звідси вже випливає, що u – розв'язок рівняння (1).

Теорему доведено. $\square$

Наслідок 1. *Нехай* $f \in (S_{1/2}^{1/2})'$. *Тоді*

$$u(t,x) = \langle f_y, K_{t,x}(y)\rangle \to f \text{ при } t \to +0$$

у просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$.

Доведення. Символом s позначимо множину всіх послідовностей $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ дійсних чисел з покоординатною збіжністю, які задовольняють умову:

$$\forall \mu > 0\ \exists c = c(\mu) > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+ :\ |a_k| \leq ce^{\mu(2k+1)}.$$

Побудуємо відображення F: $(S_{1/2}^{1/2})' \to s$ так. Кожному $f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)h_k \in (S_{1/2}^{1/2})'$ поставимо у відповідність послідовність $\{c_k(f) = \langle f, h_k\rangle, k \in \mathbb{Z}_+\} \in s$. При цьому різним елементам з $(S_{1/2}^{1/2})'$ відповідають різні елементи з s. Справді, якщо $\{f_1, f_2\} \subset (S_{1/2}^{1/2})'$ і $f_1 \neq f_2$, то існує $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що $c_{k_0}(f_1) \neq c_{k_0}(f_2)$; бо у протилежному випадку

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ :\ c_k(f_1) = c_k(f_2),$$

тобто $\langle f_1 - f_2, h_k\rangle = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$. Нехай

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varphi)h_k \in S_{1/2}^{1/2}, c_k(\varphi) = (\varphi, h_k), k \in \mathbb{Z}_+,$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k(\varphi)h_k, n \in \mathbb{N}.$$

Внаслідок лінійності функціоналу $f_1 - f_2$

$$\langle f_1 - f_2, S_n\rangle = \langle f_1 - f_2, \sum_{k=0}^{n} c_k(\varphi)h_k\rangle = \sum_{k=0}^{n} c_k(\varphi)\langle f_1 - f_2, h_k\rangle = 0.$$

Урахувавши властивість неперервності функціоналу $f_1 - f_2$, а також те, що $S_n \to \varphi$ при $n \to \infty$ у просторі $S_{1/2}^{1/2}$, одержимо

$$\langle f_1 - f_2, \varphi\rangle = \langle f_1 - f_2, \lim_{n\to\infty} S_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f_1 - f_2, S_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f_1 - f_2, \sum_{k=0}^{n} c_k(\varphi)h_k\rangle = 0.$$

Це означає, що $f_1 = f_2$. Отже, відображення

$$F : (S_{1/2}^{1/2})' \ni f \to \{c_k(f) = \langle f, h_k\rangle, k \in \mathbb{Z}_+\} \in s$$

є бієкцією. Більше того, F – ін'єкція. Дійсно, нехай $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\} \in s$. Визначимо функціонал f так: $\langle f, h_k\rangle = a_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$ для довільної функції $\varphi \in \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varphi)h_k \in S_{1/2}^{1/2}$ покладемо, за означенням, $\langle f, \varphi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_k(\varphi)$. Функціонал f визначений коректно, оскільки ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k c_k(\varphi)$ є збіжним. Справді, оскільки $\varphi \in S_{1/2}^{1/2}$, то

$$\exists \mu > 0\ \exists c > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+ :\ |c_k(\varphi)| \leq ce^{-\mu(2k+1)}$$

і, за умовою,
$$\forall \mu_1 > 0 \ \exists c_1 = c_1(\mu_1) > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : \ |a_k| \le c_1 e^{\mu_1(2k+1)}. \tag{6}$$

Взявши $\mu_1 = \mu/2$, одержимо збіжність ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k c_k(\varphi)$. Очевидно, що побудований функціонал f – лінійний. Доведемо його неперервність. Нехай $\{\varphi_n, n \ge 1\} \subset S_{1/2}^{1/2}$ і $\varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$ у просторі $S_{1/2}^{1/2} = H_{\{1\}} = \bigcup\limits_{\mu>0} H_{\mu,1}$. Це означає, що при деякому $\mu_0 > 0$
$$\|\varphi_n\|^2_{H_{\mu_0,1}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\mu_0(2k+1)} |c_k(\varphi_n)|^2 \to 0 \text{ при } n \to \infty;$$
тобто
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \ge n_0 : \ \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\mu(2k+1)} |c_k(\varphi_n)|^2 < \varepsilon.$$
Звідси випливає, що
$$e^{\mu_0(2k+1)} |c_k(\varphi_n)| < \sqrt{\varepsilon}, \ \forall k \in \mathbb{Z}_+, \ \forall n \ge n_0,$$
або $|c_k(\varphi_n)| < \sqrt{\varepsilon} e^{-\mu_0(2k+1)}$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, $\forall n \ge n_0$. Тоді
$$|\langle f, \varphi_n \rangle| = \Big| \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_k(\varphi_n) \Big| \le \sqrt{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| e^{-\mu_0(2k+1)}.$$
Поклавши в (6) $\mu_1 = \mu_0/2$, прийдемо до нерівності
$$|\langle f, \varphi_n \rangle| \le \sqrt{\varepsilon} c_1 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\mu_0}{2}(2k+1)} = c_2 \sqrt{\varepsilon}, \ \forall n \ge n_0.$$
Звідси випливає, що f – неперервний функціонал на $S_{1/2}^{1/2}$, тобто $f \in (S_{1/2}^{1/2})'$, що й потрібно було довести.

Оскільки $u(t, \cdot) \in S_{1/2}^{1/2} \subset (S_{1/2}^{1/2})'$, то
$$F[u(t, \cdot)] = \{e^{-t(2k+1)} c_k(f), k \in \mathbb{Z}_+\} \in s.$$
Оскільки $|e^{-t(2k+1)} c_k(f)| \le |c_k(f)|$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $f \in (S_{1/2}^{1/2})'$, то
$$\forall \mu > 0 \ \exists c = c(\mu) > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : \ |c_k(f)| \le c e^{\mu(2k+1)}.$$
Звідки й випливає, що $F[u(t, \cdot)] \in s$. Крім того,
$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ \ e^{-t(2k+1)} c_k(f) \to c_k(f) \text{ при } t \to +0,$$
тобто $F[u(t, \cdot)] \to F[f]$ при $t \to +0$ у просторі s. Тоді
$$u(t, \cdot) = F^{-1}[F[u(t, \cdot)]] \to F^{-1}[F[f]] = f, \ t \to +0,$$
у просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$.

Твердження доведено. $\square$

З наслідку 1 випливає, що для рівняння (1) (або (2)) задачу Коші можна ставити так: у множині розв'язків рівняння (1) знайти розв'язок, який задовольняє умову

$$u(t,\cdot)|_{t=0} = f,\ f \in (S_{1/2}^{1/2})' \tag{7}$$

у тому розумінні, що $u(t,\cdot) \to f$ при $t \to +0$ у просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$.

Теорема 2. *Задача Коші* (1), (7) *коректно розв'язна, розв'язок дається формулою*

$$u(t,x) = \langle f_y, K_{t,x,y}\rangle,\ (t,x) \in \Omega,$$

при цьому $u(t,\cdot) \in S_{1/2}^{1/2}$ *при кожному* $t > 0$.

Доведення. Із наведених вище результатів випливає, що обґрунтування вимагає властивість єдиності розв'язку та властивість неперервної залежності розв'язку від початкової умови. Функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли вона зображається формулою (3). Якщо в (3) $f = 0$, то $c_k(f) = 0$ для кожного $k \in \mathbb{Z}_+$ ($c_k(f) = \langle f, h_k\rangle$). Отже, $u(t,x) = 0$ для $(t,x) \in \Omega$. Звідси випливає єдиність розв'язку задачі (1), (7).

Розв'язок $u(t,x)$ задачі Коші (1), (7) неперервно залежить від початкової функції $f \in (S_{1/2}^{1/2})'$ у такому розумінні. Якщо $\{f, f_n, n \geq 1\} \subset (S_{1/2}^{1/2})'$ і $f_n \to f$ при $n \to \infty$ у просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$ (тобто слабко), то $u_n \to u$ при $n \to \infty$ у просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$.

При доведенні наслідку 1 побудовано ізоморфізм F: $(S_{1/2}^{1/2})' \to s$. Тоді F^{-1}: $s \to (S_{1/2}^{1/2})'$. У даному випадку

$$F[u_n] = \{e^{-t(2k+1)}c_k(f_n), k \in \mathbb{Z}_+\}, F[u] = \{e^{-t(2k+1)}c_k(f), k \in \mathbb{Z}_+\},$$

$$F[f_n] = \{c_k(f_n), k \in \mathbb{Z}_+\}, F[f] = \{c_k(f), k \in \mathbb{Z}_+\}.$$

За умовою $c_k(f_n) \to c_k(f)$ при $n \to \infty$ для кожного $k \in \mathbb{Z}_+$. Тоді $e^{-t(2k+1)}c_k(f_n) \to e^{-t(2k+1)}c_k(f)$ при $n \to \infty$ для кожного $k \in \mathbb{Z}_+$, тобто $F[u_n] \to F[u]$ при $n \to \infty$ у просторі s. Звідси вже випливає, що $u_n \to u$ при $n \to \infty$ у просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$.

Твердження доведено. □

Зауваження 1. *Нехай* $n \in \{2, 3, \dots\}$ *– фіксоване, тоді [4]*

$$\Big(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\Big)^n \varphi(x) = \sum_{0 \leq p+q \leq 2n} C_{p,q}^n x^p \varphi^{(q)}(x), x \in \mathbb{R}, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}),$$

при цьому коефіцієнти $C_{p,q}^n$ *задовольняють нерівності*

$$|C_{p,q}^n| \leq 10^n n^{n-\frac{1}{2}(p+q)}.$$

Для рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \sum_{0 \leq p+q \leq 2n} C_{p,q}^n x^p \frac{\partial^q u(t,x)}{\partial x^q},\ (t,x) \in \Omega, \tag{8}$$

правильними є результати, отримані для рівняння (1). *А саме, має місце таке твердження: розв'язком рівняння* (8) *є функція*

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-t(2k+1)^n}c_kh_k(x)=\langle f_y,\tilde{K}_{t,x}(y)\rangle,$$

де $\tilde{K}_{t,x}(y)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}e^{-t(2k+1)^n}h_k(x)h_k(y)$, *при цьому* $f=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kh_k\in(S_{1/2}^{1/2})'$, $\tilde{K}_{t,x}(\cdot)\in S_{1/2}^{1/2}$ *при кожному* $t>0$, $x\in\mathbb{R}$, $u(t,\cdot)\in S_{1/2}^{1/2}$ *при кожному* $t>0$.

Якщо $f=\delta\in(S_{1/2}^{1/2})'$, де δ – дельта-функція Дірака, то розв'язок задачі Коші (1), (7) має вигляд

$$u(t,x)=\langle\delta_y,K_{t,x}(y)\rangle=K_{t,x}(0)=(2\pi)^{-1/2}(\mathrm{sh}(2t))^{-1/2}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\mathrm{cth}(2t)x^2\Big\}.$$

Якщо $\alpha\in(0,+\infty)\setminus\{2,3,\dots\}$, то, внаслідок основної спектральної теореми для самоспряжених операторів, з урахуванням того, що спектр гармонійного осцилятора є суто дискретним ($\sigma(A)=\{2k+1,k\in\mathbb{Z}_+\}$), одержимо

$$A^\alpha\varphi=\int\limits_0^\infty\lambda^\alpha dE_\lambda\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^\alpha c_k(\varphi)h_k,\ \ c_k(\varphi)=(\varphi,h_k)_{L_2(\mathbb{R})},$$

$$\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\varphi)h_k\in\mathcal{D}(A^\alpha)=\Big\{\varphi:\ \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^{2\alpha}|c_k(\varphi)|^2<\infty\Big\}.$$

Розв'язком рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+A^\alpha u(t,x)=0,\quad (t,x)\in\Omega,$$

є функція

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-t(2k+1)^\alpha}c_kh_k\equiv\langle f_y,\Psi_{t,x}(y)\rangle,$$

де

$$f=\sum_{k=0}^{\infty}c_kh_k\in(S_\omega^\omega)',\quad \omega=\begin{cases}1/2, & \alpha\in(1,+\infty)\setminus\{2,3,\dots\},\\ 1/(2\alpha), & \alpha\in(0,1),\end{cases}$$

$\Psi_{t,x}(y)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}e^{-t(2k+1)^\alpha}h_k(x)h_k(y)$, $\Psi_{t,x}(\cdot)\in S_\omega^\omega$ при кожному $t>0$, $x\in\mathbb{R}$, $u(t,\cdot)\in S_\omega^\omega$ при кожному $t>0$, $u(t,\cdot)\to f$ при $t\to+0$ у просторі $(S_\omega^\omega)'$.

Список літератури

[**1**] *Horodets'kyi V. V.* The boundary properties of parabolic equation solutions smooth in layer. – Chernivtsi: Ruta, 1998. – 225 p. (in Ukrainian)

[2] *Horodets'kyi V. V.* Evolution equations in countable-normalized spaces of infinitely differentiable functions. - Chernivtsi: Ruta, 2008. - 400 p. (in Ukrainian)

[3] *Horodets'kyi V. V., Martynyuk O. V.* Parabolic pseudodifferential equations with analytic symbols in S type spaces. - Chernivtsi: Tehnodruk, 2019. - 280 p. (in Ukrainian)

[4] *Horbachuk M.L., Horbachuk V.I.* Boundary value problems for operator differential equations. – Dordrecht (Boston) London: Kluwer, 1991. – 374 p.

[5] *Horodets'kyi V. V.* The initial values sets of smooth solutions for differential-operator parabolic equations. – Chernivtsi: Ruta, 1998. – 219 p. (in Ukrainian)

Надійшло 14.11.2022

Horodets'kyi V.V., Martynyuk O.V. *Properties of the equation of heat conduction with dissipation solutions*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 77–89.

This paper investigates the properties of the solutions of the equation of heat conduction with dissipation, which is associated with a harmonic oscillator - the operator $-d^2/dx^2 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$ (non-negative and self-adjoint in $L_2(\mathbb{R})$). An explicit form of the function is given, which is analogous to the fundamental solution of the Cauchy problem for the heat conduction equation. A formula that describes all infinitely differentiable (with respect to the variable x) solutions of such an equation was found, well-posedness of the Cauchy problem for the heat conduction equation with dissipation with the initial function, which is an element of the space of generalized functions $(S_{1/2}^{1/2})'$, is established. It is established that $(S_{1/2}^{1/2})'$ is the "maximum" space of initial data of the Cauchy problem, for which the solutions are infinite functions differentiable by spatial variable. The main means of research are formal Hermite series, which are identified with linear continuous functionals defined on $S_{1/2}^{1/2}$.