

ОБЕРНЕНА ТЕОРЕМА НАБЛИЖЕННЯ БІГАРМОНІЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ В КРУЗІ

Розглянуто клас функцій, бігармонічних у крузі. Для них отримано загальну обернену теорему наближення, знайдені оцінки модуля гладкості похідних порядку граничного значення. Дослідження ведеться в термінах L_p -модулів гладкості.

We consider a class of biharmonic functions in the unit disc. We obtain a general inverse theorem on the approximation for these functions and find estimates of modulus of smoothness for the order of the boundary value. The investigation is provided in L_p -terms of modulus of smoothness.

1. В статті [1] були отримані обернені теореми наближення бігармонічними функціями в крузі і півплощині. В цих теоремах за заданою швидкістю відхилення бігармонічних функцій від своїх граничних значень встановлюється неперервність граничних значень (відносно відповідної метрики) і оцінюється модуль неперервності другого порядку (модуль гладкості) цього граничного значення. В даній роботі згадані обернені теореми доповнюються вказанням таких властивостей наближення, які забезпечують існування похідних певного порядку граничної функції, і оцінюється модуль гладкості похідної найвищого можливого порядку. Розглядаються класи функцій, бігармонічних у крузі.

Нехай задано бігармонічне рівняння

$$\Delta^2 u = 0. \quad (1)$$

Позначимо через $u_f(\varphi, r) = u(\varphi, r)$ розв'язок рівняння (1) в одиничному крузі, який задовольняє крайові умови

$$u(\varphi, r)|_{r=1} = f(\varphi), \quad \partial u(\varphi, r)/\partial r|_{r=1} = 0. \quad (2)$$

Розв'язок крайової задачі (1)–(2) можна записати у вигляді

$$u_f(\varphi, r) = \frac{(1-r^2)^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi+t) \frac{1-r \cos t}{(1-2r \cos t + r^2)^2} dt. \quad (3)$$

Клас всіх таких функцій позначимо через B_φ .

2. Позначимо через $L_p[-\pi, \pi]$, $1 \leq p \leq \infty$ клас 2π -періодичних функцій $f(\varphi)$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ зі скінченною нормою, що визначається співвідношеннями

$$\|f\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varphi)|^p d\varphi \right)^{\frac{1}{p}},$$

а при $p = \infty$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{-\pi \leq \varphi \leq \pi} |f(\varphi)|.$$

Будемо користуватись означенням і властивостями інтегрального модуля гладкості [2, с. 115].

Теорема. Якщо $f \in L_p[-\pi, \pi]$, $p \geq 1$, $u_f(\varphi, r) \in B_\varphi$ і при деякому фіксованому цілому невід'ємному k виконується нерівність

$$\|u_f(\cdot, r) - f(\cdot)\| \leq A(1-r)^k \omega(1-r), \quad A = \operatorname{const} > 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad (4)$$

де $\omega(t)$, $t > 0$, — функція типу модуля неперервності другого порядку, яка задовольняє при $k \geq 1$ умову Діні

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty, \quad (5)$$

то $f(\varphi)$ майже для всіх $\varphi \in [-\pi, \pi]$ збігається з функцією, яка має абсолютно неперервну похідну $f^{(k-1)}(\varphi)$ і похідну

$f^{(k)}(\varphi) \in L_p[-\pi, \pi]$ (при $p = \infty$ неперервну),
і для $f^{(k)}(\varphi)$ інтегральний модуль гладкості
задовольняє співвідношення

$$\omega_2(f^{(k)}; 1-r) \leq \begin{cases} A_1(1-r)^2 \int_{1-r}^1 \frac{\omega(u)}{u^3} du, & k=0, \\ A_2 \left[\int_0^{1-r} \frac{\omega(u)}{u} du + (1-r)^2 \int_{1-r}^1 \frac{\omega(u)}{u^3} du \right], & k \geq 1, \end{cases} \quad (6)$$

$1/2 \leq r < 1$, де A_1, A_2 — додатні сталі, що не залежать від r .

Зауваження. У випадку $k=0$ теорема отримана в [1].

При доведенні теореми будуть використані деякі допоміжні твердження.

Лема 1. Якщо $f \in L_p[-\pi, \pi]$, $p \geq 1$, і $u_f(\varphi, r) \in B_\varphi$, то для фіксованих натуральних k виконується нерівність

$$\left\| \frac{\partial^k u_f(\varphi, r)}{\partial \varphi^k} \right\| \leq M \frac{\|f\|}{(1-r)^k}, \quad 0 \leq r < 1, \quad (7)$$

де $M > 0$ — стала, що не залежить від r .

Зауваження. У випадку $k=2$ лема була встановлена в [1].

Доведення лема 1. Використовуючи зображення (3) розв'язку $u_f(\varphi, r)$ крайової задачі (1), (2) і узагальнену нерівність Міньковського [2, с. 601], приходимо до нерівності

$$\left\| \frac{\partial^k u_f(\varphi, r)}{\partial \varphi^k} \right\| \leq \frac{\|f\|}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(\frac{(1-r^2)^2(1-r \cos t)}{(1-2r \cos t + r^2)^2} \right) \right| dt. \quad (8)$$

Оцінимо інтеграл в правій частині нерівності (8). Для цього бігармонічне ядро Пуассона подамо у вигляді

$$\frac{(1-r^2)^2(1-r \cos t)}{(1-2r \cos t + r^2)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{(1-r^2)^2}{1-2r \cos t + r^2} + \frac{(1-r^2)^3}{(1-2r \cos t + r^2)^2} \right] \quad (9)$$

і введемо позначення

$$P_1 := \frac{(1-r^2)^2}{1-2r \cos t + r^2},$$

$$P_2 := \frac{(1-r^2)^3}{(1-2r \cos t + r^2)^2}. \quad (10)$$

Тоді, враховуючи, що $P_1 = (1-r^2) \times [-1 + 1/(1-re^{it}) + 1/(1-re^{-it})]$, диференціюванням по t отримуємо формулу для похідної порядку k ($k=1, 2, \dots$):

$$\frac{\partial^k P_1}{\partial t^k} = (1-r^2) \cdot r \cdot (i)^k \times \left[\frac{e^{it} Q_{k-1}^{(1)}(r, e^{it})}{(1-re^{it})^{k+1}} + \frac{e^{-it} Q_{k-1}^{(2)}(r, e^{-it})}{(1-re^{-it})^{k+1}} \right], \quad (11)$$

де $Q_{k-1}^{(1)}(r, e^{it})$, $Q_{k-1}^{(2)}(r, e^{-it})$ — многочлени степеня $k-1$ по кожному із вказаних аргументів. Ці многочлени обмежені в замкненому крузі $0 \leq r \leq 1$ константою, що залежить лише від степені многочлена. Обчислимо модулі двох доданків в рівності (11). Маємо

$$\begin{aligned} & \left| \frac{e^{it} Q_{k-1}^{(1)}(r, e^{it})}{(1-re^{it})^{k+1}} \right|^2 = \\ &= \frac{Q_{k-1}^{(1)}(r, e^{it})}{(1-re^{it})^{k+1}} \overline{\frac{Q_{k-1}^{(1)}(r, e^{it})}{(1-re^{-it})^{k+1}}} = \\ &= \frac{|Q_{k-1}^{(1)}(r, e^{it})|^2}{(1-2r \cos t + r^2)^{k+1}}, \end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned} & \left| \frac{e^{it} Q_{k-1}^{(1)}(r, e^{it})}{(1-re^{it})^{k+1}} \right| = \\ &= \frac{|Q_{k-1}^{(1)}(r, e^{it})|}{(1-2r \cos t + r^2)^{(k+1)/2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогічно встановлюється рівність

$$\begin{aligned} & \left| \frac{e^{-it} Q_{k-1}^{(2)}(r, e^{-it})}{(1-re^{-it})^{k+1}} \right| = \\ &= \frac{|Q_{k-1}^{(2)}(r, e^{-it})|}{(1-2r \cos t + r^2)^{(k+1)/2}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Із (11)–(13) отримуємо оцінку

$$\left| \frac{\partial^k P_1}{\partial t^k} \right| \leq \frac{(1-r^2)M_1}{(1-2r \cos t + r^2)^{(k+1)/2}},$$

де $M_1 > 0$ — стала, що залежить лише від k . Використовуючи цю оцінку, відому тотальність

$$\frac{1-r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{(1-2r \cos t + r^2)^{(k+1)/2}} = 1$$

і справедливу для довільних $t \in [-\pi, \pi]$ нерівність

$$1 - 2r \cos t + r^2 \geq (1-r)^2,$$

знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial^k P_1}{\partial t^k} \right| dt &\leq M_1 \frac{1-r^2}{2\pi} \times \\ &\times \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{(1-2r \cos t + r^2)(1-2r \cos t + r^2)^{(k-1)/2}} \leq \\ &\leq \frac{M_1}{(1-r)^{k-1}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Оскільки

$$\begin{aligned} P_2 &:= \frac{(1-r^2)^3}{(1-re^{it})^2(1-re^{-it})^2} = \\ &= (1-r^2) \left[-1 + \frac{1}{1-re^{it}} + \frac{1}{1-re^{-it}} \right]^2 = \\ &= \frac{1-r^2}{(1-re^{it})^2} + \frac{1-r^2}{(1-re^{-it})^2} + \\ &+ (1-r^2) \left[1 - \frac{2}{1-re^{it}} - \frac{2}{1-re^{-it}} \right] + \\ &+ 2 \left[-1 + \frac{1}{1-re^{it}} + \frac{1}{1-re^{-it}} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

то достатньо розглянути модулі похідних порядку $k \in \mathbb{N}$ кожного із доданків в правій частині (15). Введемо позначення

$$\begin{aligned} P_2^{(1)} &:= \frac{1-r^2}{(1-re^{it})^2}, \quad P_2^{(2)} := \frac{1-r^2}{(1-re^{-it})^2}, \\ P_2^{(3)} &:= (1-r^2) \left[1 - \frac{2}{1-re^{it}} - \frac{2}{1-re^{-it}} \right], \\ P_2^{(4)} &:= 2 \left[-1 + \frac{1}{1-re^{it}} + \frac{1}{1-re^{-it}} \right]. \end{aligned}$$

Аналогічно до оцінки (14) отримуємо наступні нерівності:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial^k P_2^{(3)}}{\partial t^k} \right| dt \leq \frac{M_2}{(1-r)^{k-1}}, \quad (16)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial^k P_2^{(4)}}{\partial t^k} \right| dt \leq \frac{M_3}{(1-r)^k}, \quad (17)$$

де M_2, M_3 — додатні сталі, що не залежать від r .

Для $P_2^{(1)}, P_2^{(2)}$ аналогічно до доведення рівності (12) отримуємо рівності

$$\left| \frac{\partial^k P_2^{(1)}}{\partial t^k} \right| = \frac{(1-r^2)|R_2^{(1)}(r, e^{it})|}{(1-2r \cos t + r^2)^{\frac{k}{2}+1}}, \quad (18)$$

$$\left| \frac{\partial^k P_2^{(2)}}{\partial t^k} \right| = \frac{(1-r^2)|R_2^{(2)}(r, e^{-it})|}{(1-2r \cos t + r^2)^{\frac{k}{2}+1}}, \quad (19)$$

де $R_2^{(1)}(r, e^{it}), R_2^{(2)}(r, e^{-it})$ — многочлени вказаних аргументів, обмежені в замкненому крузі $0 \leq r \leq 1$ константою, що залежить лише від k . Ці рівності дозволяють отримати оцінки

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial^k P_2^{(1)}}{\partial t^k} \right| dt \leq \frac{M_4}{(1-r)^k}, \quad (20)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial^k P_2^{(2)}}{\partial t^k} \right| dt \leq \frac{M_5}{(1-r)^k}, \quad (21)$$

де M_4, M_5 — додатні сталі, що не залежать від r .

Використовуючи тепер оцінку (8), рівності (9) і (15), а також оцінки (14), (16), (17), (20), (21) інтегралів від окремих доданків, отримуємо оцінку (7). Лему 1 доведено.

Для фіксованого $r_1, 0 < r_1 < 1$, позначимо через $u_{uf(\cdot, r_1)}(\varphi, r)$ розв'язок рівняння (1), що задовольняє крайові умови

$$u(\varphi, r)|_{r=1} = u_f(\varphi, r_1),$$

$$\partial u(\varphi, r)/\partial r|_{r=1} = 0.$$

Аналогічно введемо позначення $u_{uf(\cdot, r_2)}(\varphi, r), 0 < r_2 < 1$.

Лема 2. Якщо $f \in L_p[-\pi, \pi]$, $p \geq 1$, $u_f(\varphi, r) \in B_\varphi$, то для довільних r_1, r_2 , $(0 < r_1, r_2 < 1)$ справедлива рівність

$$u_{u_f(\cdot, r_1)}(\varphi, r_2) = u_{u_f(\cdot, r_2)}(\varphi, r_1), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (22)$$

Доведення леми 2. Виходячи з (3) і використовуючи теорему Фубіні, знаходимо

$$u_{u_f(\cdot, r_1)}(\varphi, r_2) = \frac{(1-r_1^2)^2(1-r_2^2)^2}{4\pi^2} \times \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \times \\ \times \int_{-\pi}^{\pi} \frac{[1-r_1 \cos(\tau-t)]}{(1-2r_1 \cos(\tau-t)+r_1^2)^2} \times \\ \times \frac{[1-r_2 \cos(t-\varphi)]}{(1-2r_2 \cos(t-\varphi)+r_2^2)^2} dt d\tau, \quad (23)$$

$$u_{u_f(\cdot, r_2)}(\varphi, r_1) = \frac{(1-r_1^2)^2(1-r_2^2)^2}{4\pi^2} \times \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \times \\ \times \int_{-\pi}^{\pi} \frac{[1-r_2 \cos(\tau-t)]}{(1-2r_2 \cos(\tau-t)+r_2^2)^2} \times \\ \times \frac{[1-r_1 \cos(t-\varphi)]}{(1-2r_1 \cos(t-\varphi)+r_1^2)^2} dt d\tau. \quad (24)$$

Розглянемо різницю внутрішніх інтегралів (по t) в правих частинах рівностей (23) і (24). Враховуючи 2π -періодичність підінтегральної функції, після заміни $t = u + (\tau + \varphi)/2$ (τ і φ для цього інтеграла являються параметрами) і позначення $v = (\tau - \varphi)/2$, отримаємо для вказаної різниці

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(u, \varphi, \tau) du, \quad (25)$$

де

$$\Phi(u, \varphi, \tau) := \frac{[1-r_1 \cos(v-u)]}{(1-2r_1 \cos(v-u)+r_1^2)^2} \times \\ \times \frac{[1-r_2 \cos(v+u)]}{(1-2r_2 \cos(v+u)+r_2^2)^2} - \\ - \frac{[1-r_2 \cos(v-u)]}{(1-2r_2 \cos(v-u)+r_2^2)^2} \times$$

$$\times \frac{[1-r_1 \cos(v+u)]}{(1-2r_1 \cos(v+u)+r_1^2)^2}.$$

Оскільки $\Phi(-u, \varphi, \tau) = -\Phi(u, \varphi, \tau)$, то інтеграл (25) рівний нулю. Лему 2 доведено.

Наслідок. В умовах леми 1 справедлива тотожність

$$u_{f-u_f(\cdot, r_1)}(\varphi, r_2) - u_{f-u_f(\cdot, r_2)}(\varphi, r_1) = \\ = u_f(\varphi, r_2) - u_f(\varphi, r_1). \quad (26)$$

Доведення теореми. Нехай $k \geq 1$. Доведемо, що майже для всіх $\varphi \in [-\pi, \pi]$ для функції $f(\varphi)$ має місце зображення

$$f(\varphi) = u_f(\varphi, 1/2) + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \left[u_f\left(\varphi, 1 - \frac{1}{2^{j+1}}\right) - u_f\left(\varphi, 1 - \frac{1}{2^j}\right) \right]. \quad (27)$$

Для цього розглянемо очевидну рівність

$$f(\varphi) = u_f(\varphi, 1/2) + \\ + \sum_{j=1}^{N-1} \left[u_f\left(\varphi, 1 - \frac{1}{2^{j+1}}\right) - u_f\left(\varphi, 1 - \frac{1}{2^j}\right) \right] + \\ + \left[f(\varphi) - u_f\left(\varphi, 1 - \frac{1}{2^N}\right) \right] = \\ = S_N(f; \varphi) + \left[f(\varphi) - u_f\left(\varphi, 1 - \frac{1}{2^N}\right) \right], \quad (28)$$

де $S_N(f; \varphi)$ — частинна сума ряду (27). Із (28) і умови (4) отримуємо

$$\|f(\cdot) - S_N(f; \cdot)\| = \|f(\cdot) - u_f(\cdot, 1 - \frac{1}{2^N})\| \leq \\ \leq A\left(\frac{1}{2^N}\right)^k \omega\left(\frac{1}{2^N}\right) \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

Це означає, що послідовність $S_N(f; \varphi)$ збігається в середньому з показником $p \geq 1$ до функції $f(\varphi)$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Тоді існує підпослідовність $S_{N_m}(f; \varphi)$, що збігається до $f(\varphi)$ майже скрізь на $[-\pi, \pi]$. Цим обґрунтовано рівність (27).

Розглянемо ряд

$$u_f^{(k)}(\varphi, 1/2) + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \left[u_f^{(k)}\left(\varphi, 1 - \frac{1}{2^{j+1}}\right) - u_f^{(k)}\left(\varphi, 1 - \frac{1}{2^j}\right) \right], \quad (29)$$

який складений із похідних порядку $k(k \geq 1)$ членів ряду (27), і дослідимо його збіжність на $[-\pi, \pi]$. Користуючись рівністю (26), лемою 1 і умовою (4), отримуємо

$$\begin{aligned} & \left\| u_f^{(k)}\left(\cdot, 1 - \frac{1}{2^{j+1}}\right) - u_f^{(k)}\left(\cdot, 1 - \frac{1}{2^j}\right) \right\| \leq \\ & \leq \left\| u_{f-u_f(\cdot, 1-1/2^j)}^{(k)}\left(\cdot, 1 - \frac{1}{2^{j+1}}\right) \right\| + \\ & + \left\| u_{f-u_f(\cdot, 1-1/2^{j+1})}^{(k)}\left(\cdot, 1 - \frac{1}{2^j}\right) \right\| \leq \\ & \leq M \left(\frac{\|f - u_f(\cdot, 1 - 1/2^j)\|}{(1/2^{j+1})^k} + \right. \\ & \left. + \frac{\|f - u_f(\cdot, 1 - 1/2^{j+1})\|}{(1/2^j)^k} \right) \leq \\ & \leq MA \left(\frac{(1/2^j)^k \omega(1/2^j)}{(1/2^{j+1})^k} + \frac{(1/2^{j+1})^k \omega(1/2^{j+1})}{(1/2^j)^k} \right) \leq \\ & \leq M(k) \omega(1/2^j), \end{aligned} \quad (30)$$

де $M(k) > 0$ — стала, що залежить від k і не залежить від j . Оскільки при всіх $j = 1, 2, \dots$ вірна оцінка

$$\int_{2^{-j}}^{2^{-(j-1)}} \frac{\omega(u)}{u} du \geq \frac{1}{2} \omega\left(\frac{1}{2^j}\right),$$

то з (30) знаходимо

$$\begin{aligned} & \left\| u_f^{(k)}\left(\cdot, 1 - \frac{1}{2^{j+1}}\right) - u_f^{(k)}\left(\cdot, 1 - \frac{1}{2^j}\right) \right\| \leq \\ & \leq 2M(k) \int_{2^{-j}}^{2^{-(j-1)}} \frac{\omega(u)}{u} du. \end{aligned} \quad (31)$$

Крім того, згідно з умовою (5) маємо

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^{-j}}^{2^{-(j-1)}} \frac{\omega(u)}{u} du = \int_0^1 \frac{\omega(u)}{u} du < \infty. \quad (32)$$

Із (31) і (32) випливає, що ряд (29) збігається на $[-\pi, \pi]$ в середньому з показником $p \geq 1$. Проводячи далі міркування, які майже повністю збігаються з доведенням теореми 6.1.3 А.П. Тімана [2, с. 347], робимо висновок, що

функція $f(\varphi)$ майже скрізь дорівнює функції, яка має абсолютно неперервну похідну $f^{(k-1)}(\varphi)$ на $[-\pi, \pi]$ і похідну $f^{(k)} \in L_p[-\pi, \pi]$, яка є майже для всіх $\varphi \in [-\pi, \pi]$ сумою ряду (29):

$$\begin{aligned} f^{(k)}(\varphi) &= u_f^{(k)}(\varphi, 1/2) + \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \left[u_f^{(k)}\left(\varphi, 1 - \frac{1}{2^{j+1}}\right) - u_f^{(k)}\left(\varphi, 1 - \frac{1}{2^j}\right) \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Оцінимо інтегральний модуль гладкості функції $f^{(k)}(\varphi)$. Для цього використаємо вірну майже для всіх $\varphi \in [-\pi, \pi]$ рівність

$$\begin{aligned} f^{(k)}(\varphi) &= u_f^{(k)}(\varphi, 1/2^j) + \\ &+ \sum_{m=j+1}^{\infty} \left[u_f^{(k)}\left(\varphi, 1 - \frac{1}{2^m}\right) - u_f^{(k)}\left(\varphi, 1 - \frac{1}{2^{m-1}}\right) \right], \end{aligned}$$

доведення якої проводиться аналогічно доведенню рівності (33). Використовуючи оцінку (31), отримуємо

$$\begin{aligned} & \|f^{(k)}(\cdot) - u_f^{(k)}(\cdot, 1 - 1/2^j)\| \leq \\ & \leq \sum_{m=j+1}^{\infty} \left\| u_f^{(k)}\left(\varphi, 1 - \frac{1}{2^m}\right) - u_f^{(k)}\left(\varphi, 1 - \frac{1}{2^{m-1}}\right) \right\| \leq \\ & \leq 2M(k) \sum_{m=j+1}^{\infty} \int_{2^{-(m-1)}}^{2^{-(m-2)}} \frac{\omega(u)}{u} du = \\ & = 2M(k) \int_0^{2^{-(j-1)}} \frac{\omega(u)}{u} du \leq \\ & \leq 8M(k) \int_0^{2^{-j}} \frac{\omega(u)}{u} du. \end{aligned} \quad (34)$$

В [3, с. 236] було показано, що функція $\Omega(t) := \int_0^t \frac{\omega(u)}{u} du$ має характеристичні властивості модуля неперервності другого порядку. В такому випадку нерівність (34) дозволяє вважати, що задано відхилення $f^{(k)}(\varphi)$ від оператора $u_f^{(k)}(\cdot, 1/2^j)$ в L_p -метриці ($p \geq 1$), а тому на основі випадку

$k = 0$ (див. теорему 2 роботи [1]) робимо висновки про справедливість нерівності

$$\omega_2(f^{(k)}; 1-r) \leq C(1-r)^2 \int_{1-r}^1 \frac{\Omega(u)}{u^3} du,$$

де $C > 0$ — деяка стала, що не залежить від $(1-r)$. Перетворення правої частини останньої нерівності (див. [3]) приводить до оцінки (6) для випадку $k \geq 1$. Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Горбайчук В.И. Обратные теоремы приближения бигармоническими функциями // Математическая физика. — 1976. — Вып. 19. — С. 73–78.
2. Тиман А.Ф. Теория приближений функций действительного переменного. — М.: Физматгиз, 1960. — 624 с.
3. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1977. — 508 с.