УДК 517.51

©2013 р. В. К. Маслюченко, О. І. Філіпчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Буковинський державний фінансово-економічний університет

# ІНДУКТИВНІ ГРАНИЦІ, ПОРОДЖЕНІ ПАРОЮ НОРМОВАНИХ ПРОСТОРІВ

Введені індуктивні границі $[E, F]$, породжені парою нормованих просторів, таких, що тотожне вкладення $F \hookrightarrow E$ неперервне, і досліджено коли індуктивна границя $[E, F]$ буде не майже регулярною чи строгою та коли $[E, F]$ буде сильно $\sigma$-метризовним простором.

We introduce inductive limits $[E, F]$ generated by a pair of normed spaces, such that the identity embedding $F \hookrightarrow E$ is continuous. We also investigate in what cases an inductive limit $[E, F]$ is not either almost regular or strict and in what cases $[E, F]$ is a strongly $\sigma$-metrizable space.

**1. Вступ.** За останні 25 років з'явилося багато робіт (див. [1-5] і вказану там літературу), в яких досліджувалася множина $C(f)$ точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to Z$ та їх аналогів зі значеннями в просторах, близьких до метризовних, зокрема, в $\sigma$-метризовних і сильно $\sigma$-метризовних просторах, у просторах Мура, вичерпних та напіввичерпних просторах, тощо.

Ці дослідження розпочалися в працях [6,7], де вивчалися нарізно неперервні відображення зі значеннями в строгих індуктивних границях. Основним інструментом у доведеннях там виступала теорема Д'єдонне-Шварца [8, с. 54] про те, що за певних умов кожна обмежена множина в індуктивній границі обов'язково міститься у деякому дограничному просторі і обмежена в ньому. Такі індуктивні границі називають регулярними. Між тим, у праці [9] було введено один клас індуктивних границь $Z$, побудованих на основі пари $(E, F)$ таких нормованих просторів, що $F$ – це лінійний підпростір $E$ і тотожне вкладення $F \hookrightarrow E$ неперервне, які ми тут позначатимемо символом $[E, F]$, і вказано певні умови на $E$ і $F$, щоб індуктивна границя $[E, F]$ була нерегулярною. Оскільки нарізно неперервні відображення зі значеннями в нерегулярних індуктивних границях досі не вивчалися, то постає природне питання: з'ясувати, за яких умов індуктивні границі $[E, F]$ будуть належати до тих чи інших класів просторів, близьких до метризовних, і якими можуть бути множини $C(f)$ у нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to [E, F]$.

Тут ми подамо перші результати, отримані в цьому напрямку, які були анонсовані в тезах [10].

**2. Основні означення.** Нагадаємо, що множина $A$ в топологічному векторному просторі (коротко – ТВП) $X$ називається *обмеженою* [11, с. 45], якщо вона поглинається будь-яким околом нуля в $X$. Відомо [11, тв. 2, с. 45], що множина $A$ в ТВП $X$ буде обмеженою тоді і тільки тоді, коли для кожної послідовності точок $x_n$ з $A$ і довільної нескінченно малої послідовності скалярів $\lambda_n$ послідовність точок $\lambda_n x_n$ прямує до нуля в $X$.

Легко перевірити, що образ $f(A)$ обмеженої в $X$ множини $A$ при кожному лінійному неперервному відображенні $f : X \to Y$ залишається обмеженою множиною у просторі $Y$, а також, що замикання $\overline{A}$ обмеженої множини в просторі $X$ буде знову обмеженою в $X$ множиною.

Розглянемо зростаючу послідовність лінійних підпросторів $X_n$ простору $X$ над полем $\mathbb{K}$ дійсних або комплексних чисел, таку, що $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. Припустимо, що на кожному просторі $X_n$ задано локально опуклу топологію $\mathcal{T}_n$, причому всі тотожні вкладення $(X_n, \mathcal{T}_n) \hookrightarrow (X_{n+1}, \mathcal{T}_{n+1})$ неперервні. Нагадаємо [8, с. 46], що локально опукла топологія $\mathcal{T}$ на просторі $X$ називається *топологією індуктивної границі* послідовності локально опуклих просторів $(X_n, \mathcal{T}_n)$, якщо $\mathcal{T}$ – це індуктивна топологія на $X$, що породжена послідовністю тотожних вкладень $j_n : X_n \hookrightarrow X$, тобто найсильніша з локально опуклих топологій $\mathcal{S}$ на $X$, для яких усі вкладення $j_n : (X_n, \mathcal{T}_n) \hookrightarrow (X, \mathcal{S})$ неперервні. Локально опуклий простір $(X, \mathcal{T})$ називається *індуктивною границею* послідовності локально опуклих просторів $(X_n, \mathcal{T}_n)$, коротко:

$$(X, \mathcal{T}) = \operatorname{lim\,ind}(X_n, \mathcal{T}_n) \text{ або } X = \operatorname{lim\,ind} X_n.$$

Індуктивна границя $X = \operatorname{lim\,ind} X_n$ називається *строгою*, якщо для кожного $n$ звуження $\mathcal{T}_{n+1}|_{X_n}$ топології $\mathcal{T}_{n+1}$ на простір $X_n$ збігається з топологією $\mathcal{T}_n$, тобто всі тотожні вкладення $g_n : (X_n, \mathcal{T}_n) \hookrightarrow (X_{n+1}, \mathcal{T}_{n+1})$ є ізоморфними. Нагадаємо добре відомий результат, що належить Ж. Д'єдонне і Л. Шварцу: *у строгій індуктивній границі $X = \operatorname{lim\,ind} X_n$, для якої кожний простір $X_n$ замкнений в $X_{n+1}$, множина $B$ буде обмеженою тоді і тільки тоді, коли вона міститься у деякому допграничному просторі $X_n$ і є там обмеженою.* Індуктивні границі, що мають властивість, висловлену у теоремі Д'єдонне-Шварца, називають *регулярними*. Регулярні індуктивні границі вивчалися в серії робіт багатьох авторів [12-20]. Індуктивну границю $X = \operatorname{lim\,ind} X_n$ ми назвемо *майже регулярною*, якщо кожна обмежена в $X$ множина міститься в деякому допграничному просторі $X_n$. Зрозуміло, що кожна регулярна індуктивна границя є і майже регулярною.

**Теорема 1.** *Нехай $X = \operatorname{lim\,ind} X_n$ – індуктивна границя, яка не є майже регулярною. Тоді існує така збіжна до нуля в $X$ послідовність точок $a_m$ з $X$, що множина $A = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ не міститься в жодному допграничному просторі $X_n$.*

***Доведення.*** За умовою існує обмежена в $X$ множина $B$, така, що $B \not\subseteq X_n$ для кожного $n$. Тоді для кожного $n$ існує точка $x_n \in B \setminus X_n$. Візьмемо довільну послідовність скалярів $\lambda_n \neq 0$, таку, що $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$ (наприклад, $\lambda_n = \frac{1}{n}$), і покладемо $a_n = \lambda_n x_n$. З обмеженості множини $B$ випливає, що $a_n \to 0$ в $X$. Разом з тим, $a_n \notin X_n$ для кожного $n$, бо $x_n = \frac{1}{\lambda_n} a_n \notin X_n$ за побудовою. Тому $A = \{a_m : m \in \mathbb{N}\} \not\subseteq X_n$ для кожного $n$. $\square$

**3. Індуктивні границі** $[E, F]$**.** Нехай $E$ і $F$ – нормовані простори над полем $\mathbb{K}$ з нормами $\|\cdot\|_E$ і $\|\cdot\|_F$ відповідно, причому $F$ – це лінійний підпростір $E$ і тотожне вкладення $F \hookrightarrow E$ неперервне, тобто існує така константа $\gamma > 0$, що $\|z\|_E \leq \gamma \|z\|_F$ для кожного $z \in F$. Для кожного номера $n$ розглянемо нескінченний добуток

$$\widetilde{Z}_n = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ разів}} \times F \times \ldots,$$

який є векторним простором над $\mathbb{K}$, і його лінійний підпростір

$$Z_n = \{z = (z_k)_{k=1}^{\infty} \in \widetilde{Z}_n : \|z\|_n = \sup\{\|z_1\|_E, \ldots, \|z_n\|_E, \|z_{n+1}\|_F, \ldots\} < +\infty\}.$$

Легко перевірити, що функція $\|\cdot\|_n$ – це норма на $Z_n$, $Z_n \subseteq Z_{n+1}$ і $\|z\|_{n+1} \leq \gamma_0 \|z\|_n$, де $\gamma_0 = \max\{\gamma, 1\}$, отже, тотожні вкладення $Z_n \hookrightarrow Z_{n+1}$ неперервні. Позначимо через $\mathcal{T}_n$ локально опуклу топологію на $Z_n$, що породжена нормою $\|\cdot\|_n$. Нехай $Z = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$. Оскільки всі $Z_n$ – це лінійні підпростори векторного простору $E^{\mathbb{N}}$, причому $Z_n \subseteq Z_{n+1}$ для кожного $n$, то і $Z$ буде лінійним підпростором $E^{\mathbb{N}}$, а простори $Z_n$ – лінійними підпросторами простору $Z$. Індуктивну границю

$$(Z, \mathcal{T}) = \operatorname{lim\,ind}(Z_n, \mathcal{T}_n)$$

ми будемо позначати символом $[E, F]$.

Почнемо з встановлення деяких достатніх умов, щоб введена індуктивна границя не була майже регулярною.

**Теорема 2.** *Нехай існує елемент $a \in E$, який належить до замикання $[B]_E$ одиничної кулі $B = \{b \in F : \|b\|_F \leq 1\}$ простору $F$ у просторі $E$, і не належить до $F$. Тоді множина $A = \{z^{(m)} : m \in \mathbb{N}\}$,* *де* $z^{(m)} = (\underbrace{0,...,0}_{m \text{ разів}}, a, 0, ...)$ *буде обмеженою в просторі* $Z = [E, F]$, $A \not\subseteq Z_n$ *для кожного* $n$, *послідовність* $\frac{1}{m}z^{(m)} \to 0$ *в* $Z$ *і* $\{\frac{1}{m}z^{(m)} : m \in \mathbb{N}\} \not\subseteq Z_n$ *для кожного* $n$.

***Доведення.*** Оскільки $a \in [B]_E$, то існує така послідовність елементів $a_k \in B$, що $a_k \to a$ в $E$. Розглянемо елемент

$$z^{(m,k)} = (\underbrace{0,...,0}_{m}, a_k, 0, ...)$$

і множину

$$A_0 = \{z^{(m,k)} : (m,k) \in \mathbb{N}^2\}.$$

Зрозуміло, що $A_0 \subseteq Z_1$, адже $a_k \in F$ для кожного $k$. При цьому $\|z^{(m,k)}\|_1 = \|a_k\|_F \le 1$ для довільних $m$ і $k$, бо $a_k \in B$ для кожного $k$. Отже, множина $A_0$ лежить і обмежена у першому просторі $Z_1$. Оскільки тотожне вкладення $j_1 : Z_1 \hookrightarrow Z$ лінійне і неперервне, то множина $A_0 = j_1(A_0)$ буде обмеженою і в просторі $Z$.

Покажемо, що $A \subseteq \overline{A}_0$, де замикання береться у просторі $Z$. Для цього досить з'ясувати, що $z^{(m,k)} \to z^{(m)}$ в $Z$ при $k \to \infty$ для кожного $m$. Зауважимо, що $z^{(m,k)}$ і $z^{(m)}$ лежать у просторі $Z_{m+1}$, причому

$$\|z^{(m,k)} - z^{(m)}\|_{m+1} = \|a_k - a\|_E \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Тому $z^{(m,k)} \to z^{(m)}$ у просторі $Z_{m+1}$, а значить, і у просторі $Z$, оскільки вкладення $j_{m+1} : Z_{m+1} \hookrightarrow Z$ неперервне.

Оскільки замикання обмеженої множини залишається обмеженою множиною, то множина $\overline{A}_0$ буде обмеженою в $Z$, а з нею і її підмножина $A$.

Ясно, що $z^{(m)} \in A \setminus Z_m$ при $m = 1, 2, ...$, адже $a \notin F$, тому $A \not\subseteq Z_n$ для кожного $n$.

Співвідношення $\frac{1}{m}z^{(m)} \to 0$ випливає з обмеженості множини $A$. Зрозуміло, що і $\frac{1}{m}z^{(m)} \not\in Z_m$ для кожного $m = 1, 2, ...$, отже, $\{\frac{1}{m}z^{(m)} : m \in \mathbb{N}\} \not\subseteq Z_n$ для кожного $n$.□

**4. Приклади просторів $E$ і $F$, для яких $[B]_E \setminus F \neq \emptyset$.** Почнемо з першого прикладу таких просторів, який належить Б.М. Макарову [15]. Наша конструкція з попереднього пункту узагальнює його побудови.

**Приклад 1.** Нехай $F = c$ – банахів простір збіжних числових послідовностей $x = (\xi_k)_{k=1}^\infty$ з нормою $\|x\|_F = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k| = \|x\|_\infty$ і $c_0$ – банахів простір усіх нескінченно малих послідовностей скалярів з тією ж нормою. Символом $xy$ ми позначаємо покоординатний добуток $(\xi_k \eta_k)_{k=1}^\infty$ послідовностей $x = (\xi_k)_{k=1}^\infty$ і $y = (\eta_k)_{k=1}^\infty$ з $\mathbb{K}^\mathbb{N}$. Для довільної послідовності $a = (\alpha_k)_{k=1}^\infty$ розглянемо простір $c_0$ з вагою $a$:

$$c_0(a) = \{x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N} : ax \in c_0\}.$$

Якщо $\alpha_k \neq 0$ для кожного $k$, то функція $\|x\|_E = \|ax\|_\infty$ буде нормою на просторі $E = c_0(a)$, нормований простір $(E, \|\cdot\|_E)$ буде банаховим, а відображення $f : E \to c_0$, $f(x) = ax$ – лінійною ізометрією.

Коли $a \in c_0$, то $ax \in c_0$ для кожного $x \in F$, причому

$$\|x\|_E = \|ax\|_\infty \le \|a\|_\infty \|x\|_\infty = \|a\|_\infty \|x\|_F,$$

отже, $F \subseteq E$ і тотожне вкладення $F \hookrightarrow E$ неперервне.

Припустимо, що $a \in c_0$ і покажемо, що для пари $(E, F)$ будемо мати, що $[B]_E \setminus F \neq \emptyset$, де $B = \{x \in F : \|x\|_F \le 1\}$.

Розглянемо точку $b = (1, 0, 1, 0, ...)$ і послідовність точок

$$b_n = (\underbrace{1, 0, 1, 0, ..., 1, 0}_{2n \text{ разів}}, 0, 0, ...).$$

Оскільки $\|b_n\|_F = \|b_n\|_\infty = 1$, то $b_n \in B$ для кожного $n$. Послідовність $ab = (\alpha_1, 0, \alpha_3, 0, ..., \alpha_{2n-1}, 0, ...)$, очевидно, належить до $c_0$, отже, $b \in c_0(a)$. При цьому

$$\|b - b_n\|_E = \|a(b - b_n)\|_\infty = \sup_{k \ge n} |\alpha_{2k+1}| \to 0$$

при $n \to \infty$, отже, $b_n \to b$ в $E$, а значить, $b \in [B]_E$. При цьому ясно, що $b \notin F$, адже послідовність 1,0,1,0,... розбіжна. Таким чином, $b \in [B]_E \setminus F$.

Зауважимо, що коли $x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in [B]_E \cap F$, то існує така послідовність точок $x_n = (\xi_{n,k})_{k=1}^\infty$ з $B$, що $x_n \to x$ в $E$. Тоді і $\xi_{n,k} \to \xi_k$ при $n \to \infty$ для кожного $k$, адже $|\xi_{n,k} - \xi_k| \le \frac{1}{|\alpha_k|}\|x_n - x\|_E$. Оскільки $|\xi_{n,k}| \le 1$

для довільних $n$ і $k$, то і $|\xi_k| \leq 1$ для кожного $k$, отже, $\|x\|_\infty \leq 1$. Але $x \in F$, тому $x \in B$. Ми показали, що у цьому випадку $[B]_E \setminus F = [B]_E \setminus B$. У прикладі Макарова $\alpha_k = \frac{1}{k}$ для кожного $k$.

**Приклад 2.** Нехай $E$ – це банахів простір $l_p$, $1 \leq p < \infty$, всіх сумовних з $p$-тим степенем послідовностей $x = (\xi_k)_{k=1}^\infty$ скалярів з нормою

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} = \|x\|_E,$$

а $F$ – це простір $\mathbb{K}^\infty$ всіх фінітних послідовностей скалярів з нормою $\|\cdot\|_F$, індукованою з $E$, тобто $\|x\|_F = \|x\|_E$ для кожного $x \in F$. Точка $a = (\frac{1}{2^k})_{k=1}^\infty$ належить до $E = l_p$ для кожного $p \geq 1$. Для точок $a_n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{2^n}, 0, 0, ...)$ будемо мати, що $a_n \in B = \{x \in F : \|x\|_F \leq 1\}$, адже $a_n \in F$ і

$$\|a_n\|_F = \|a_n\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{kp}}\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2^p}}\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{(2^p - 1)^{1/p}} \leq \frac{1}{(2-1)^{1/p}} = 1,$$

адже $p \geq 1$.

При цьому

$$\|a_n - a\|_E = \|a_n - a\|_p = \left(\sum_{k>n} \frac{1}{2^{kp}}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2^{p(n+1)}}}{1 - \frac{1}{2^p}}\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{2^n(2^p - 1)^{1/p}} \to 0,$$

отже, $a_n \to a$ в $E$ при $n \to \infty$, тому $a \in [B]_E$. Зрозуміло, що при цьому $a \notin F$.

Як і в попередньому прикладі, легко показати, використавши перехід до покоординатної границі, що і тут $[B]_E \setminus F = [B]_E \setminus B$.

**Приклад 3.** Міркування попереднього прикладу легко переносяться на випадок $E = c_0$, $F = (\mathbb{K}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. Тут також $[B]_E \setminus F = [B]_E \setminus B \neq \emptyset$.

**Приклад 4.** Нехай $E = C[a,b]$ – це банахів простір неперервних функцій $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ з рівномірною нормою $\|f\|_E = \|f\|_\infty = \max\limits_{a \leq t \leq b} |f(t)|$, а $F = C^1[a,b]$ – банахів простір усіх неперервно диференційовних функцій $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ з нормою $\|f\|_F = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$. Зрозуміло, що тут $F \subseteq E$ і тотожне вкладення $F \hookrightarrow E$ неперервне, бо $\|f\|_E = \|f\|_\infty \leq \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\} = \|f\|_F$ для кожного $f \in F$. Покажемо, що і тут $[B]_E \setminus F \neq \emptyset$.

Спочатку розглянемо випадок, коли $a = -1$, $b = 1$. Зрозуміло, що функція $g(t) = \frac{|t|}{\sqrt{2}}$ належить до $E \setminus F$, а функції

$$g_n(t) = \sqrt{\frac{t^2 + \frac{1}{n^2}}{2}}$$

належать до $F$. При цьому

$$\|g_n\|_\infty = \max_{|t| \leq 1} |g_n(t)| = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{n^2}}{2}} \leq 1,$$

$$g_n'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}}} \cdot 2t = \frac{t}{\sqrt{2(t^2 + \frac{1}{n^2})}}$$

і

$$\|g_n'\|_\infty = \max_{|t| \leq 1} |g_n'(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} < 1,$$

отже,

$$\|g_n\|_F \leq 1 \text{ і } g_n \in B = \{f \in F : \|f\|_F \leq 1\}$$

для кожного $n$. Оскільки

$$|g_n(t) - g(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} - |t| \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}n^2\left(\sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} + |t|\right)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}n}$$

для всіх $t$, причому при $t = 0$ має місце рівність, то $\|g_n - g\|_E = \|g_n - g\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}n} \to 0$ при $n \to \infty$, тобто $g_n \to g$ в $E$. Таким чином, $g \in [B]_E \setminus F$.

З допомогою лінійного перетворення $\varphi : [a,b] \to [-1,1]$ цей приклад легко перенести на випадок довільного відрізка $[a,b]$, де $a < b$.

Рівність $[B]_E \setminus F = [B]_E \setminus B$ у цьому випадку для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ легко випливає з такого результату.

**Теорема 3.** *Нехай $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність неперервно диференційовних функцій $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ – неперервно диференційовна функція і $f_n(t) \to f(t)$ на деякій щільній на відрізку $[a,b]$ множині $T$. Тоді якщо $f'_n(t) \le \gamma$ для всіх $t \in [a,b]$ і всіх $n$, то і $f'(t) \le \gamma$ для всіх $t \in [a,b]$.*

***Доведення.*** Припустимо, що $f'(t_0) > \gamma$ для деякого $t_0 \in [a,b]$. Оскільки похідна $f'$ неперервна і $\overline{T} = [a,b]$, то знайдеться такий невироджений сегмент $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$, що $\alpha,\beta \in T$ і $f'(t) > \gamma$ для всіх $t \in [\alpha,\beta]$. З формули Лаґранжа випливає, що

$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi)(\beta-\alpha) > \gamma(\beta-\alpha)$$

для деякого $\xi \in (\alpha,\beta)$. Оскільки $f(\beta) - f(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty}(f_n(\beta) - f_n(\alpha))$, то і $f_m(\beta) - f_m(\alpha) > \gamma(\beta-\alpha)$ для деякого $m$. Ще раз використавши формулу Лаґранжа, отримаємо, що

$$f_m(\beta) - f_m(\alpha) = f'_m(\xi_0)(\beta-\alpha)$$

для деякої точки $\xi_0 \in (\alpha,\beta) \subseteq [a,b]$, а тоді для неї $f'_m(\xi_0) > \gamma$, що суперечить умові теореми. $\square$

Зрозуміло, що такий же результат матиме місце, коли нерівність $\le$ замінити на $\ge$.

Якщо тепер $f \in [B]_E \cap F$, де $E = C[a,b]$, $F = C^1[a,b]$, то існує послідовність функцій $f_n \in B$, така, що $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$. Оскільки $-1 \le f'_n(t) \le 1$ на $[a,b]$, то за теоремою 3 і $-1 \le f'(t) \le 1$ на $[a,b]$. Крім того, зрозуміло, що і $-1 \le f(t) \le 1$ на $[a,b]$, отже, $f \in B$, а тому $[B]_E \setminus F = [B]_E \setminus B$.

**Питання 1.** *Чи існує така пара нормованих просторів $(E,F)$, що $F \subseteq E$, причому тотожне вкладення $F \hookrightarrow E$ лінійне і неперервне, що для них*

$$\emptyset = [B]_E \setminus F \subset [B]_E \setminus B \ne \emptyset,$$

*де $B = \{x \in F : \|x\|_F \le 1\}$?*

**5. Випадок, коли $[E,F]$ буде сильно $\sigma$-метризовним простором.** Якщо $E = \mathbb{K}$ – це поле скалярів зі своєю природною нормою, а $F = \{0\}$ – це нульовий підпростір $\mathbb{K}$, то простір $Z_n$ у цьому випадку складається з усіх фінітних послідовностей $z = (\xi_1, ..., \xi_n, 0, 0, ...)$ скалярів $\xi_k$, який позначається $\mathbb{K}_n$, при цьому $\|z\|_n = \max\limits_{1\le k\le n} |\xi_k|$. В цьому випадку індуктивна границя $Z = [E,F]$ збігається з простором $\mathbb{K}^\infty = \lim\operatorname{ind}\mathbb{K}_n$ усіх фінітних послідовностей скалярів з топологією індуктивної границі своїх скінченновимірних підпросторів $\mathbb{K}_n$. Ця індуктивна границя задовольняє умови теореми Д'єдонне-Шварца і тому є регулярною. При цьому тут $[B]_E = \{0\} \subseteq F$, отже, $[B]_E \setminus F = \emptyset$. Це показує, що умова $[B]_E \setminus F \ne \emptyset$ в теоремі 2 істотна. У цьому пункті ми узагальнимо це спостереження.

Ми будемо використовувати позначення пункту 3. Почнемо з допоміжних тверджень.

***Лема 1.*** *а). Якщо тотожне вкладення $J : F \hookrightarrow E$ ізоморфне, то і всі тотожні вкладення $J_n : Z_n \hookrightarrow Z_{n+1}$ будуть ізоморфними.*

*б). Якщо для деякого номера $n$ вкладення $J_n : Z_n \hookrightarrow Z_{n+1}$ ізоморфне, то і вкладення $J : F \hookrightarrow E$ буде ізоморфним.*

***Доведення.*** а). Нехай $J : F \hookrightarrow E$ – ізоморфне вкладення. Тоді існують такі константи $\alpha$ і $\beta$, що $0 < \alpha \le 1 \le \beta$ і

$$\alpha\|x\|_F \le \|x\|_E \le \beta\|x\|_F$$

для кожного $x \in F$. Зафіксуємо номер $n$ і розглянемо довільний елемент $z = (z_k)_{k=1}^{\infty}$ з простору $Z_n$. Тоді $z_k \in E$ при $k \le n$ і $z_k \in F$ при $k > n$. Для елемента $z_{n+1}$ з простору $F$ будемо мати:

$$\alpha\|z_{n+1}\|_F \le \|z_{n+1}\|_E \le \beta\|z_{n+1}\|_F.$$

Оскільки $\alpha \le 1 \le \beta$, то і

$$\alpha\|z_k\|_E \le \|z_k\|_E \le \beta\|z_k\|_E \text{ при } k \le n,$$

так само як

$$\alpha\|z_k\|_F \le \|z_k\|_F \le \beta\|z_k\|_F \text{ при } k > n+1.$$

Тому

$$\alpha\|z\|_n \le \|z\|_{n+1} \le \beta\|z\|_n,$$

а це означає, що вкладення $J_n : Z_n \hookrightarrow Z_{n+1}$ ізоморфне.

б). Нехай вкладення $J_n : Z_n \hookrightarrow Z_{n+1}$ ізоморфне для деякого номера $n$. Розглянемо відображення $T : F \to Z_n$, $Tx =$

$(\underbrace{0,..,0}_{n \text{ разів}}, x, 0, ...)$. Оскільки $\|Tx\|_n = \|x\|_F$, то $T$ – це лінійна ізометрія простору $F$ на підпростір $Y_n = T(F)$ простору $Z_n$. Розглянемо той же простір $T(F)$, але з нормою, індукованою з простору $Z_{n+1}$, який ми позначимо символом $Y_{n+1}$. Оскільки вкладення $J_n : Z_n \hookrightarrow Z_{n+1}$ ізоморфне і $J_n(Y_n) = Y_{n+1}$, то звуження $I_n = J_n|_{Y_n} : Y_n \to Y_{n+1}$ буде ізоморфізмом нормованих просторів $Y_n$ і $Y_{n+1}$. Далі, відображення $S : Y_{n+1} \to E$, $S(Tx) = x$ для кожного $x \in F$ – це лінійне ізометричне вкладення, адже $\|S(Tx)\|_E = \|x\|_E = \|Tx\|_{n+1}$ для кожного $x \in F$. Оскільки $J = SI_nT$, то і $J : F \hookrightarrow E$ буде ізоморфним вкладенням разом з $J_n$.

***Теорема 4.*** *Індуктивна границя $[E, F]$ буде строгою тоді і тільки тоді, коли вкладення $E \hookrightarrow F$ ізоморфне.*

***Доведення.*** Це негайно випливає з означення строгої індуктивної границі і леми 1.

***Лема 2.*** *а). Якщо $F$ – це замкнений підпростір простору $E$, то для кожного $n$ простір $Z_n$ буде замкненим підпростором простору $Z_{n+1}$.*

*б). Якщо для деякого номера $n$ простір $Z_n$ буде замкненим підпростором простору $Z_{n+1}$, то і $F$ – це замкнений підпростір простору $E$.*

***Доведення.*** а). Нехай $F$ – замкнений підпростір $E$. Оскільки $\|x\|_F = \|x\|_E$ для кожного $x \in F$, то і $\|z\|_n = \|z\|_{n+1}$ для кожного $z \in Z_n$, отже, нормований простір $Z_n$ є підпростором нормованого простору $Z_{n+1}$. Доведемо, що $Z_n$ замкнений в $Z_{n+1}$.

Розглянемо підпростори $X_n$ і $Y_n$ простору $Z_n$, що складаються з усіх наборів $x = (z_1, ..., z_n, 0, z_{n+2}, ...)$ і $y = (\underbrace{0,..,0}_{n \text{ разів}}, z_{n+1}, 0, ...)$ з простору $Z_n$. Зрозуміло, що для кожної точки $z = (z_k)_{k=1}^{\infty}$ з простору $Z_n$ маємо, що $z = x + y$, де $x$ і $y$ – визначені вище набори з $X_n$ і $Y_n$ відповідно, і таке зображення елемента $z$ у вигляді суми елементів з $X_n$ і $Y_n$ єдине. Тому $Z_n = X_n \oplus Y_n$ – це пряма сума своїх підпросторів $X_n$ і $Y_n$. Зауважимо, що при цьому

$$\|z\|_n = \max\{\|x\|_n, \|y\|_n\},$$

тому простір $Z_n$ ізометричний добутку $X_n \times Y_n$ нормованих просторів $X_n$ і $Y_n$ з максимум-нормою.

Так само простір $Z_{n+1}$ ізометричний добутку $X_n \times \widetilde{Y}_n$, де простір $\widetilde{Y}_n$ – це підпростір простору $Z_{n+1}$, що складається з усіх наборів $y = (\underbrace{0,..,0}_{n \text{ разів}}, z_{n+1}, 0, ...)$ з простору $Z_{n+1}$. Крім того, існують природні лінійні ізометрії $T : F \to Y_n$ і $S : E \to \widetilde{Y}_n$, які співставляють кожному елементу $u$ з $F$ чи $E$ елемент $y = (\underbrace{0,..,0}_{n \text{ разів}}, u, 0, ...)$ з $Y_n$ чи $\widetilde{Y}_n$ відповідно. Нехай $J : F \hookrightarrow E$ і $I_n : Y_n \hookrightarrow \widetilde{Y}_n$ – це тотожні вкладення, які, очевидно, є ізометричними. При цьому діаграма

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{J} & E \\ {\scriptstyle T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S} \\ Y_n & \underset{I_n}{\longrightarrow} & \widetilde{Y}_n \end{array} \qquad (*)$$

комутативна, адже $I_nT = SJ$ як легко перевірити. За умовою простір $F = J(F)$ замкнений в $E$, тоді і простір $S(F) = S(J(F))$ буде замкненим в $\widetilde{Y}_n$, адже $S$ – це ізометрія. Але

$$S(J(F)) = I_n(T(F)) = I_n(Y_n) = Y_n.$$

Тому простір $Y_n$ замкнений в $\widetilde{Y}_n$, а тоді й добуток $P = X_n \times Y_n$ замкнений в добутку $\widetilde{P} = X_n \times \widetilde{Y}_n$. Розглянемо побудовані вище ізометрії $\Phi : Z_n \to P$ і $\Psi : Z_{n+1} \to \widetilde{P}$. Очевидно, що діаграма

$$\begin{array}{ccc} Z_n & \xrightarrow{J_n} & Z_{n+1} \\ {\scriptstyle \Phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Psi} \\ P & \underset{I}{\longrightarrow} & \widetilde{P}, \end{array}$$

де $I : P \hookrightarrow \widetilde{P}$ – тотожне вкладення, комутативна. Оскільки

$$Z_n = J_n(Z_n) = (\Psi^{-1}I\Phi)(Z_n) = \Psi^{-1}(P)$$

і $P$ – замкнена частина $\widetilde{P}$, то і простір $Z_n$ замкнений в $Z_{n+1}$.

б). Нехай $Z_n$ – це замкнений підпростір $Z_{n+1}$ для деякого $n$. Розглянемо нормовані простори $Y_n$ і $\widetilde{Y}_n$, введені вище. Оскільки $Y_n$

– це замкнений підпростір $Z_n$ і $Z_n$ замкнений в $Z_{n+1}$, то і $Y_n$ замкнений в $Z_{n+1}$. Але $Y_n$ – це підпростір $\widetilde{Y}_n$, отже, $Y_n$ буде замкнений і в $\widetilde{Y}_n$. З комутативності діаграми $(*)$ тепер легко вивести, що і $F$ буде замкненим підпростором простору $E$. $\square$

***Лема 3.*** *Нехай $(X, \mathcal{T})$ – це строга індуктивна границя послідовності локально опуклих просторів $(X_n, \mathcal{T}_n)$, така, що простір $X_n$ замкнений в $X_{n+1}$ для кожного $n$. Тоді $X_n$ буде замкнений і в $X$ для кожного $n$.*

***Доведення.*** Зафіксуємо якесь $n$ і покажемо, що $X_n$ замкнений в $X$. Нехай $x \in X \setminus X_n$. Тоді існує такий номер $m$, що $m > n$ і $x \in X_m$. З умови випливає, що простір $X_n$ замкнений у просторі $X_m$. Оскільки $x \notin X_n$, то існує такий окіл нуля $U_m$ в $X_m$, що $(x + U_m) \cap X_n = \emptyset$. Але, як відомо [8, с. 54, теорема 2], у нашому випадку $\mathcal{T}|_{X_m} = \mathcal{T}_m$. Отже, існує такий окіл нуля $U$ в $X$, що $U_m = U \cap X_m$. В такому разі і $(x + U) \cap X_n = \emptyset$. Справді, якби $x + u = y$ для деяких $u \in U$ і $y \in X_n$, то $u = y - x \in X_m$, отже, $u \in U \cap X_m = U_m$, а тому $y = x + u \in (x + U_m) \cap X_n$, що суперечить вибору $U_m$. Таким чином, $(x + U) \cap X_n = \emptyset$ для деякого околу нуля $U$ в $X$, звідки випливає замкненість $X_n$ в $X$. $\square$

Нагадаємо, що топологічний простір $Z$ називається *сильно $\sigma$-метризовним*, якщо він подається у вигляді об'єднання зростаючої послідовності своїх метризовних і замкнених в $Z$ підпросторів $Z_n$, причому для кожної збіжної в $Z$ послідовності точок $z_m$ існує такий номер $n$, що $\{z_m : m \in \mathbb{N}\} \subseteq Z_n$. При цьому така послідовність $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ називається *вичерпуванням* сильно $\sigma$-метризовного простору $Z$.

***Теорема 5.*** *Нехай нормований простір $F$ є замкненим підпростором нормованого простору $E$. Тоді індуктивна границя $Z = [E, F]$ буде строгою і регулярною, причому $Z$ буде сильно $\sigma$-метризовним простором з вичерпуванням $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$.*

***Доведення.*** З теореми 4, твердження а) леми 2 і теореми Д'єдонне-Шварца негайно випливає, що індуктивна границя $Z = \lim\operatorname{ind} Z_n$ буде строгою і регулярною. Оскільки $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}|_{Z_n}$ згідно з [8, с. 54, теорема 2] і простори $Z_n$ замкнені в $Z$ за лемою 3, то $(Z_n, \mathcal{T}_n)$ – це замкнені підпростори простору $(Z, \mathcal{T})$, причому вони нормовані і $Z_n \subseteq Z_{n+1}$ для кожного $n$. Для збіжної в $Z$ послідовності точок $z_m$ множина, $A = \{z_m : m \in \mathbb{N}\}$ буде обмеженою, а тому лежить у деякому допграничному просторі $Z_n$, адже наша індуктивна границя є регулярною. Тому $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ – це вичерпування сильно $\sigma$-метризовного простору $Z = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$. $\square$

**6. Деякі приклади.** Наведемо наприкінці ще два приклади, що виникли в зв'язку з цими дослідженнями.

***Приклад 5.*** Нехай $(E, \|\cdot\|)$ – довільний нормований простір, який має власний всюди щільний лінійний підпростір $F$. Зрозуміло, що вкладення $F \hookrightarrow E$ ізоморфне. Позначимо, як і раніше, через $B = \{x \in F : \|x\| \leq 1\}$ одиничну кулю у просторі $F$ і покажемо, що $[B]_E \setminus F \neq \emptyset$. Справді, за умовою існує елемент $a \in E \setminus F$. Покладемо $x = \frac{a}{\|a\|}$. Тоді $\|x\| = 1$ і $x \notin F$. Оскільки $\overline{F} = E$, то існує така послідовність елементів $x_n \in F \setminus \{0\}$, що $x_n \to x$. Тоді і $\|x_n\| \to \|x\| = 1$, а значить, $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} \to x$, причому $y_n \in B$, бо $\|y_n\| = 1$ для кожного $n$. Таким чином, $x \in [B]_E \setminus F$.

Цей приклад показує, що вкладення $F \hookrightarrow E$ може бути ізоморфним і коли $[B]_E \setminus F \neq \emptyset$. Конкретні приклади – це приклади 2, 3 чи приклад, у якому $E = C[a, b]$, а $F$ – це підпростір всіх многочленів на $[a, b]$.

***Приклад 6.*** Наведемо приклад локально опуклого простору $X$ і такого його метризовного підпростору $E$ (нелінійного), що його лінійна оболонка $L = \mathrm{sp}(E)$ буде неметризовним. Розглянемо простір $\mathbb{R}^{\infty}$ всіх фінітних послідовностей дійсних чисел з його природною індуктивною топологією. Він не метризовний, бо не задовольняє першу аксіому зліченності. Його підпростір $E = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, де $e_n = (\underbrace{0, .., 0}_{n \text{ разів}}, 1, 0, 0, ...)$ – орти, метризовний, бо він дискретний. Але у даному випадку

$$L = \mathrm{sp}(E) = \mathbb{R}^{\infty},$$

отже, $L$ – це неметризовний простір.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Філіпчук О.І.* Сукупна неперервність $K_hC$-функцій зі значеннями в просторах Мура // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, №11. – С. 1539-1547.

2. *Hola L., Piotrowski Z.* Set of continuity points of functions with values in generalized metric spaces // Tatra Mt. Math. Publ. – 2009. – **42**. – P. 149–160.

3. *Маслюченко В., Мироник О.* Сукупна неперервність відображень зі значеннями в різних узагальненнях метризовних просторів // Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей. – Ворохта, 20-26 лютого, 2012. – Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т, 2012. – С. 5-6.

4. *Філіпчук О.І.* Нарізно неперервні відображення та їх аналоги зі значеннями в неметризовних просторах: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. - Чернівці, 2010. – 124 с.

5. *Карлова О.О., Маслюченко В.К., Мироник О.Д.* Площина Бінґа і нарізно неперервні відображення. // Мат. студії. – 2012. – Т. 38, №2. – С. 188-193.

6. *Маслюченко В.К.* Раздельно непрерывные отображения со значениями в строгих индуктивных пределах // XIV школа по теории операторов в функциональных пространствах. Ч. II. – Новгород, 1989. – С. 70.

7.*Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення зі значеннями в індуктивних границях // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №3. – С. 380-384.

8.*Маслюченко В.К.* Лінійні неперервні оператори. – Чернівці: Рута, 2002. – 72 с.

9. *Маслюченко В.К.* Ограниченные множества в индуктивных пределах // Чернов. ун-т. – Черновцы, 1983. – 14с. – Деп. в УкрНИИНТИ 25.X.1983, N1204-Ук-Д83.

10. *Маслюченко В.К., Філіпчук О.І.* Про один клас індуктивних границь // V Всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу присв. пам'яті проф. Василишина Б.В. Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 19-21 вересня, 2013. – Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т, 2013. – С. 43-44.

11. *Маслюченко В.К.* Перші типи топологічних векторних просторів. – Чернівці: Рута, 2002. – 72 с.

12. *Себаштьян-и-Сильва Ж.* О некоторых классах локально-выпуклых пространств // Математика. – 1957. – **I**, №1. – С. 60-77.

13. *Макаров Б.М.* Об индуктивных пределах нормированных пространств // ДАН СССР. – 1958. – **119**, №6. – С. 1092-1094.

14. *Макаров Б.М.* Об индуктивных пределах нормированных пространств // Вестник Ленингр. ун-та, серия Мат., мех. и астрон. – 1965. – №13, вып. 3. – С. 50-58.

15. *Макаров Б.М.* О некоторых патологических свойствах индуктивных пределов B-пространств // Успехи мат. наук. – 1963. – №18, вып.3. – С. 171-178.

16. *J. Kucera, and K. McKennon.* Dieudonne-Schwartz theorem on bounded sets in inductive limits // Proc. Amer. Math. Soc. – 1980. – **78**, №3. – P. 366-368.

17. *J. Kucera, C. Bosch.* Dieudonne-Schwartz theorem on bounded sets in inductive limits. II // Proc. Amer. Math. Soc. – 1982. – **86**, №3. – P. 392-394.

18. *C. Bosch, J. Kucera, and K. McKennon.* Dual characterization of the Dieudonne-Schwartz theorem on bounded sets // Internat. J. Math. and Math.Sci. – 1983. – **6**, №1. – P. 189-192.

19. *Qiu Jing-Hui.* Dieudonne-Schwartz theorem in inductive limits of metrizable spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 1984. – **92**, №2. – P. 255-257.

20. *Qiu Jing-Hui.* Dieudonne-Schwartz theorem in inductive limits of metrizable spaces II // Proc. Amer. Math. Soc. – 1990. – **108**, №1. – P. 171-175.