Працьовитий М.В.[1], Ратушняк С.П.[2], Симоненко Ю.О.[3], Шпитюк Д.С.[4]

Згортка двох сингулярних розподілів: класичного канторівського і випадкової величини з незалежними дев'ятірковими цифрами

Вивчається розподіл випадкової величини $\xi = \tau + \eta$, де τ і η незалежні випадкові величини, причому τ має класичний канторівський розподіл, а η є випадковою величиною з незалежними однаково розподіленими цифрами дев'ятіркового зображення. При додаткових умовах на розподіли цифр η вказуються достатні умови сингулярності канторівського типу розподілу ξ . Для обгрунтування тверджень здійснюється тополого-метричний аналіз зображення чисел $x \in [0;2]$ у системі числення з основою 9 та сімнадцятисимвольним алфавітом (набором цифр). Геометрію (позиційну та метричну) цього зображення описують властивості відповідних циліндричних множин.

Ключові слова і фрази: s-кове зображення чисел, система числення з надлишковим алфавітом, множина Кантора, множина канторівського типу, сингулярно розподілена випадкова величина, спектр розподілу, арифметична сума множин.

National Pedagogical Dragomanov University[1,3,4], Institution of mathematics of NAS Ukraine[1,2], Kyiv, Ukraine
e-mail: [1]*pras4444@gmail.com*, [2]*ratush404@gmail.com*,
[3]*yu.o.symonenko@npu.edu.ua*, [4]*darina.shpytyuk@gmail.com*

Вступ

Нехай $A_s = \{0, 1, ..., s-1\}$ — алфавіт (набір цифр), $L_s = A_s \times A_s \times ...$ — простір послідовностей елементів алфавіту, $\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$ — s-кове зображення числа $x \in [0; 1]$, тобто $x = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{s^n}$, де $(\alpha_n) \in L_s$. Відомо, що арифметичною сумою двох числових множин A і B називається множина $C = A \oplus B = \{x : x = a + b, a \in A, b \in B\}$. Ця операція над числовими множинами є достатньо продуктивною у теорії нескінченних згорток Бернуллі [8], теорії фракталів та геометрії числових рядів [3–5, 7, 10].

Відомо, що множина Кантора $C = C[3; \{0; 2\}] = \{x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha_n}{3^n}, (\alpha_n) \in L_2\}$ є досконалою ніде не щільною множиною, нульової міри Лебега; арифметичною сумою двох множин Кантора є відрізок $[0; 2]$, а двох множин канторівсього типу

УДК 511.7+519.21
2010 *Mathematics Subject Classification:* 28A80, 28A78, 58F14.

$C[4;\{0;3\}]=\{x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{3\alpha_k}{4^k},(\alpha_k)\in L_2\},C[4;\{0,2\}]=\{x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2\alpha_k}{4^k},(\alpha_k)\in L_2\}$
є канторвал [3] — специфічне об'єднання нескінченної кількості інтервалів і множини канторівського типу (досконалої, ніде не щільної множини нульової міри Лебега) [11].

Класичним канторівським розподілом називається розподіл випадкової величини

$$\tau=\frac{\theta_1}{3}+\frac{\theta_2}{3^2}+...+\frac{\theta_n}{3^n}+...=\Delta^3_{\theta_1\theta_2...\theta_n...},$$

де (θ_n) — послідовність незалежних випадкових величин з розподілами $P\{\theta_n=0\}=\frac{1}{2}=P\{\theta_n=2\}$, $P\{\theta_n=1\}=0$. Випадкова величина τ має сингулярний розподіл (функція розподілу є неперерною і має похідну рівну нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега). Його спектром (множиною точок росту функції розподілу) є класична множина Кантора.

Згортка двох сингулярних розподілів випадкових величин (це розподіл суми двох незалежних випадкових величин) має своїм спектром (мінімальним замкненим носієм) множину, яка є арифметичною сумою спектрів компонент згортки. Оскільки досі невідомі критерії сингулярності (абсолютної неперервності) згортки двох сингулярних розподілів, то окремі частинні випадки іноді представляють науковий інтерес [1,2,8,9].

Кажуть, що випадкова величина X має *сингулярний розподіл канторівського типу*, якщо її спектр є множиною нульової міри Лебега.

У даній роботі ми розглядаємо згортку двох сингулярних розподілів канторівського типу, друга компонента якої технічно зручна для класичного канторівського розподілу, а саме розподіл випадкової вличини $\xi=\tau+\eta$, де τ, η — незалежні випадкові веглични, причому τ має класичний канторівсьий розподіл, а η — випадкова величина з сингулярним розподілом канторівського типу, цифри дев'ятіркового зображення якої є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами. Нас цікавлять умови, при яких ξ має сингулярний розподіл канторівського типу.

Випереджаючи вивчення основних об'єктів дослідження, розглянемо представлення чисел у системі з основою 9 сімнадцятисимвольним алфавітом: $A_{17}=\{0,1,...,16\}$.

1 Система зображення дійсних чисел з надлишковим алфавітом

Для довільного $x\in[0;2]$ існує послідовність $(\gamma_n)\in L_{17}$ така, що

$$x=\frac{\gamma_1}{9}+\frac{\gamma_2}{9^2}+\frac{\gamma_3}{9^3}+...+\frac{\gamma_n}{9^n}+...\equiv\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_n,...}. \qquad (1)$$

Обгрунтування цього твердження і алгоритм розклад числа в ряд (1) проводиться аналогічно до міркувань, наведених у роботі [6]. Ряд (1) називається *дев'ятірковим представленням з надлишковим сімнадцятисимвольним алфавітом* числа x, а скорочений запис $\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_n,...}$ — його *дев'ятірковим зображенням* з алфавітом A_{17} (коротко (17/9)-*зображенням*). Геометрію (17/9)-зображення частково розкривають властивості циліндричних множин.

Означення 1. (17/9)-*циліндром рангу m з основою $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_m$ називається множина* $\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_m}=\{x\in[0;2]:x=\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_m,\alpha_1,\alpha_2,...}\forall(\alpha_n)\in L_{17}.\}$

Для (17/9)-циліндрів справедливі наступні властивості:

1) $\Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_m} = \bigcup\limits_{i=0}^{16} \Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_m,i}$;

2) $\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\dots,\gamma_m} = [a; a + \frac{2}{9^m}]$, де $a = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\gamma_i}{9^i}$;

3) $|\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\dots,\gamma_m}| = \dfrac{2}{9^m}$; $\dfrac{|\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\dots,\gamma_m,i}|}{|\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\dots,\gamma_m}|} = \dfrac{1}{9}$;

4) для будь-якої послідовності $(\gamma_m) \in L_{17}$ $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_m} = x = \Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_m,\dots}$;

5) для довільних трьох послідовних циліндрів $\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{m-1},i-1}$, $\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{m-1},i}$ і $\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{m-1},i+1}$, $i \in A_{17} \setminus \{0, 16\}$ має місце рівність:

$$\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{m-1},i} \subset \Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{m-1},i-1} \cup \Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{m-1},i+1}. \tag{2}$$

Справді, оскільки

$$\begin{aligned}
\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{m-1},i-1} &= [a + \frac{i-1}{9^m}; a + \frac{i-1}{9^m} + \frac{2}{9^m}] = [a + \frac{i-1}{9^m}; a + \frac{i+1}{9^m}],\\
\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{m-1},i} &= [a + \frac{i}{9^m}; a + \frac{\gamma_i}{9^m} + \frac{2}{9^m}] = [a + \frac{i}{9^m}; a + \frac{\gamma_{i+2}}{9^m}],\\
\Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{m-1},i+1} &= [a + \frac{i+1}{9^m}; a + \frac{\gamma_{i+1}}{9^m} + \frac{2}{9^m}] = [a + \frac{i+1}{9^m}; a + \frac{\gamma_{i+3}}{9^m}],
\end{aligned}$$

де $a = \sum\limits_{k=1}^{m-1} \dfrac{\gamma_k}{9^k}$, і $\max \Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{m-1},i-1} = \min \Delta_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{m-1},i+1}$, то рівність (2) є очевидною.

6) Для циліндрів (17/9)-зображення мають місце рівності:

$$\bigcup_{i=0}^{8} \Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1},2i} = \Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1}}; \tag{3}$$

$$\Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1},0} \cup \Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1},16} \cup \bigcup_{i=1}^{8} \Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1},2i-1} = \Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1}}. \tag{4}$$

Справді, оскільки має місце (2), то справедливими є рівності:

$$\Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1}} = \bigcup_{i=0}^{16} \Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1},i} = \bigcup_{i=0}^{16} \Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1},i} \setminus \bigcup_{i=1}^{8} \Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1},2i-1} = \bigcup_{i=0}^{8} \Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1},2i},$$

$$\Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1}} = \bigcup_{i=0}^{16} \Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1},i} \setminus \bigcup_{i=1}^{7} \Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1},2i} = \Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1},0} \cup \Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1},16} \cup \bigcup_{i=1}^{8} \Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1},2i-1}.$$

7) $\Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_m,i} \cap \Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_m,i+1} = \bigcup\limits_{j=5}^{8} \Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_m,i,2j-1} \cup \Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_m,i,16} = \bigcup\limits_{j=0}^{3} \Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_m,i,2j} \cup \Delta_{\gamma_1,\dots,\gamma_m,i+1,7}$.

Лема 1. *Якщо a, b, $a+1$, $b-9$ належать алфавіту A_{17}, то заміна пари $\overline{a,b}$ послідовних цифр у (17/9)-зображенні числа на пару цифр $\overline{a+1, b-9}$ не змінює його значення.*

Доведення. Твердження випливає з рівності

$$\frac{a}{9^m} + \frac{b}{9^{m+1}} = \frac{a+1}{9^m} + \frac{b-9}{9^{m+1}},$$

яка виконується для вказаних цифр алфавіту A_{17}. □

Наслідок 1. *Для циліндрів m-го рангу мають місце рівності:*

$$\begin{aligned}
&\Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i,9} = \Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i+1,0}, \quad \Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i,10} = \Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i+1,1},\\
&\Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i,11} = \Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i+1,2}, \quad \Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i,12} = \Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i+1,3},\\
&\Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i,13} = \Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i+1,4}, \quad \Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i,14} = \Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i+1,5},\\
&\Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i,15} = \Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i+1,6}, \quad \Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i,16} = \Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2},i+1,7}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Лема 2. *Циліндр $(m+1)$-го рангу має не більше 2^m альтернативних зображень.*

Доведення. Очевидно, що циліндр $\Delta_{0\ldots0}$ має єдине зображення. Кількість формально різних зображень одного і того ж циліндра залежить від наявності у його зображенні пар послідовних цифр для яких існують еквівалентні заміни. Розглянемо випадок, коли їх максимальна кількість. Скористаємося методом математичної індукції. Нехай $m = 1$. Розглянемо циліндр Δ_{c_1,c_2}. Тоді $\Delta_{c_1,c_2} = \Delta_{c_1-1,c_2+9}$, якщо $c_2 < 9$ або $\Delta_{c_1,c_2} = \Delta_{c_1+1,c_2-9}$, якщо $c_2 \geq 9$. Таким чином кількість зображень дорівнює 2^1.

Припустимо, що рівність виконується при $m = k$, тобто кількість зображень для циліндра $(k+1)$-го рангу дорівнює 2^k. Розглянемо циліндр $(k+2)$-го рангу $\Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{k+1},c_{k+2}}$. Циліндр $\Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{k+1},c_{k+2}}$ має 2^k різне зображення зображення:

$$\Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{k+1},c_{k+2}} = \Delta_{c_1^1,c_2^1,\ldots,c_{k+1}^1,c_{k+2}^1} = \ldots = \Delta_{c_1^{2^k-1},c_2^{2^k-1},\ldots,c_{k+1}^1,c_{k+2}^{2^k-1}},$$

де $c_1^j, c_2^j, \ldots, c_{k+1}^j, c_{k+2}^j$ — j-та комбінація j-того зображення циліндра, $j = \overline{1, 2^k-1}$. Тоді зображення циліндрів $(k+2)$-го рангу можна записати наступним чином

$$\Delta_{0,c_1,c_2,\ldots,c_{k+1},c_{k+2}} = \Delta_{0,c_1^1,c_2^1,\ldots,c_{k+1}^1,c_{k+2}^1} = \ldots = \Delta_{0,c_1^{2^k-1},c_2^{2^k-1},\ldots,c_{k+1}^1,c_{k+2}^{2^k-1}}.$$

Для кожного із зображень існує альтернативне: $\Delta_{0,c_1^j,c_2^j,\ldots,c_{k+1}^j,c_{k+2}^j} = \Delta_{0-1,c_1^1+9,c_2^1,\ldots,c_{k+1}^1,c_{k+2}^1}$. Тоді кожен циліндр $(k+2)$-го рангу має $2 \cdot 2^k$ зображень. Згідно принципу математичної індукції умови леми виконуються для будь-якого натурального k. □

2 Арифметична сума двох множин канторівського типу

Розглядається множина Кантора $C = C[3; \{0, 2\}]$ і множина канторівського типу $C[9; V] = \{x \in [0; 1] : x = \Delta^9_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}, \beta_n \in V \subset A_9\}$.

Теорема 1. *Арифметична сума множин C і $C_1 = C[9; \{0, 8\}]$ є самоподібною множиною канторівськогого типу нульової міри Лебега з самоподібною розмірністю $\alpha = \log_9 7$.*

Доведення. Перекодуємо $x \in C$ у трійковій системі числення, а саме:

$$C \ni x = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + ... + \frac{\alpha_{2k-1}}{3^{2k-1}} + \frac{\alpha_{2k}}{3^{2k}} + ... = \frac{3\alpha_1 + \alpha_2}{9} + ... + \frac{3\alpha_{2k-1} + \alpha_{2k}}{3^{2k}} + ... = \Delta^9_{\gamma_1 ... \gamma_k ...},$$

де $\gamma_k = 3\alpha_{2k-1} + \alpha_{2k} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}) = (0,0), \\ 2, \text{ якщо } (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}) = (0,2), \\ 6, \text{ якщо } (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}) = (2,0), \\ 8, \text{ якщо } (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}) = (2,2). \end{cases}$

Таким чином, $C[3; \{0, 2\}] = C[9; \{0, 2, 6, 8\}]$. Тоді арифметична сума C і C_1

$$C \oplus C_1 = \{x : x = \frac{\gamma_1 + \beta_1}{9} + \frac{\gamma_2 + \beta_2}{9^2} + ... + \frac{\gamma_n + \beta_n}{9^n} + ... = \Delta^9_{d_1 d_2 ... d_n ...}, \}$$

де $d_n = \gamma_n + \beta_n = \begin{cases} 0 \text{ при } \gamma_n = 0, \beta_n = 0, \\ 2 \text{ при } \gamma_n = 0, \beta_n = 2, \\ 6 \text{ при } \gamma_n = 0, \beta_n = 6, \\ 8 \text{ при } \gamma_n = 0, \beta_n = 8 \text{ або } \gamma_n = 8, \beta_n = 0, \\ 10 \text{ при } \gamma_n = 8, \beta_n = 2, \\ 14 \text{ при } \gamma_n = 8, \beta_n = 6, \\ 16 \text{ при } \gamma_n = 8, \beta_n = 8. \end{cases}$

Оскільки $d_n = 2c_n$, де $c_n \in \{0, 1, 3, 4, 5, 7, 8\}$, то $C \oplus C_1 = 2 \odot C[9; \{0, 1, 3, 4, 5, 7, 8\}]$. Як відомо, множина $C[9; \{0, 1, 3, 4, 5, 7, 8\}]$ є самоподібною множиною канторівського типу нульової міри Лебега з самоподібною розмірністю, що є розв'язком рівняння $7 \cdot (\frac{1}{9})^x = 1$, тобто $x = \log_9 7$. Оскільки самоподібна розмірність подібних множин збігається, то самоподібна розмірність множини $C \oplus C_1$ рівна $\alpha = \log_9 7$. □

3 Згортка двох сингулярних розподілів канторівського типу

Нехай $\tau = \Delta^9_{\tau_1 \tau_2 ... \tau_n ...}$ і $\eta = \Delta^9_{\eta_1 \eta_2 ... \eta_n ...}$ — випадкові величини, дев'ятіркові цифри τ_n і η_n яких є незалежними випадковими величинами з розподілами $P\{\tau_n = i\} = p_i \geq 0$, $p_1^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 = 0$ і $P\{\eta_n = j\} = q_i \geq 0$, $j \in \overline{0, 16}$, $\sum\limits_{j=0}^{16} q_j = 1$, $\max\limits_i \{q_i\} \neq 1$.

Очевидно, що спектром функції розподілу випадкової величини τ є класична множина Кантора, міра Лебега якої рівна 0. Випадкова величина η має неперервний розподіл, оскільки $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_i \{P\{\tau_k = i\}\} = 0$. Її спектром розподілу є множина нульової міри Лебега. Отже η має сингулярний розподіл канторівського типу.

Розглядається випадкова величина $\xi = \tau + \eta$. Очевидно, що

$$\xi = \frac{\tau_1 + \eta_1}{9} + \frac{\tau_2 + \eta_2}{9^2} + ... + \frac{\tau_n + \eta_n}{9^n} + ... = \frac{\xi_1}{9} + \frac{\xi_2}{9^2} + ... + \frac{\xi_n}{9^n} + ...,$$

де $\xi_n \equiv \tau_n + \eta_n \in \{\eta_n, \eta_n + 2, \eta_n + 6, \eta_n + 8\}$. Спектром S_ξ випадкової величини ξ є арифметична сума спектрів випадкових величини η і τ, тобто $S_\xi = S_\eta \oplus S_\tau$.

Приклад 1. Якщо $\eta = \Delta^9_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_n\ldots}$ — випадкова величина, дев'ятіркові цифри η_n якої є незалежними випадковими величинами з розподілами: $P\{\eta_n = 0\} = q_0 > 0$, $P\{\eta_n = 8\} = q_8 > 0$, $P\{\eta_n = i\} = q_i = 0$, $i = \overline{1,7}$, $\sum\limits_{i=0}^{8} q_i = 1$, то розподіл цифр випадкової величини $\xi = \tau + \eta = \Delta_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$, де $\xi_n \in \{0, 2, 6, 8, 10, 14, 18\}$ визначається рівностями:

$P\{\xi_n = 0\} = P\{\tau_n = 0 \wedge \eta_n = 0\} = p_0q_0$, $P\{\xi_n = 2\} = P\{\tau_n = 2 \wedge \eta_n = 0\} = p_2q_0$,

$P\{\xi_n = 6\} = P\{\tau_n = 6 \wedge \eta_n = 0\} = p_6q_0$,

$P\{\xi_n = 8\} = P\{\tau_n = 8 \wedge \eta_n = 0\} + P\{\tau_n = 0 \wedge \eta_n = 8\} = p_8q_0 + p_0q_8$,

$P\{\xi_n = 10\} = P\{\tau_n = 2 \wedge \eta_n = 8\} = p_2q_8$, $P\{\xi_n = 14\} = P\{\tau_n = 6 \wedge \eta_n = 8\} = p_6q_8$,

$P\{\xi_n = 16\} = P\{\tau_n = 8 \wedge \eta_n = 8\} = p_8q_8$, $P\{\xi_n = i\} = 0$, де $i \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$,

оскільки випадкові величини τ_n і η_n незалежні.

Ввівши позначення для випадкової величини: $\xi = 2\zeta$, матимемо, що $\zeta = \Delta^9_{\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n\ldots}$ — випадкова величина дев'ятіркові цифри якої є випадковими величинами, що набувають значень $\{0, 1, 3, 5, 7, 8\}$ з розподілами:

$P\{\zeta_n = 0\} = P\{\xi_n = 0\} = p_0q_0$, $P\{\zeta_n = 1\} = P\{\xi_n = 2\} = p_2q_0 \equiv r_0$,

$P\{\zeta_n = 3\} = P\{\xi_n = 6\} = p_6q_0 \equiv r_3$, $P\{\zeta_n = 4\} = P\{\xi_n = 8\} = p_8q_0 + p_0q_8 \equiv r_4$,

$P\{\zeta_n = 5\} = P\{\xi_n = 10\} = p_2q_8 \equiv r_5$, $P\{\zeta_n = 7\} = P\{\xi_n = 14\} = p_6q_8 \equiv r_7$,

$P\{\zeta_n = 8\} = P\{\xi_n = 16\} = p_8q_8 \equiv r_8$, $P\{\zeta_n = i\} = 0$, $i \in \{2, 6\}$.

Лема 3. *Випадкова величина ζ має сингулярно неперервний розподіл канторівського типу, спектром якого є досконала, ніде не щільна множина нульової міри Лебега $C[9; A_9 \setminus \{2, 6\}]$.*

Доведення. Доведемо, що ζ є неперервно розподіленою випадковою величиною. Для цього покажемо, що ймовірність кожної одноточкової множини рівна нулю. Розглянемо циліндр m-го рангу дев'ятіркової системи зображення. Згідно з властивостями циліндрів $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta^9_{c_1c_2\ldots.c_m} = x_0 = \Delta^9_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$. Ймовірність того, що випадкова велична ζ набуває значення з циліндра $\Delta^9_{c_1c_2\ldots c_m}$ обчислюється за формулою:

$$P\{\zeta \in \Delta^9_{c_1c_2\ldots c_m}\} = P\{\zeta_1 = c_1 \wedge \zeta_2 = c_2 \wedge \ldots \wedge \zeta_m = c_m\} = \prod_{i=1}^{m} P\{\zeta_i = c_i\} = \prod_{i=1}^{m} r_{c_i}.$$

Тоді

$$P\{\zeta = x_0\} = \lim_{m\to\infty} P\{\zeta \in \Delta^9_{c_1c_2\ldots c_m}\} = \prod_{i=1}^{\infty} r_{c_i} \le \prod_{i=1}^{\infty} \max_{i=0,3,4,5,7,8}\{r_{c_i}\} = 0.$$

Оскільки множина $C[9; \{0, 1, 3, 5, 7, 8\}]$ є замкненою досконалою множиною, на якій зосереджена ймовірнісна міра, то вона є спектром S_ζ випадкової величини ζ. З урахуванням нуль-мірність спектра випливає, що ζ сингулярно розподілена. Оскільки $P\{\zeta_n = 2\} = P\{\zeta_n = 4\} = P\{\zeta_n = 6\} = 0$ для $n \in N$, то ζ має канторівський тип розподілу. □

Наслідок 2. *Випадкова величина $\xi = \eta + \tau$ має сингулярно неперервний розподіл канторівського типу, спектром якого є множина $S_\eta \oplus S_\tau = C_2[9; \{0, 2, 6, 8, 10, 14, 16\}]$.*

Приклад 2. Якщо $\eta = \Delta^9_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_n\ldots}$ випадкова величина, дев'ятіркові цифри η_n якої є незалежними випадковими величинами з розподілами $P\{\eta_n = i\} = q_i \ge 0$, $i = \overline{0,8}$, $\sum\limits_{i=0}^{8} q_i = q_0 + q_1 + q_7 + q_8 = 1$, то розподіл цифр випадкової величини $\xi = \tau + \eta = \Delta^9_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$,

де $\xi_n \in A_{17} \setminus \{4,5,11,12\}\}$ визначається з системи рівностей:
$P\{\xi_n = 0\} = P\{\tau_n = 0 \wedge \eta_n = 0\} = p_0 q_0 \equiv p'_0$,
$P\{\xi_n = 1\} = P\{\tau_n = 0 \wedge \eta_n = 1\} = p_0 q_1 \equiv p'_1$,
$P\{\xi_n = 2\} = P\{\tau_n = 2 \wedge \eta_n = 0\} = p_2 q_0 \equiv p'_2$,
$P\{\xi_n = 3\} = P\{\tau_n = 2 \wedge \eta_n = 1\} = p_2 q_1 \equiv p'_3$,
$P\{\xi_n = 6\} = P\{\tau_n = 6 \wedge \eta_n = 0\} = p_6 q_0 \equiv p'_6$,
$P\{\xi_n = 7\} = P\{\tau_n = 0 \wedge \eta_n = 7\} + P\{\tau_n = 6 \wedge \eta_n = 1\} = p_0 q_7 + p_6 q_1 \equiv p'_7$,
$P\{\xi_n = 8\} = P\{\tau_n = 8 \wedge \eta_n = 0\} + P\{\tau_n = 0 \wedge \eta_n = 8\} = p_8 q_0 + p_0 q_8 \equiv p'_8$,
$P\{\xi_n = 9\} = P\{\tau_n = 2 \wedge \eta_n = 7\} = p_2 q_7 \equiv p'_9$,
$P\{\xi_n = 10\} = P\{\tau_n = 2 \wedge \eta_n = 8\} = p_2 q_8 \equiv p'_{10}$,
$P\{\xi_n = 13\} = P\{\tau_n = 6 \wedge \eta_n = 7\} = p_6 q_7 \equiv p'_{13}$,
$P\{\xi_n = 14\} = P\{\tau_n = 6 \wedge \eta_n = 8\} = p_6 q_8 \equiv p'_{14}$,
$P\{\xi_n = 15\} = P\{\tau_n = 8 \wedge \eta_n = 7\} = p_8 q_7 \equiv p'_{15}$,
$P\{\xi_n = 16\} = P\{\tau_n = 8 \wedge \eta_n = 8\} = p_8 q_8 \equiv p'_{16}$,
$P\{\xi_n = 4\} = P\{\tau_n = 2 \wedge \eta_n = 2\} = P\{\tau_n = 4 \wedge \eta_n = 0\} = P\{\tau_n = 0 \wedge \eta_n = 4\} = 0 \equiv p'_4$,
$P\{\xi_n = 5\} = 0 \equiv p'_5$, $P\{\xi_n = 11\} = 0 \equiv p'_{11}$, $P\{\xi_n = 12\} = 0 \equiv p'_{12}$.

Лема 4. *Якщо для* $(17/9)$*-зображення числа* $x = \Delta_{c_1,c_2,\dots,c_m,c_{m+1},c_{m+2},\dots}$ *виконуються умови* $c_i \in \{0,6,13\}$, *а* $c_{i+1} \in \{0,3,6\}$, $i \in N$ *або* $c_i \in \{3,10,16\}$, *а* $c_{i+1} \in \{10,13,16\}$, $i \in N$ *та існує цифра* $c_k \in \overline{V} = \{4,5,11,12\}$, *то кожне зображення числа* x *містить цифри множини* $\overline{V}$.

Доведення. Не порушуючи загальності, нехай $c_{m+1} \in \overline{V}$, $c_{m+1} = 4$. Тоді число x має два зображення: $\Delta_{c_1,c_2,\dots,c_m,4,c_{m+2},\dots} = \Delta_{c_1,c_2,\dots,c_m-1,13,c_{m+2},\dots}$. Цифра $c_m - 1 \in \overline{V}$, якщо $c_m = 0$, $c_m = 6$, $c_m = 13$. Розглянемо інші зображення числа, беручи до уваги значення m-ої цифри:

1) якщо $c_m < 9$, то $c_m = 0,3,6$, то

$$\Delta_{c_1,c_2,\dots,c_{m-1},c_m,4,c_{m+2},\dots} = \Delta_{c_1,c_2,\dots,c_{m-1},c_m-1,13,c_{m+2},\dots}.$$

Цифра $c_{m-1} - 1 \in \overline{V}$, якщо $c_{m-1} = 0$ (у цьому випадку альтернативного зображення не існує), $c_{m-1} = 6$, $c_{m-1} = 13$;

2) якщо $c_m > 9$, то $c_m = 10,13,16$, то

$$\Delta_{c_1,c_2,\dots,c_{m-1},c_m,4,c_{m+2},\dots} = \Delta_{c_1,c_2,\dots,c_{m-1},c_m-1,13,c_{m+2},\dots}.$$

Цифра $c_{m-1} + 1 \in \overline{V}$, якщо $c_{m-1} = 3$, $c_{m-1} = 10$, $c_{m-1} = 16$ (у цьому випадку альтернативного зображення не існує).

Беручи до уваги значення $m-1$-ої цифри, проаналізуємо інші зображення числа:

1) якщо $c_{m-1} < 9$, тобто $c_{m-1} = 0,3,6$

$$\Delta_{c_1,c_2,\dots,c_{m-2},c_{m-1},c_m,4,c_{m+2},\dots} = \Delta_{c_1,c_2,\dots,c_{m-2}-1,c_{m-1}+9,c_m-1,13,c_{m+2},\dots}.$$

Цифра $c_{m-2} - 1 \in \overline{V}$, якщо $c_{m-2} = 0$ (у цьому випадку альтернативного зображення не існує), $c_{m-2} = 6$, $c_{m-2} = 13$;

2) якщо $c_{m-1} > 9$, то $c_{m-1} = 10, 13, 16$, то

$$\Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{m-2},c_{m-1},c_m,4,c_{m+2},\ldots} = \Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{m-2}+1,c_{m-1}-9,c_m-1,13,c_{m+2},\ldots}.$$

Цифра $c_{m-2}+1 \in \overline{V}$, якщо $c_{m-2} = 3$, $c_{m-2} = 10$, $c_{m-2} = 16$ (у цьому випадку альтернативного зображення не існує).

Аналогічно проаналізувавши всі значення цифр $c_{m-3},\ldots,c_2$, c_1 отримаємо те, що для того, щоб кожне зображення числа x містило цифри множини $\overline{V}$, необхідно щоб цифри зображення $x = \Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_m,c_{m+1},c_{m+2},\ldots}$ задовольняли умову лему. У випадку, коли $c_{m+1} = 5$ або $c_{m+1} = 11$ або $c_{m+1} = 12$ міркування аналогічні. $\square$

Лема 5. *Циліндрів m-го рангу $\Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{m-1},i}$, де $i \in \{4,5,11,12\}$, усі альтернативні зображення яких містять цифри множини $\overline{V} = \{4,5,11,12\}$ існує $2 \cdot 3^{m-1}$.*

Доведення. Згідно з лемою 4 для того, щоб кожне альтернативне зображення циліндра $\Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{m-1},i}$ містило цифру з множини необхідно, що цифри $c_i \in \{0,3,6,10,13,16\}$, причому, якщо $c_i = 0,6,13$, то $c_{i+1} = 0,3,6$ або, якщо $c_i = 3,10,16$, то $c_{i+1} = 10,13,16$ $i = 1,2,\ldots,m-2$. Тоді за правилом добутку таких циліндрів $\Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{m-1},i}$ з фіксованим значенням цифри i буде $6 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = 2 \cdot 3^{m-1}$. $\square$

Теорема 2. *Спектру S_ξ розподілу випадкової величини ξ належить злічення кількість відрізків, загальної довжини $\frac{5}{3}$, а саме: $C[9; A_{17} \setminus \overline{V}\}] \subset S_\xi$.*

Доведення. З урахуванням леми 4 і системи рівностей циліндрів:

$\Delta_{4,a} = \Delta_{5,a-9}$ і $\Delta_{3,a} = \Delta_{4,a-9}, \Delta_{5,a} = \Delta_{6,a-9}$, де $a \in \{9,10,11,12,13,14,15,16\}$;
аналогічно

$\Delta_{11,a} = \Delta_{12,a-9}$ і $\Delta_{10,a} = \Delta_{11,a-9}, \Delta_{11,a} = \Delta_{12,a-9}$, де $a \in \{9,10,11,12,13,14,15,16\}$,
множина S_ξ може бути отримана як різниця відрізка $[0;2]$ і системи перетинів

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{m-1},4} \cap \Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{m-1},5}, \ \bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{m-1},11} \cap \Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{m-1},12},$$

де $c_i \in \{0,3,6,10,13,16\}$, причому, якщо $c_i \in \{0,6,13\}$, то $c_{i+1} \in \{0,3,6\}$ або, якщо $c_i \in \{3,10,16\}$, то $c_{i+1} \in \{10,13,16\}$, $i = 1,2,\ldots,m-2$, тобто

$$S_\xi = [0;2] \setminus \{\bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{m-1},4} \cap \Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{m-1},5} \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{m-1},11} \cap \Delta_{c_1,c_2,\ldots,c_{m-1},12}\}.$$

Тоді

$$\lambda(S_\xi) = \lambda([0;2]) - \lambda(\bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1,\ldots,c_{m-1},4} \cap \Delta_{c_1,\ldots,c_{m-1},5}) - \lambda(\bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1,\ldots,c_{m-1},11} \cap \Delta_{c_1,\ldots,c_{m-1},12}).$$

Оскільки, $\lambda(\Delta_{c_1,\ldots,c_{m-1},4} \cap \Delta_{c_1,\ldots,c_{m-1},5}) = \frac{1}{9^m} = \lambda(\Delta_{c_1,\ldots,c_{m-1},11} \cap \Delta_{c_1,\ldots,c_{m-1},12})$, то

$$\lambda(S_\xi) = 2 - (\frac{2}{9^1} - \frac{2 \cdot 3}{9^2} - \frac{2 \cdot 3^2}{9^3} - \frac{2 \cdot 3^3}{9^4} - \ldots) = 2 - \frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{3}{9}} = \frac{5}{3}.$$ $\square$

Наслідок 3. *Випадова величина ξ є неперервною випадковою величиною, розподіл якої зосереджений на множині $S_\xi = C[9; A_{17} \setminus \{4,5,11,12\}]$.*

Зауваження 1. *Спектр S_ξ є множиною неповних сум ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, де $u_{4k-3} = \frac{1}{9^k}$, $u_{4k-2} = \frac{2}{9^k}$, $u_{4k-1} = \frac{6}{9^k}$, $u_{4k} = \frac{7}{9^k}$, $k \in N$.*

Список літератури

[**1**] Albeverio S., Gontcharenko Ya., Pratsiovytui M., Torbin G. *Convolutions of distributions of random variable with independent binary digits.* Random Operators and Stochastic Equations. 2007. Vol. 15, no.1. P.89–104.

[**2**] Goncharenko Ya.V., Pratisovytyi M.V., Tirbin G.M., *Topological and metric and fractal properties of the convolution of two singular distributions of random variables with independent binary digits.*. Theory of Probability and Mathematical Statistics 2002, No. 67, P.9–19.(in Ukrainian)

[**3**] Guthrie J. A., Nymann J. E. *The topological structure of the set of subsums of an infinite series.* Colloq. Math. 1988, **55** (2), P. 323–327, http://eudml.org/doc/265741.

[**4**] Kakeya S. *On the partial sums of an infinite series.* Tohoku Sci Rep., 1914, **3** (4), P. 159–164, DOI:10.11429/PTMPS1907.7.14250.

[**5**] Mendes P., Oliveira F. *On the topological structure of the arithmetic sum of two Cantor sets.* Nonlinearity, 1994, **7** (2), P. 329–343, doi: 10.1088/0951-7715/7/2/002.

[**6**] Mykytuk I.O., Pratsiovytyi M.V. *The binary number system with redundant digits and its corresponding metric number theory.* Scientific notes of the Dragomanov National Pedagogical Universyty. Physical and mathematical sciences 2003, 4, P. 270–290. (in Ukrainian)

[**7**] Nymann J. E. *Linear combination of Cantor sets.* Colloq. Math., 1995, **68**. P. 259–264, DOI: 10.2478/tmmp-2013-00

[**8**] Pratsiovytyi M.V. *Fractal approach to the study of singular distributions* — Kyiv: Nats. Pedagog. Mykhailo Dragomanov Univ., 1998. (in Ukrainian)

[**9**] Pratsiovytyi M.V. *Convolutions of singular distributions.* Additional NAS of Ukraine, 1997, № 9, P. 36–42. (in Ukrainian)

[**10**] Solomyak B. *On the measure of arithmetic sums of Cantor sets.* Indag. Mathem., N.S. 1997, **8**, P. 133–141, DOI:10.1016/S0019-3577(97)83357-5.

[**11**] Turbin A.F., Pratsiovytyi M.V. Fractal set, functions and distibutions. Naukova dumka, 1992, 208 p.

Надійшло 26.12.2022

Pratsiovytyi M.V., Ratushniak S.P., Symonenko Yu.O., Shpytuk D.S. *Convolution of two singular distributions: classic Cantor type and random variable with independent nine digits*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 204–212.

We consider distribution of random variable $\xi = \tau + \eta$, where τ and η independent random variables, moreover τ has classic Cantor type distribution and η is a random variable with independent identically distributed digits of the nine-digit representation. With additional conditions for the distributions of the digits η, sufficient conditions for the singularity of the Cantor type of the distribution ξ are specified. To substantiate the statements, a topological-metric analysis of the representation of numbers $x \in [0; 2]$ in the numerical system with base 9 and a seventeen-symbol alphabet (a set of numbers) is carried out. The geometry (positional and metric) of this representation is described by the properties of the corresponding cylindrical sets.