Bukovinian Math. Journal. 2022, **10**, 2, 144–155 Буковинський матем. журнал 2022, Т.10, №2, 144–155

Літовченко В.А. Горбатенко М.Ю.

Неоднорідні диференціальні рівняння векторного порядку з дисипативною параболічністю й додатним родом

Параболічність у сенсі як Петроського, так і Шилова має скалярний характер, вона не спроможна враховувати специфіку неоднорідності середовища. У зв'язку з цим на початку 70-х років С.Д. Ейдельман запропонував так звану $2\vec{b}$-параболічність, яка є природним узагальненням параболічності за Петровським на випадок анізотропного середовища. Детальне дослідження задачі Коші для рівнянь з такою параболічністю проведено в працях С.Д. Ейдельмана, С.Д. Івасишена, М.І. Матійчука та їх послідовників.

Розширенням параболічності за Шиловим на випадок анізотропних середовищ є $\{\vec{p}, \vec{h}\}$-параболічність. Клас рівнянь з такою параболічністю досить широкий, він охоплює класи Ейдельмана, Петровського, Шилова та дозволяє уніфікувати класичну теорію задачі Коші для параболічних рівнянь.

У даній роботі для неоднорідних $\{\vec{p}, \vec{h}\}$-параболічних рівнянь з векторним додатним родом досліджуються умови, за яких задача Коші в класі узагальнених початкових функцій типу розподілів Гельфанда і Шилова буде коректно розв'язною. При цьому, неоднорідності рівнянь є неперервними за сукупністю змінних функціями скінченної гладкості, які стосовно просторової змінної спадають, а за часовою змінною є необмеженими з інтегровною особливістю.

Ключові слова і фрази: неоднорідна задача Коші, об'ємний потенціал, параболічні рівняння векторного порядку, фундаментальний розв'язок.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine
e-mail: *v.litovchenko@chnu.edu.ua* *m.gorbatenko@chnu.edu.ua*

Вступ

На відміну від $2\vec{b}$-параболічних за Ейдельманом рівнянь із частинними похідними [1], у $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболічних рівняннях [2] векторний порядок $\vec{p}$ вже може не збігатися з векторним показником параболічності $\vec{h}$, що спричиняє ефект "дисипації параболічності", мірою якої слугує спеціальна характеристика рівняння – його векторний рід $\vec{\mu}$: $\vec{1}-(\vec{p}-\vec{h}) \le \vec{\mu} \le \vec{1}$. Тут і надалі, запис $\vec{\alpha}\mho\vec{\beta}$, де $\mho$ — деяке відношення, означатиме, що це відношення виконується для всіх відповідних координат векторів $\vec{\alpha}$ і $\vec{\beta}$. Параболічні рівняння, в яких $\vec{p} = \vec{h}$, це, зокрема, всі $2\vec{b}$-параболічні рівняння, мають рід $\vec{\mu} = \vec{1}$.

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 47D06, 47D62.

© Літовченко В.А. Горбатенко М.Ю., 2022

А для рівнянь з $\vec{p} \neq \vec{h}$, взагалі кажучи, рід $\vec{\mu} < \vec{1}$. І чим більше показник параболічності $\vec{h}$ відхиляється від порядку рівняння $\vec{p}$, тим більше його рід $\vec{\mu}$, зменшуючись, віддаляється від $\vec{1}$. Рівняння з такою дисипацією параболічно нестійкі до зміни своїх коефіцієнтів, навіть тих, які знаходяться при молодших похідних [3], що призводить до певних труднощів при побудові для них класичної теорії задачі Коші.

Теорія задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних рівнянь розвивалась у працях [4–10].

Дослідження задачі Коші для однорідних $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболічних рівнянь проводилось у працях [2, 11, 12]. Тут для таких рівнянь розроблено методику дослідження фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК), установлено коректну розв'язність цієї задачі в просторах типу S' розподілів І.М. Гельфанда і Г.Є. Шилова, описано максимальні класи їх розв'язків у рамках просторів типу S. Однак неоднорідні $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболічні рівняння та суміжні з ними питання ніким не досліджувались.

Дана робота присвячена дослідженню задачі Коші для неоднорідних $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболічних рівнянь з узагальненими початковими даними типу розподілів Гельфанда і Шилова за умови, що неоднорідності рівнянь є неперервними за сукупністю змінних, спадними за просторовою змінною та необмеженими за часом з інтегровною особливістю функціями, які за просторовою змінною мають обмежений ступінь гладкості.

Структура роботи така. У першому пункті сформульована постановка задачі та наведено необхідні відомості. Другий пункт присвячений дослідженню об'ємного потенціала відповідної задачі Коші. Достатні умови коректної розв'язності неоднорідної задачі Коші з'ясовуються в третьому пункті. Останній четвертий пункт – висновки.

1 Допоміжні відомості. Постановка задачі

Нехай $\mathbb{R}^n$ — дійсний простір розмірності $n \geq 1$, $\mathbb{R} := \mathbb{R}^1$; $\mathbb{Z}_+^n$ — множина всіх n-вимірних мультиіндексів, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{Z}_+^1$; i — уявна одиниця; $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток у просторі $\mathbb{R}^n$; $\|x\| := (x, x)^{1/2}$ для $x \in \mathbb{R}^n$; $|x + iy| := (x^2 + y^2)^{1/2}$, якщо $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$; $z^l := z_1^{l_1} \ldots z_n^{l_n}$, $|z|_+^l := |z_1|^{l_1} + \ldots + |z_n|^{l_n}$, якщо $z := (z_1; \ldots; z_n) \in \mathbb{R}^n$, $l := (l_1; \ldots; l_n) \in \mathbb{Z}_+^n$; S – простір Л.Шварца нескінченно диференційовних швидкоспадних функцій, визначених на $\mathbb{R}^n$, а S' – відповідний топологічно спряжений з S простір [13].

Клас усіх неперервно диференційовних на $\mathbb{R}^n$ до порядку $r \in \mathbb{Z}_+^n$ включно функцій, позначимо записом $\mathbb{C}^r(\mathbb{R}^n)$. І нехай $\mathbb{C}_l^r(\mathbb{R}^n)$, $l \in \mathbb{Z}_+^n$, – сукупність усіх елементів $\mathbb{C}^r(\mathbb{R}^n)$ таких, що

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+^n, k \leq r, \exists c_k > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n : |\partial_x^k \varphi(x)| \leq c_k (1 + \|x\|)^{-|l+k|_+}.$$

Для $\vec{\alpha} > \vec{0}$ і $\vec{\beta} > \vec{0}$ покладемо:

$$S_{\vec{\alpha}} = \{\varphi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n) |\ \exists A > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \exists c_k > 0 \forall q \in \mathbb{Z}_+^n \forall x \in \mathbb{R}^n : |x^q \partial_x^k \varphi(x)| \leq c_k A^{|q|_+} q^{\vec{\alpha} q}\};$$

$$S^{\vec{\beta}} = \{\varphi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n) |\ \exists B > 0 \forall q \in \mathbb{Z}_+^n \exists c_q > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \forall x \in \mathbb{R}^n : |x^q \partial_x^k \varphi(x)| \leq c_q B^{|k|_+} k^{\vec{\beta} k}\}.$$

З відповідними топологіями сукупності $S_{\vec{\alpha}}$ і $S^{\vec{\beta}}$ – зліченно-нормовані повні досконалі простори, які разом із $S_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}} := S_{\vec{\alpha}} \cap S^{\vec{\beta}}$ називають просторами типу S Гельфанда і Шилова [11, 13].

Простір $S_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}$ нетривіальний при $\vec{\alpha}+\vec{\beta}\geq\vec{1}$ і складається лише з тих функцій $\varphi\in\mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, що задовольняють нерівність

$$|\partial_x^k\varphi(x)|\leq cB^{|k|_+}k^{\vec{\beta}k}e^{-\delta|x|_+^{\vec{1}/\vec{\alpha}}},\quad k\in\mathbb{Z}_+^n, x\in\mathbb{R}^n,$$

з додатними сталими c, B і δ, залежними тільки від функції φ [11,13]. У просторах типу S визначені та неперервні операції додавання, множення та згортки, а також, оператор F перетворення Фур'є, причому виконуються наступні топологічні рівності: $F[S_{\vec{\alpha}}]=S^{\vec{\alpha}}$, $F[S^{\vec{\beta}}]=S_{\vec{\beta}}$, $F[S_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}]=S_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}$.

Розглянемо диференціальне рівняння з частинними похідними

$$\partial_t u(t;x)=A(t;i\partial_x)u(t;x)+f(t;x),\quad (t;x)\in\Pi_{(0;T]}:=(0;T]\times\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

в якому

$$A(t;i\partial_x)=\sum_{|k/\vec{p}|_+\leq 1}a_k(t)i^{|k|_+}\partial_x^k$$

– диференціальний вираз порядку $\vec{p}=(p_1;\ldots;p_n)>\vec{1}$ з комплексно значними неперервними коефіцієнтами $a_k(\cdot)$, який на множині $\Pi_{[0;T]}$ є рівномірно параболічним з векторним показником параболічності $\vec{h}$, $\vec{0}<\vec{h}\leq\vec{p}$, тобто таким, що

$$\exists\delta_1>0\,\exists\delta_2\geq 0\,\forall(t;\xi)\subset\Pi_{[0;T]}:\ \mathrm{Re}A(t;\xi)\leq-\delta_1|\xi|_+^{\vec{h}}+\delta_2.$$

Також вважатимемо, що векторний рід $\vec{\mu}$ рівняння (1) є додатним [11,14]: $\vec{0}<\vec{\mu}\leq\vec{1}$.

Позначемо через Φ' топологічно спряжений простір з простором $\Phi\in\{S^{\vec{\alpha}_0};S_{\vec{\beta}_0}^{\vec{\alpha}_0}\}$, де $\vec{\alpha}_0=\vec{1}/\vec{h}$, а $\vec{\beta}_0\geq\vec{\beta}_*=\vec{1}-\vec{\mu}/\vec{p}$, і задамо для рівняння (1) початкову умову

$$u(t;\cdot)\underset{t\to+0}{\longrightarrow}g,\quad g\in\Phi'. \tag{2}$$

Означення. *Розв'язком задачі Коші* (1), (2) *на множині* $\Pi_{[0;T]}$ *називається функція* u, *яка на* $\Pi_{(0;T]}$ *задовольняє рівняння* (1) *у звичайному розумінні, а початкову умову* (2) *– у сенсі збіжності в просторі* Φ'.

ФРЗК для рівняння (1) є функція

$$G(t,\tau;\cdot)=F^{-1}[\theta_\tau^t(\xi)](t,\tau;\cdot),\quad 0\leq\tau<t\leq T,$$

де $\theta_\tau^t(\xi)=\exp\{\int\limits_\tau^t A(\varsigma;\xi)d\varsigma\}$.

З результатів, одержаних у [11] випливає, що при кожних фіксованих $t\in(\tau;T]$ і $\tau\in[0;T)$ функція $G(t,\tau;\cdot)$ належить до простору $S_{\vec{\beta}_*}^{\vec{\alpha}_0}$ у випадку, коли $\vec{0}<\vec{\mu}\leq\vec{1}$, при цьому правильні такі оцінки:

$$|\partial_x^k G(t,\tau;x)|\leq c\prod_{j=1}^n(t-\tau)^{-\frac{1+k_j}{h_j}}B^{k_j}k_j^{\frac{k_j}{h_j}}\begin{cases} e^{-\delta\left(\frac{|x_j|}{(t-\tau)^{\mu_j/p_j}}\right)^{\frac{p_j}{p_j-\mu_j}}}, & \vec{0}<\vec{\mu}\leq\vec{1},\\ e^{-\delta\left(\frac{|x_j|}{(t-\tau)^{\mu_j/h_j}}\right)^{\frac{h_j}{h_j-\mu_j}}}, & \vec{\mu}\leq 0,\end{cases} \tag{3}$$

з додатними сталими c, B і δ.

Коректну розв'язність задачі Коші (1), (2) при $f=0$ характеризує наступне твердження [11].

Теорема 1. *Задача Коші (1), (2) при $f = 0$ на множині $\Pi_{[0;T]}$ має єдиний розв'язок $u(t;x)$. Цей розв'язок є диференційовною за змінною t та нескінченно диференційовною за змінною x функцією, який неперервно залежить від початкових даних, при цьому справджується рівність*

$$u(t;x) =< g(\xi), G(t,0;x-\xi) >, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]},$$

в якій кутові дужки $<,>$ позначають дію узагальненої функції на основну.

Надалі розв'язок задачі Коші (1), (2) при $f = 0$ будемо позначати u_0.

Зважаючи на лінійність рівняння (1), розв'язок задачі (1), (2) доцільно шукати у вигляді суми $u = u_0 + u_1$, де u_1 – розв'язок рівняння (1), який задовольняє початкову умову (2) при $g = 0$, тобто:

$$u_1(t;\cdot) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} 0. \tag{4}$$

Наше завдання полягає у з'ясуванні умов на функцію f, за яких об'ємний потенціал

$$u_1(t;x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau;x-\xi) f(\tau;\xi) d\xi$$

буде розв'язком задачі Коші (1), (4).

2 Об'ємний потенціал задачі Коші

Говоритимемо, що для функції f виконується умова (A), якщо ця функція неперервна на $\Pi_{(0;T]}$ за сукупністю змінних і $f(t;\cdot) \in \mathbb{C}_l^r(\mathbb{R}^n)$, $t \in (0;T]$, при цьому, для її похідних виконується оцінка

$$|\partial_x^k f(t;x)| \le \frac{c_k}{t^\alpha (1+\|x\|)^{|l+k|_+}}, \quad k \le r, \ (t;x) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{5}$$

з деяким $\alpha \in [0;1)$ та додатною величиною c_k, незалежною від змінних t та x.

Теорема 2. *Нехай для функції f виконується умова (A) при $l = 0$, а порядок $\vec{p}$, показник параболічності $\vec{h}$ і рід $\vec{\mu}$ диференціального рівняння (1) такі, що*

$$\Big| \frac{\vec{1}}{\vec{h}} - \frac{\vec{\mu}}{\vec{p}} \Big|_+ < 1, \tag{6}$$

тоді при кожному фіксованому $t \in (0;T]$ на множині $\mathbb{R}^n$ відповідний потенціал $u_1(t;\cdot)$ є диференційовною функцією до порядку r включно, для похідних якого правильна формула

$$\partial_x^k u_1(t;x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau;\xi) \partial_x^k f(\tau;x-\xi) d\xi, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}. \tag{7}$$

Для потенціалу $u_1(t;\cdot)$ існуватиме похідна вищого порядку $k > r$ у випадку, коли

$$\Big| \frac{\vec{1}+k-r}{\vec{h}} - \frac{\vec{\mu}}{\vec{p}} \Big|_+ < 1, \tag{8}$$

при цьому, справджується рівність

$$\partial_x^k u_1(t;x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k-r} G(t,\tau;x-\xi)\partial_\xi^r f(\tau;\xi)d\xi, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}. \qquad (9)$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли $k < r$. Формальним диференціювання під знаком інтеграла у зображенні

$$u_1(t;x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau;\xi) f(\tau;x-\xi)d\xi, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]},$$

одержуємо формулу (7).

Для обґрунтування правильності цієї формули, досить довести рівномірну збіжність стосовно змінної x на множині $\mathbb{R}^n$ інтеграла

$$\mathfrak{I}_k(t;x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} |G(t,\tau;\xi)||\partial_x^k f(\tau;x-\xi)|d\xi.$$

Проте ця збіжність стає очевидною, якщо зважити на оцінку (3), умови (A) та (6), згідно з якими для всіх $(t;x) \in \Pi_{(0;T]}$ виконується нерівність

$$\mathfrak{I}_k(t;x) \leq \hat{c}_k \int\limits_0^t \left(\tau^{-\alpha}(t-\tau)^{-\left|\frac{\vec{1}}{\vec{h}}\right|_+} \prod_{j=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\delta\left(\frac{|\xi_j|}{(t-\tau)^{\mu_j/p_j}}\right)^{\frac{p_j}{p_j-\mu_j}}} d\xi_j \right) d\tau =$$

$$= \hat{c}_k \int\limits_0^t \tau^{-\alpha}(t-\tau)^{-\left|\frac{\vec{1}}{\vec{h}}-\frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\right|_+} d\tau \prod_{j=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\delta|\zeta_j|^{\frac{p_j}{p_j-\mu_j}}} d\zeta_j \equiv \hat{c}_k E B\Big(1-\alpha, 1-\Big|\frac{\vec{1}}{\vec{h}}-\frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\Big|_+\Big) t^{1-\alpha-\left|\frac{\vec{1}}{\vec{h}}-\frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\right|_+},$$

де $B(\cdot,\cdot)$ – бета-функція,

$$E := \prod_{j=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\delta|\zeta_j|^{\frac{p_j}{p_j-\mu_j}}} d\zeta_j,$$

а додатна величина $\hat{c}_k$ залежить лише від k.

Нехай тепер $k > r$. У цьому випадку скористаємось рівністю

$$\partial_x^k G(t,\tau;x-\xi) = (-1)^{|r|_+}\partial_\xi^r \partial_x^{k-r} G(t,\tau;x-\xi),$$

згідно з якою, інтегруванням частинами приходимо до формального запису формули (9). Далі, як у попередньому випадку, обґрунтовуємо правомірність здійснених перетворень.

Теорема доведена. □

Наслідок 1. *Нехай функція f задовольняє умову (A) при $l = 0$ і $r \geq \vec{p}$, а також виконується співвідношення* (6), *тоді*

$$A(t;i\partial_x)u_1(t;x) = \sum_{|k/\vec{p}|_+ \leq 1} a_k(t) i^{|k|_+} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau;\xi)\partial_x^k f(\tau;x-\xi)d\xi, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}.$$

Якщо ж $\vec{p} > r$, то за умови виконання співвідношення

$$\Big|\frac{\vec{1}+\vec{p}-r}{\vec{h}} - \frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\Big|_+ < 1, \tag{10}$$

правильною буде рівність

$$A(t;i\partial_x)u_1(t;x) = \sum_{|k/\vec{p}|_+ \le 1 \text{ and } k \le r} a_k(t) i^{|k|_+} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau;\xi)\partial_x^k f(\tau;x-\xi)d\xi +$$

$$+ \sum_{|k/\vec{p}|_+ \le 1 \text{ and } r<k} a_k(t) i^{|k|_+} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k-r} G(t,\tau;x-\xi)\partial_\xi^r f(\tau;\xi)d\xi, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}.$$

Надалі нам знадобиться таке допоміжне твердження.

Лема 1. *Нехай $\varphi(\cdot) \in \mathbb{C}_l^r(\mathbb{R}^n)$, тоді при $|l|_+ > n$ і $|r|_+ > n$ виконується кожне з наступних граничних співвідношень:*

$$\big(G*\varphi\big)(t,\tau;x) \underset{t\to\tau+0}{\overset{x\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} \varphi(x); \quad \big(G*\varphi\big)(t,\tau;x) \underset{\tau\to t-0}{\overset{x\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} \varphi(x) \tag{11}$$

(тут йдеться про рівномірну збіжність на кожній компактній множині $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$).

Оцінки (3) ФРЗК G дозволяють доведення Леми 1 провести за схемою доведення аналогічної Леми 2 з [15].

Диференційовність функції u_1 за змінною t характеризує наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай для функції f виконується умова (A) при $|l|_+ > n$ та $|r|_+ > n$, тоді відповідний потенціал u_1 на множині $\Pi_{(0;T]}$ є диференційовною функцією за змінною t за умови, що:*
1) $r \ge \vec{p}$ і виконується співвідношення (6), при цьому правильною буде рівність

$$\partial_t u_1(t;x) = f(t;x) + \sum_{|k/\vec{p}|_+ \le 1} a_k(t) i^{|k|_+} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau;\xi)\partial_x^k f(\tau;x-\xi)d\xi; \tag{12}$$

2) $\vec{p} > r$ і виконується співвідношення (10), при цьому правильною буде рівність

$$\partial_t u_1(t;x) = f(t;x) + \sum_{|k/\vec{p}|_+ \le 1 \text{ and } k \le r} a_k(t) i^{|k|_+} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau;\xi)\partial_x^k f(\tau;x-\xi)d\xi +$$

$$+ \sum_{|k/\vec{p}|_+ \le 1 \text{ and } r<k} a_k(t) i^{|k|_+} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k-r} G(t,\tau;x-\xi)\partial_\xi^r f(\tau;\xi)d\xi. \tag{13}$$

Доведення. Зафіксуємо довільно $t \in (0; T]$ і розглянемо допоміжну функцію

$$u_1^\varepsilon(t;x) = \int\limits_0^{t-\varepsilon} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau;x-\xi) f(\tau;\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < \varepsilon < t/2.$$

Очевидно, що

$$\partial_t u_1^\varepsilon(t;x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,t-\varepsilon;x-\xi) f(t-\varepsilon;\xi) d\xi + \int\limits_0^{t-\varepsilon} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t,\tau;x-\xi) f(\tau;\xi) d\xi.$$

Знайдемо тепер границю $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \partial_t u_1^\varepsilon(t;x)$. Урахувавши властивості функції f, безпосередньо з твердження Леми 1 одержуємо, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,t-\varepsilon;x-\xi) f(t-\varepsilon;\xi) d\xi \underset{\varepsilon\to+0}{\to} f(t;x).$$

Оскільки G розв'язок рівняння (1) при $f = 0$, то

$$\int\limits_0^{t-\varepsilon} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t,\tau;x-\xi) f(\tau;\xi) d\xi = \sum_{|k/\vec{p}|_+ \le 1} a_k(t) i^{|k|_+} \int\limits_0^{t-\varepsilon} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x-\xi}^k G(t,\tau;x-\xi) f(\tau;\xi) d\xi.$$

Нехай $r > \vec{p}$ і виконується співвідношення (6). Здійснивши в останньому інтегралі правої частини попередньої рівності заміну змінної інтегрування за правилом $y = x - \xi$ та зінтегрувавши частинами k разів, прийдемо до такої рівності:

$$\int\limits_0^{t-\varepsilon} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x-\xi}^k G(t,\tau;x-\xi) f(\tau;\xi) d\xi = \int\limits_0^{t-\varepsilon} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau;y) \partial_{x-y}^k f(\tau;x-y) dy.$$

Далі, скориставшись оцінкою (3) для функції G та врахувавши виконання умови (A) для f, знайдемо:

$$\Big| \int\limits_{t-\varepsilon}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau;y) \partial_{x-y}^k f(\tau;x-y) dy \Big| \le$$

$$\le \hat{c}_k \int\limits_{t-\varepsilon}^{t} \left(\tau^{-\alpha} (t-\tau)^{-\left|\frac{\vec{1}}{\vec{h}}\right|_+} \prod_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\delta\left(\frac{|\xi_j|}{(t-\tau)^{\mu_j/p_j}}\right)^{\frac{p_j}{p_j-\mu_j}}} d\xi_j \right) d\tau =$$

$$= \hat{c}_k E \int\limits_{t-\varepsilon}^{t} \tau^{-\alpha} (t-\tau)^{-\left|\frac{\vec{1}}{\vec{h}} - \frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\right|_+} d\tau \le \hat{c}_k E \Big(\frac{2}{t}\Big)^\alpha \int\limits_{t-\varepsilon}^{t} (t-\tau)^{-\left|\frac{\vec{1}}{\vec{h}} - \frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\right|_+} d\tau = b_{k,t} \varepsilon^{1-\left|\frac{\vec{1}}{\vec{h}} - \frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\right|_+}$$

(тут величина $b_{k,t}$ не залежить від ε).

Одержана оцінка в цьому випадку забезпечує правильність граничного співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{t-\varepsilon}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial^k_{x-\xi}G(t,\tau;x-\xi)f(\tau;\xi)d\xi=\int\limits_0^{t}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(t,\tau;y)\partial^k_{x-y}f(\tau;x-y)dy,$$

а відтак, виконання рівності (15).

Випадок $\vec{p}>r$ разом з виконанням співвідношення (10) реалізується аналогічно.

Теорема доведена. $\square$

Далі, з'ясуємо питання про існування граничного значення потенціалу u_1 на початковій гіперплощині $t=0$.

Якщо припустити виконання умови

$$\alpha+\Big|\frac{\vec{1}}{\vec{h}}-\frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\Big|_+<1, \tag{14}$$

а також те, що функція f задовольняє умову (A) при $l=0$, то згідно з оцінкою (3), для всіх $(t;x)\in\Pi_{(0;T]}$ маємо:

$$|u_1(t;x)|\leq\int\limits_0^{t}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big|G(t,\tau;x-\xi)\big||f(\tau;\xi)|d\xi\leq$$

$$\leq c\int\limits_0^{t}\left(\tau^{-\alpha}(t-\tau)^{-\left|\frac{\vec{1}}{\vec{h}}\right|_+}\prod_{j=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-\delta\left(\frac{|\xi_j|}{(t-\tau)^{\mu_j/p_j}}\right)^{\frac{p_j}{p_j-\mu_j}}}d\xi_j\right)d\tau=$$

$$=cE\int\limits_0^{t}\tau^{-\alpha}(t-\tau)^{-\left|\frac{\vec{1}}{\vec{h}}-\frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\right|_+}d\tau=bt^{1-\alpha-\left|\frac{\vec{1}}{\vec{h}}-\frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\right|_+}.$$

Звідси одержуємо виконання граничного співвідношення (4), при цьому прямування u_1 до нуля відбувається рівномірно стосовно змінної x на $\mathbb{R}^n$.

Отже, правильне наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай для функції f виконуються умова (A) при $l=0$ і нерівність (14), тоді для відповідного потенціалу $u_1(t;\cdot)$ – правильне співвідношення*

$$u_1(t;x)\underset{t\to+0}{\overset{x\in\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows}}0.$$

У наступному пункті досліджується задача Коші для неоднорідного рівняння (1).

3 Задача Коші

Одержані раніше відомості про об'ємний потенціал u_1 дозволяють нам зробити певні висновки про коректну розв'язність неоднорідної задачі Коші для $\{\vec{p},\vec{h}\}$-параболічних рівнянь.

Теорема 5. *Нехай $g \in \Phi'$, а функція f задовольняє умову (A) при $|l|_+ > n$ та $|r|_+ > n$, тоді відповідна задача Коші (1), (2) на множині $\Pi_{(0;T]}$ буде коректно розв'язною та її розв'язок зображуватиметься формулою*

$$u(t;x) =< g(\xi), G(t,0;x-\xi) > + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau;x-\xi) f(\tau;\xi) d\xi, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}, \qquad (15)$$

за умови, що виконується нерівність (14) при $r \geq \vec{p}$ або, нерівність

$$\alpha + \Big|\frac{\vec{1}+\vec{p}-r}{\vec{h}} - \frac{\vec{\mu}}{\vec{p}}\Big|_+ < 1$$

при $\vec{p} > r$. При цьому, розв'язок u буде один раз диференційовний за змінною t, а за змінною x - до порядку $\max\{r,\vec{p}\}$ включно.

Доведення. Запишемо рівність (15) у компактній формі: $u = u_0 + u_1$. З тверджень Теорем 1–3, випливає зазначена у Теоремі 5 гладкість функції u.

Безпосередньо з Наслідку 1 і тверджень Теорем 3, 4, одержуємо, що u_1 – розв'язок задачі Коші (1), (3).

Отже, u – класичний розв'язок задачі Коші (1), (2) на множині $\Pi_{(0;T]}$.

Обгрунтуємо єдиність розв'язку цієї задачі. Припустимо, що існують два розв'язки $\hat{u}$ і $\breve{u}$ задачі Коші (1), (2). Їх різниця $u = \hat{u} - \breve{u}$ буде розв'язком однорідної задачі:

$$\partial_t u(t;x) = A(t;i\partial_x)u(t;x); \quad u(t;\cdot)_{|t=0} = 0.$$

Однак, згідно з Теоремою 1, ця задача має лише нульовий розв'язок: $u = 0$. Тоді $\hat{u} = \breve{u}$ і задача Коші (1), (2) на множині $\Pi_{(0;T]}$ має єдиний розв'язок (15). Цей розв'язок неперервно залежить від початкових даних, оскільки таким є розв'язок u_0 задачі Коші (1), (2) при $f = 0$.

Теорема доведена. □

Як уже зазначалося, початкова умова (2) розуміється в сенсі слабкої збіжності в просторі Φ' тому, що початкова функція g – функціонал з Φ'. Проте, якщо цей функціонал має "хороші" властивості, то може спостерігатися ефект посилення збіжності в умові (2). Зокрема, якщо g є регулярною узагальненою функцією, породженою звичайною функцією $g(\cdot)$ із класу $\mathbb{C}_l^r(\mathbb{R}^n)$, то

$$u_0(t;x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,0;x-\xi) g(\xi) d\xi, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]},$$

і за умови, що $|l|_+ > n$ і $|r|_+ > n$, початкову умову (2) можна розглядати вже як рівномірну збіжність стосовно просторової змінної x на кожній компактній множині $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$:

$$u(t;x) \underset{t\to+0}{\overset{x\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} g(x).$$

Цей факт стає очевидним, якщо зважити на твердження Леми 1, Теореми 4 і на те, що $u = u_0 + u_1$.

Зауваження. *Одержані тут результати гармонічно доповнюють і розширюють результати досліджень, проведених у [10, 15].*

4 Висновки

Знайдено достатні умови на неоднорідності $\{\vec{p}, \vec{h}\}$-параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, за яких задача Коші для таких рівнянь у класі узагальнених початкових даних типу розподілів Гельфанда і Шилова має єдиний класичний розв'язок, який неперервно залежить від початкових даних.

Список літератури

[1] Эйдельман С.Д. *Об одном классе параболических систем* Докл. АН СССР. 1960, **133** (1), 40–43.

[2] Литовченко В.А. *Задача Коши для $\{\vec{p}, \vec{h}\}$-параболических уравнений с коэфициентами, зависящими от времени* Матем. заметки. 2005, **77** (3), 395–411. doi: 10.1007/s11006-005-0036-9

[3] У Хоу–синь *Об определении параболичности систем уравнений в частных производных* Успехи матем. наук. 1960, **15** (6), 157–161.

[4] Матийчук М.И., Эйдельман С.Д. *О фундаментальных решениях и задаче Коши для параболических систем, коэффициенты которых удовлетворяют условию Динин* Труды семинара по функц. анализу. Воронеж. 1967, **9**, 54–83.

[5] Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д. *$2\vec{b}$-параболические системы* Труды семинара по функц. анализу. Киев: Ин-т матем. АН УССР. 1968, **1**, 3–175.

[6] Ивасишен С.Д. *Об интегральных представления и свойстве Фату для решений параболических систем* Успехи матем. наук. 1986, **41** (4), 173–174.

[7] Ивасишен С.Д. *Интегральное представление и начальные значения решений $2\vec{b}$-параболических систем* Укр. матем. журн. 1990, **42** (4), 500–506.

[8] Івасишен С.Д., Пасічник Г.С. *Про задачу Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами* Укр. матем. журн. 2000, **52** (11), 1484–1496.

[9] Городецкий В.В. *О локализации решений задачи Коши для $2\vec{b}$-параболических систем в классах обобщенных функций* Дифф. уравн. 1988, **24** (2), 348–350.

[10] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudodifferential equations of parabolic type. Basel-Boston-Berlin: Birkhaser, 2004.

[11] Літовченко В.А. Коректна розв'язність задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних систем у просторах нескінченно диференційовних функцій. Автореф. дис. ... докт. фіз.-мат. наук: 01.01.02. Київ, 2009.

[12] Літовченко В.А. *Фундаментальний розв'язок задачі Коші для $\{\vec{p},\vec{h}\}$-параболічних систем зі змінними коефіцієнтами* Нелін. колив. 2018, **21** (2), 189–196. https://doi.org/10.1007/s10958-019-04537-x

[13] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958.

[14] Гельфанд И.М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.

[15] Dovzhytska I.M. *The Cauchy problem for inhomogeneous parabolic Shilov equations* Carpathian Math. Publ. 2021, **13** (2), 475–484. https://doi.org/10.15330/cmp.13.2.475-484

Список літератури

[1] Eidelman S.D. *About one class of parabolic systems* Dokl. AN SSSR. 1960, **133** (1), 40–43. (in Russian)

[2] V. Litovchenko *Cauchy problem for $\{\vec{p};\vec{h}\}$-parabolic equations with time-dependent coefficients* Math. Notes. 2005, **77** (3-4), 364–379. doi: 10.1007/s11006-005-0036-9

[3] U. Hou-Sin *On the definition of parabolicity of systems of equations with partial derivatives* Uspekhi Mat. Nauk. 1960, **15** (6), 157–161. (in Russian)

[4] Matyichuk M.I., Eidelman S.D. *On fundamental solutions and the Cauchy problem for parabolic systems whose coefficients satisfy the Dinin condition* Proceedings of the seminar on functional analysis. Voronezh. 1967, **9**, 54–83. (in Russian)

[5] Ivasishen S.D., Eidelman S.D. *$2\vec{b}$-parabolic systems* Proceedings of the seminar on functional analysis. Kyiv: Institute of Mathematics AN USSR. 1968, **1**, 3–175. (in Russian)

[6] Ivasishen S.D. *On integral representations and the Fatu property for solutions of parabolic systems* Uspekhi Mat. Nauk. 1986, **41** (4), 173–174. (in Russian)

[7] Ivasishen S.D. *Integral representation and initial values of solutions of $2\vec{b}$-parabolic systems* Ukr. Math. J. 1990, **42** (4), 500–506. (in Russian)

[8] Ivasishen S.D., Pasichnik G.S. *On the Cauchy problem for $2\vec{b}$-parabolic systems with increasing coefficients* Ukr. Math. J. 2000, **52** (11), 1484–1496. (in Ukrainian)

[9] Gorodetskii V.V. *On the localization of solutions of the Cauchy problem for $2\vec{b}$-parabolic systems in classes of generalized functions* Diff. Equat. 1988, **24** (2), 348–350. (in Russian)

[10] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudodifferential equations of parabolic type. Basel-Boston-Berlin: Birkhaser, 2004.

[11] Litovchenko V.A. Correct solvability of the Cauchy problem for parabolic pseudodifferential systems in spaces of infinitely differentiable functions. Autoref. thesis ... Dr. physics and mathematics Sciences: 01.01.02. Kyiv, 2009. (in Ukrainian)

[12] Litovchenko V.A. *Fundamental Solution of the Cauchy Problem for $\{\vec{p};\vec{h}\}$-parabolic systems with variable coefficients* J. Math. Sci. 2019, **243**, 230–239. https://doi.org/10.1007/s10958-019-04537-x

[13] I. Gel'fand and G. Shilov Generalized Functions. Vol. 3. Theory of Differential Equations. Boston, MA: Academic Press, 1967.

[14] I. M. Gel'fand and G. E. Shilov Spaces of Basic and Generalized Functions. Moscow: Gos. Izd. Fiz. Mat. Lit., 1958. (in Russian)

[15] Dovzhytska I.M. *The Cauchy problem for inhomogeneous parabolic Shilov equations* Carpathian Math. Publ. 2021, **13** (2), 475–484. https://doi.org/10.15330/cmp.13.2.475-484

Надійшло 04.11.2022

Litovchenko V.A. Gorbatenko M.Y. *Inhomogeneous differential equations of vector order with dissipative parabolicity and positive genus*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 144–155.

Parabolicity in the sense of both Petrosky and Shilov has a scalar character. It is not able to take into account the specificity of the heterogeneity of the environment. In this regard, in the early 70-s, S.D. Eidelman proposed the so-called $2\vec{b}$-parabolicity, which is a natural generalization of the Petrovsky parabolicity for the case of an anisotropic medium. A detailed study of the Cauchy problem for equations with such parabolicity was carried out in the works of S.D. Eidelman, S.D. Ivasishena, M.I. Matiichuk and their students.

An extension of parabolicity according to Shilov for the case of anisotropic media is $\{\vec{p}, \vec{h}\}$-parabolicity. The class of equations with such parabolicity is quite broad, it includes the classes of Eidelman, Petrovskii, and Shilov and allows unifying the classical theory of the Cauchy problem for parabolic equations.

In this work, for inhomogeneous $\{\vec{p}, \vec{h}\}$-parabolic equations with vector positive genus, the conditions under which the Cauchy problem in the class of generalized initial functions of the type of Gelfand and Shilov distributions will be correctly solvable are investigated. At the same time, the inhomogeneities of the equations are continuous functions of finite smoothness with respect to the set of variables, which decrease with respect to the spatial variable, and are unbounded with the integrable feature with respect to the time variable.