Ільків В.С., Страп Н.І., Волянська І.І.

Нелокальна крайова задача у просторах експоненційного типу рядів Діріхле-Тейлора для рівняння з оператором комплексного диференціювання

Досліджено нелокальну крайову задачу для рівняння з частинними похідними з оператором узагальненого диференціювання $B = z\dfrac{\partial}{\partial z}$, який діє на функції скалярної комплексної змінної z. Встановлено умови розв'язності даної задачі у просторах рядів Діріхле-Тейлора, побудовано формули для розв'язку. Показано, що розглядувана задача є коректною за Адамаром. Малі знаменників, які виникають при побудові розв'язку, не є малими і оцінюються знизу деякими сталими.

Ключові слова і фрази: нелокальна крайова задача, комплексна змінна, простори експоненційного типу, оператор узагальненого диференціювання.

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine
e-mail: *ilkivv@i.ua (Il'kiv V.S.), n.strap@i.ua (Strap N.I.), i.volyanska@i.ua (Volyanska I.I.)*

Вступ

Встановлення умов розв'язності нелокальних крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними та диференціально-операторних рівнянь є актуальним напрямом розвитку теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними [1, 2, 4, 6, 10]. У загальному випадку такі задачі є некоректними за Адамаром, а їх розв'язність залежить від проблеми малих знаменників і коректність забезпечується вибором області розгляду та накладанням додаткових умов на коефіцієнти рівнянь та параметри нелокальних умов.

Вагомий внесок у дослідженнях крайових задач для багатьох класів рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними у обмежених за просторовою змінною областях належить Б. Й. Пташнику та його учням, які на основі метричного підходу встановили умови однозначної розв'язності розглядуваних задач у різних функціональних просторах для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, компонентами яких є параметри областей, коефіцієнти рівнянь та крайових умов [3, 8, 9, 11].

УДК 517.946
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35A01, 35A02.

Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними зі сталими та змінними коефіцієнтами досліджуються також і у необмежених областях. Зокрема, для конструктивної побудови розв'язків нелокальних задач у працях [5, 7] застосовано диференціально-символьний метод відокремлення змінних. У роботі [12] отримано умови коректної розв'язності задачі з нелокальними за часовою змінною умовами для рівняння із частинними похідними другого порядку в необмеженій за просторовою змінною смузі, у припущенні, що дійсні частини коренів характеристичного рівняння не є нульовими.

Дана робота присвячена дослідженню умов коректної розв'язності задачі з нелокальни-ми крайовими умовами для диференціально-операторного рівняння з частинними похідними у випадку однієї просторової змінної. Доведено теорему єдиності та теореми існування розв'язку задачі у просторах рядів Діріхле-Тейлора. Показано коректність за Адамаром задачі, що відрізняє її від некоректної за Адамаром задачі з багатьма просторовими комплексними змінними, розв'язність якої пов'язана з проблемою малих знаменників.

1 Простори функцій, постановка задачі

Позначимо $\mathcal{S}$ — область з множини $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\mathcal{D}=[0,T]\times\mathcal{S}$, де $T>0$.

Введемо та зафіксуємо множину

$$\mathcal{N}=\{\nu_k\in\mathbb{R}\colon k\in\mathbb{Z}\}$$

попарно рівних дійсних чисел, яку будемо називати спектром функцій, якщо вона немає скінченних точок скупчення, тобто $|\nu_k|\to+\infty$ при $|k|\to+\infty$, послідовність ν_k зростає при зростанні k, $\nu_0=0$ і $\nu_k/k>0$, якщо $k>0$. Використаємо цю множину при означенні просторів Діріхле–Тейлора, у позначенні яких відповідно присутня буква $\mathcal{N}$.

Нехай $\mathbf{W}\mathcal{N}$ — лінійний простір скінченних сум вигляду $P(z)=\sum\limits_k P_k z^{\nu_k}$, де $z\in\mathcal{S}$, P_k — комплексні коефіцієнти, $k\in\mathbb{Z}$. Це простір основних функцій. Тому кожну основну функцію $P(z)$ можна подати сумою трьох доданків $P(z)=P_0+P_1(z)+P_2(1/z)$, де $P_1(z)=\sum\limits_{k>0}P_k z^{\nu_k}$ і $P_2(w)=\sum\limits_{k<0}P_k w^{-\nu_k}$ — аналітичні в області S функції, причому $P_1(0)=P_2(0)=0$.

Простір $\mathbf{W}\mathcal{N}'$ — спряжений простір з простором $\mathbf{W}\mathcal{N}$; це простір узагальнених функцій, які є формальними рядами

$$Q(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}Q_k z^{\nu_k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}Q_k z^{\nu_k},$$

що діють на основну функцію $P\in\mathbf{W}\mathcal{N}$ за таким правилом: $\langle Q,P\rangle=\sum\limits_k Q_k\bar{P}_k$.

Введемо функціональні простори експоненційного типу: $\mathbf{E}\mathcal{N}^{\beta}_{q}(\mathcal{S})$, де $\beta\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}$, — гільбертів простір функцій $\psi=\psi(z)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\psi_k z^{\nu_k}$ зі спектром $\mathcal{N}$, який отриманий поповненням множини основних функцій $\mathbf{W}\mathcal{N}$ за нормою

$$\|\psi\|_{\mathbf{E}\mathcal{N}_q^\beta(\mathcal{S})} = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{\nu}_k^{2q} e^{2\tilde{\nu}_k\beta}|\psi_k|^2\Big)^{1/2}, \qquad \tilde{\nu}_k = \sqrt{1+\nu_k^2};$$

$\mathbf{E}\mathcal{N}_{q,n}^\beta(\mathcal{D})$, де $\beta\colon [0,T]\to\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, — банахів простір таких функцій $u=u(t,z)$, похідні $\dfrac{\partial^r u}{\partial t^r}$ яких визначені для $r=0,1,\ldots,n$ формулою $\dfrac{\partial^r u}{\partial t^r} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k^{(r)}(t)z^{\nu_k}$, і функції $t\mapsto \Big\|\dfrac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r}\Big\|^2_{\mathbf{E}\mathcal{N}_{q-r}^{\beta(t)}(\mathcal{S})}$ є неперервними на $[0,T]$. Квадрат норми функції u у просторі $\mathbf{E}\mathcal{N}_{q,n}^\beta(\mathcal{D})$ обчислюється за формулою

$$\|u\|^2_{\mathbf{E}\mathcal{N}_{q,n}^\beta(\mathcal{D})} = \sum_{r=0}^n \max_{[0,T]} \Big\|\frac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r}\Big\|^2_{\mathbf{E}\mathcal{N}_{q-r}^{\beta(t)}(\mathcal{S})}.$$

Функція β вказує на експоненційну (показникову) гладкість елементів простору $\mathbf{E}\mathcal{N}_{q,n}^\beta(\mathcal{D})$, а число q — на степеневу гладкість. Зростання q чи β означає звуження згаданого простору та простору $\mathbf{E}\mathcal{N}_q^\beta(\mathcal{S})$.

Зауважимо, що $B^s\psi\in\mathbf{E}\mathcal{N}_{q-s}^\beta(\mathcal{S})$ для всіх $s\in\mathbb{N}$, якщо $\psi\in\mathbf{E}\mathcal{N}_q^\beta(\mathcal{S})$, де B — оператор узагальненого диференціювання, тобто $B\psi = z\dfrac{\partial\psi}{\partial z}$, а степені оператора B визначено стандартними формулами $B^0\psi=\psi$, $B^s\psi = B(B^{s-1}\psi)$ при $s\in\mathbb{N}$. Зокрема, для довільного $\nu\in\mathbb{R}$ маємо $B^s\big(z^\nu\big)=\nu^s z^\nu$, тому z^ν — власні функції оператора B, яким відповідають власні значення ν.

В області $\mathcal{D}$ розглянуто задачу з нелокальними умовами

$$Lu = \sum_{s_0+s_1\le n} a_{s_0,s_1} B^{s_1}\frac{\partial^{s_0}u}{\partial t^{s_0}} = 0, \tag{1}$$

$$M_m u = \mu\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\Big|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\Big|_{t=T} = \varphi_m, \quad m=0,1,\ldots,n-1, \tag{2}$$

де $a_{s_0,s_1}\in\mathbb{C}$, $\mu\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $a_{n,0}=1$, $u=u(t,z)$ — шукана функція, а $\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}$ — задані функції змінної z.

Якщо виконується умова $u\in\mathbf{E}\mathcal{N}_{q,n}^\beta(\mathcal{D})$ для елемента $u=\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(t)z^{\nu_k}$, то вірними є формули $Bu=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\nu_k u_k(t)z^{\nu_k}\in\mathbf{E}\mathcal{N}_{q-1,n}^\beta(\mathcal{D})$, $Lu=\sum_{k\in\mathbb{Z}} L\Big(\dfrac{d}{dt},\nu_k\Big)u_k(t)z^{\nu_k}\in\mathbf{E}\mathcal{N}_{q-n,0}^\beta(\mathcal{D})$ і $M_m u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} M_m u_k(t)z^{\nu_k}\in\mathbf{E}\mathcal{N}_{q-m}^\beta(\mathcal{S})$ для $m=0,1,\ldots,n-1$.

Під розв'язком задачі (1), (2) будемо розуміти функцію $u=u(t,z)\in C^n([0,T],\mathbf{W}\mathcal{N}')$, яка задовольняє рівняння (1) і умови (2) та належить до простору $\mathbf{E}\mathcal{N}_{q,n}^\beta(\mathcal{D})$.

Для існування розв'язку задачі (1), (2) необхідно, щоб функції φ_m належали до просторів $\mathbf{E}\mathcal{N}_{q-m}^\beta(\mathcal{S})$ при $m=0,1,\ldots,n-1$ відповідно. Це твердження є наслідком з означення розв'язку задачі та властивостей просторів $\mathbf{E}\mathcal{N}_{q,n}^\beta(\mathcal{D})$ і $\mathbf{E}\mathcal{N}_q^\beta(\mathcal{S})$.

2 Побудова розв'язку, теорема єдиності

Розв'язок задачі (1), (2) має вигляд ряду

$$u(t,z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(t)z^{\nu_k}, \tag{3}$$

де коефіцієнти $u_k = u_k(t)$ — невідомі функції, які треба визначити.

Запишемо оператор L з рівняння (1) у вигляді суми $Lu = \sum_{j=0}^{n} b_j(B)\frac{\partial^{n-j}}{\partial t^{n-j}}$, де оператор $b_j(B) = \sum_{s_1=0}^{j} a_{n-j,s_1}B^{s_1}$, $j = 0,1,\ldots,n$, є многочленом не вище j-го степеня від оператора B, зокрема, $b_0(B)$ — одиничний оператор.

Функція u_k з формули (3) для кожного $k \in \mathbb{Z}$ є класичним розв'язком відповідної задачі для звичайного диференціального рівняння, а саме задачі:

$$u_k^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} b_j(\nu_k)u_k^{(n-j)} = 0, \tag{4}$$

$$\mu u_k^{(m)}\big|_{t=0} - u_k^{(m)}\big|_{t=T} = \varphi_{mk}, \quad m = 0,1,\ldots,n-1, \tag{5}$$

де для кожного $\nu \in \mathbb{R}$ многочлени $b_j(\nu) = \sum_{s_1=0}^{j} a_{n-j,s_1}\nu^{s_1}$ є многочленами степеня не вище j, φ_{mk} — коефіцієнти Фур'є функції φ_m з функціонального ряду $\varphi_m(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi_{mk}z^{\nu_k}$.

Єдиність розв'язку u_k задачі (4), (5) у просторі $\mathbf{C}^n[0,T]$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ є необхідною і достатньою умовою єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{E}\mathcal{N}^{\beta}_{q,n}(\mathcal{D})$ для довільного $q \in \mathbb{R}$. Саме тому, якщо хоча б для одного ν_k існує нетривіальний розв'язок $\hat{u}_k = \hat{u}_k(t)$ однорідної задачі (4), (5), то однорідна задача (1), (2) також має нетривіальний розв'язок $\hat{u} = \hat{u}(t,z)$, який визначається формулою $\hat{u}(t,z) = \hat{u}_k(t)z^{\nu_k}$ і розв'язок задачі (1), (2) не може бути єдиним.

Для побудови розв'язку задачі (4), (5) у рівнянні пронормуємо коефіцієнти $b_1(\nu),\ldots,$ $b_n(\nu)$ і подамо їх у вигляді добутку $b_j(\nu) = \tilde{\nu}^j\tilde{b}_j(\nu)$. Функції $\tilde{b}_j(\nu)$ і коефіцієнти $b_j(\nu)$, лінійно залежать від параметрів $a_{n-j,0}, a_{n-j,1},\ldots,a_{n-j,j}$, зокрема $\tilde{b}_j$ рівномірно обмежені за ν та $a_{s_0,s}$. Очевидно, справджується нерівність

$$\left|\tilde{b}_j(\nu)\right| \le \sum_{s_1=0}^{j}\left|a_{n-j,s_1}\right|\frac{|\nu|^{s_1}}{\tilde{\nu}^j} \le \max_{s_1=0,1,\ldots,j}\left|a_{n-j,s_1}\right|\sum_{s_1=0}^{j}\frac{|\nu|^{s_1}}{\tilde{\nu}^j}.$$

Якщо коефіцієнти $a_{s_0,s_1} \in \mathbb{C}$ рівняння (1) розглядати у крузі деякого радіуса A з центром у початку координат комплексної площини, то для $j = 1,\ldots,n$ отримаємо оцінки

$$\left|\tilde{b}_j(0)\right| = \left|a_{n-j,0}\right| \le A,$$

$$\left|\tilde{b}_j(\pm 1)\right| \le \frac{j+1}{2^{j/2}}A \le \frac{3}{2}A,$$

$$\left|\tilde{b}_j(\nu)\right| \le \frac{A}{\tilde{\nu}^j}\frac{|\nu|^{j+1}}{|\nu|-1} < \frac{|\nu|^j}{\tilde{\nu}^j}A < A, \quad \nu \notin \{-1,0,1\},$$

тобто $\left|\tilde{b}_j(\nu)\right| < 2A$ для всіх $\nu \in \mathbb{R}$. Звіси випливає, що для всіх (з врахуванням кратності) коренів $\lambda_1(\nu),\ldots,\lambda_n(\nu)$ многочлена

$$P_\nu(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda-\lambda_j(\nu)) = \lambda^n + \sum_{j=1}^{n}\tilde{b}_j(\nu)\lambda^{n-j}$$

виконуються нерівності:

$$|\lambda_j(\nu)| \le 1 + \max\{|\tilde{b}_1(\nu)|,\ldots,|\tilde{b}_n(\nu)|\} \le 1+2A. \tag{6}$$

Очевидно, що числа $\gamma_j(\nu) = \tilde{\nu}_k\lambda_j(\nu)$ є коренями відповідного характеристичного рівняння $\gamma^n + b_1(\nu)\gamma^{n-1}+\ldots+b_n(\nu)=0$ для диференціального рівняння (4).

Позначимо через $\mathcal{N}^\Delta$ множину тих $\nu\in\mathcal{N}$, для яких многочлен $P_\nu(\lambda)$ має кратний корінь, а відповідну множину значень k — через K^Δ, тоді рівносильними є твердження $k\in K^\Delta$ і $\nu_k\in\mathcal{N}^\Delta$.

Для різних коренів $\lambda_1(\nu),\ldots,\lambda_n(\nu)$ загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$u_k(t) = \sum_{l=1}^{n} C_{kl}e^{\tilde{\nu}_k\lambda_l(\nu_k)t}, \quad k\in\mathbb{Z}\setminus K^\Delta, \tag{7}$$

де C_{kl} — довільні комплексні сталі.

Якщо $u_k(t)$ — розв'язок задачі (4), (5), то числа $\tilde{C}_{kl} = \left(\mu - e^{\tilde{\nu}_k\lambda_l(\nu_k)T}\right)C_{kl}$, $l=1,2,\ldots,n$, утворюють розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{l=1}^{n}\lambda_l^m(\nu_k)\tilde{C}_{kl} = \frac{\varphi_{mk}}{\tilde{\nu}_k^m}, \quad m=0,1,\ldots,n-1 \tag{8}$$

з матрицею Вандермонда $\left(\lambda_l^{m-1}(\nu_k)\right)_{m,l=1}^{n}$. Навпаки, якщо числа $\tilde{C}_{kl}$, де $l=1,2,\ldots,n$, утворюють розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (8), то функція $u_k(t)$, що визначена формулою (7), в якій $C_{kl} = \dfrac{\tilde{C}_{kl}}{\mu - e^{\tilde{\nu}_k\lambda_l(\nu_k)T}}$, є розв'язком задачі (4), (5).

Розв'язуючи систему (8) за правилом Крамера, одержуємо рівності

$$\tilde{C}_{kl} = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Delta_{jl}(\nu_k)}{\Delta(\nu_k)}\frac{\varphi_{jk}}{\tilde{\nu}_k^j},$$

де $\Delta(\nu) = \prod\limits_{1\le r<q\le n}\left(\lambda_q(\nu)-\lambda_r(\nu)\right) \ne 0$ — визначник Вандермонда, а $\Delta_{jl}(\nu)$ — його відповідні алгебричні доповнення, $j=0,1,\ldots,n-1$, $l=1,2,\ldots,n$.

Для того, щоб задача (4), (5) мала єдиний класичний розв'язок для $\nu\in\mathcal{N}\setminus\mathcal{N}^\Delta$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $\mu\ne e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}$ для $l=1,\ldots,n$. З цієї умови випливає, що $\ln\mu \ne \tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T + i2\pi m$ або числа $\dfrac{\ln\mu - i2\pi m}{\tilde{\nu}T}$ не є коренями многочлена P_ν для довільних $\nu\in\mathcal{N}\setminus\mathcal{N}^\Delta$ та $m\in\mathbb{Z}$.

У протилежному випадку, коли $\mu = e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}$ для деякого l, існує таке число $m \in \mathbb{Z}$, що корінь $\lambda_l(\nu)$ визначається за формулою: $\lambda_l(\nu) = \dfrac{\ln\mu - i2\pi m}{\tilde{\nu}T}$. Тому виконується рівність

$$\frac{(\ln\mu - i2\pi m)^n}{T^n\tilde{\nu}^n} + \sum_{j=1}^{n}\tilde{b}_j(\nu)\frac{(\ln\mu - i2\pi m)^{n-j}}{T^{n-j}\tilde{\nu}^{n-j}} = 0$$

чи еквівалентна їй рівність

$$(\ln\mu - i2\pi m)^n + \sum_{j=1}^{n} b_j(\nu)T^j(\ln\mu - i2\pi m)^{n-j} = 0, \qquad m \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Для кратних коренів ($\nu \in \mathcal{N}^{\Delta}$) загальний розв'язок рівняння (4) також буде мати вигляд (7), в якому, залежно від кратності коренів $\lambda_l(\nu)$, замість числових коефіцієнтів C_{kl} будуть многочленні коефіцієнти $C_{kl}(t)$, степеня на одиницю меншого від кратності кореня $\lambda_l(\nu)$. Покажемо, що відсутність розв'язків рівняння (9) буде необхідною і достатньою умовою єдиності розв'язку задачі (4), (5) і для коренів довільної кратності.

Отже, для коренів $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ кратностей $n_1 = n_1(k), \dots, n_N = n_N(k)$ відповідно, зобразимо цей розв'язок формулою

$$u_k(t) = \sum_{l=1}^{N} e^{\gamma_l(\nu_k)t}C_{kl}(t) = \sum_{l=1}^{N} e^{\gamma_l(\nu_k)t}\Big(1 \ t \ \dots \ \frac{t^{n_l-1}}{(n_l-1)!}\Big)C_{kl}, \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{7_1}$$

де C_{kl} — довільні комплексні стовпці висоти n_l, $n_1 + \dots + n_N = n$. Тоді

$$u_k(t) = \sum_{l=1}^{N} e^{\gamma_l(\nu_k)t}e_1^{\intercal}(n_l)\theta_l(t)C_{kl},$$

де $e_j(r)$ — стовпець з номером j одиничної матриці I_r порядку r, уніпотентна матриця $\theta_l(t)$ має порядок n_l і визначається кожною з рівностей

$$\theta_l(t) = \sum_{j=0}^{n_l-1}\frac{t^j}{j!}J_l^j, \qquad \operatorname{col}\big(C_{kl}(t), C'_{kl}(t), \dots, C_{kl}^{(n_l-1)}(t)\big) = \theta_l(t)C_{kl},$$

причому $J_l = \big(0 \ e_1(n_l) \ \dots \ e_{n_l-1}(n_l)\big)$ — нільпотентна матриця ($J_l^{n_l} = 0$) порядку n_l і, очевидно, $d\theta_l/dt = J_l\theta_l = \theta_l J_l$, зокрема $d^{n_l}\theta_l/dt^{n_l} = 0$.

Нехай $M = M(\gamma)$ — многочлен, тоді

$$M\Big(\frac{d}{dt}\Big)u_k(t) = \sum_{l=1}^{N} e^{\gamma_l(\nu_k)t}M\Big(\gamma_l(\nu_k) + \frac{d}{dt}\Big)C_{kl}(t).$$

За формулою Тейлора маємо

$$\begin{aligned} M\Big(\frac{d}{dt}\Big)u_k(t) = \sum_{l=1}^{N} e^{\gamma_l(\nu_k)t}\Big(M(\gamma) \ M'(\gamma) \ \dots \ \frac{M^{n_l-1}(\gamma)}{(n_l-1)!}\Big)\Big|_{\gamma=\gamma_l(\nu_k)} \times \\ \times \operatorname{col}\big(C_{kl}(t), C'_{kl}(t), \dots, C_{kl}^{(n_l-1)}(t)\big) = \\ = \sum_{l=1}^{N} e^{\gamma_l(\nu_k)t}\Big(M(\gamma) \ M'(\gamma) \ \dots \ \frac{M^{n_l-1}(\gamma)}{(n_l-1)!}\Big)\Big|_{\gamma=\gamma_l(\nu_k)}\theta_l(t)C_{kl}. \end{aligned}$$

Використаємо останнє зображення для випадку $M(\gamma)=\gamma^m$ і запишемо

$$M_m u_k = \mu \sum_{l=1}^{N} \Big(\gamma^m \ (\gamma^m)' \ \ldots \ \frac{(\gamma^m)^{n_l-1}}{(n_l-1)!}\Big)\Big|_{\gamma=\gamma_l(\nu_k)} C_{kl} -$$
$$- \sum_{l=1}^{N} e^{\gamma_l(\nu_k)T} \Big(\gamma^m \ (\gamma^m)' \ \ldots \ \frac{(\gamma^m)^{n_l-1}}{(n_l-1)!}\Big)\Big|_{\gamma=\gamma_l(\nu_k)} \theta_l(T) C_{kl}.$$

або

$$M_m u_k = \sum_{l=1}^{N} \Big(\gamma^m \ (\gamma^m)' \ \ldots \ \frac{(\gamma^m)^{n_l-1}}{(n_l-1)!}\Big)\Big|_{\gamma=\gamma_l(\nu_k)} \big(\mu I_{n_l} - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}\theta_l(T)\big) C_{kl}.$$

Позначимо $W_k = (W_{k1} \ \ldots \ W_{kN})$ узагальнену матрицю Вандермонда, де W_{kl} — матриця розміру $n \times n_l$, перший стовпець якої $\big(1 \ \gamma_l(\nu_k) \ \ldots \ \gamma_l^{n-1}(\nu_k)\big)^{\mathsf{T}}$, а інші є похідними, зокрема стовпець з номером j має вигляд $\dfrac{1}{(j-1)!}\dfrac{d^{j-1}\big(1 \ \gamma \ \ldots \ \gamma^{n-1}\big)^{\mathsf{T}}}{d\gamma^{j-1}}\Big|_{\gamma=\gamma_l(\nu_k)}$.

Матриця W_k є невиродженою, тому вектор $\tilde{C}_k = \mathrm{col}\,(\tilde{C}_{k1},\ldots,\tilde{C}_{kN})$, де

$$\tilde{C}_{kl} = \big(\mu I_{n_l} - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}\theta_l(T)\big) C_{kl},$$

зображає формула $\tilde{C}_k = W_k^{-1}\mathrm{col}\,(\varphi_{0k},\varphi_{1k},\ldots,\varphi_{n-1,k})$.

Оскільки

$$\det\big(\mu I_{n_l} - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}\theta_l(T)\big) = (\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T})^{n_l},$$

то з невиконання рівності (9) випливає існування єдиного розв'язку задачі (4), (5) з векторами $C_{kl} = \big(\mu I_{n_l} - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}\theta_l(T)\big)^{-1}\tilde{C}_{kl}$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $\mathbf{E}\mathcal{N}^{\beta}_{q,n}(\mathcal{D})$ *необхідно і достатньо, щоб рівняння* (9) *не мало розв'язків* (m,ν) *на множині* $\mathbb{Z}\times\mathcal{N}$.

Доведення. Необхідність. Нехай однорідна задача (1), (2) у просторі $\mathbf{E}\mathcal{N}^{\beta}_{q,n}(\mathcal{D})$ має лише тривіальний розв'язок. Тоді всі функції $u_k(t)$ знаходяться однозначно, тобто однорідна задача (4), (5) у просторі $\mathbb{C}^n[0,T]$ для всіх $k\in\mathbb{Z}$ має єдиний тривіальний розв'язок. Отже, ненульовим є визначник $\Delta(\nu)\cdot\prod_{l=1}^{n}\big(\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}\big)$ для $\nu\in\mathcal{N}\setminus\mathcal{N}^{\Delta}$, тобто $\mu\neq e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}$ для $l=1,\ldots,n$. Значить, рівняння (9) не має розв'язків на множині $\mathbb{Z}\times\mathcal{N}$. Аналогічні нерівності отримуємо при $\nu\in\mathcal{N}^{\Delta}$.

Достатність. Доведемо методом від супротивного. Нехай пара (m^*,ν_{k^*}) є розв'язком рівняння (9) на множині $\mathbb{Z}\times\mathcal{N}$. Тоді можна вважати, що $\lambda_1(k^*) = \dfrac{\ln\mu - i2\pi m^*}{\tilde{\nu_{k^*}}T}$, а однорідна задача (4), (5) має розв'язок $e^{\tilde{\nu}_{k^*}\lambda_1(\nu_{k^*})t} = e^{(\ln\mu - i2\pi m^*)t/T}$. Звідси випливає, що задача (1), (2) у просторі $\mathbf{E}\mathcal{N}^{\beta}_{q,n}(\mathcal{D})$ якщо має, то безліч розв'язків, оскільки $u^*(t,z) = Cz^{\nu_{k^*}}e^{(\ln\mu - i2\pi m^*)t/T}$, де C — довільна комплексна стала, є розв'язками відповідної однорідної задачі. Теорему доведено.

Для фіксованих μ та T рівняння (9) визначають зліченну кількість гіперплощин у просторі коефіцієнтів a_{s_0,s_1} диференціального рівняння (1), а для фіксованих a_{s_0,s_1} — зліченну кількість точок на площині змінної $\ln\mu$ за фіксованого T, або зліченну кількість точок на осі змінної T за фіксованого μ. Тому множини коефіцієнтів чи параметрів задачі (1), (2), для яких не виконуються умови єдиності мають нульову міру.

За умов теореми 1 для довільного $k \in \mathbb{Z}$ розв'язок $u_k(t)$ задачі (4), (5) існує, а при $k \in \mathbb{Z} \setminus K^{\Delta}$ його похідні мають такий вигляд:

$$u_k^{(r)}(t) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_{jl}(\nu_k)\lambda_l^r(\nu_k)}{\prod\limits_{1 \le r < q \le n} \big(\lambda_q(\nu_k) - \lambda_r(\nu_k)\big)} \frac{e^{\tilde{\nu}_k \lambda_l(\nu_k) t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}_k \lambda_l(\nu_k) T}} \tilde{\nu}_k^{r-j} \varphi_{jk}, \qquad r = 0, 1, \dots, n. \quad (10)$$

За формулою (3) формальний розв'язок задачі (1), (2) подається у вигляді ряду

$$u(t, z) = \sum_{k \in K^{\Delta}} u_k(t) z^{\nu_k} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus K^{\Delta}} \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_{jl}(\nu_k)}{\Delta(\nu_k)} \frac{e^{\tilde{\nu}_k \lambda_l(\nu_k) t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}_k \lambda_l(\nu_k) T}} \tilde{\nu}_k^{-j} \varphi_{jk} z^{\nu_k}. \quad (11)$$

3 Оцінювання розв'язку і встановлення гладкості

Доведемо належність розв'язку (11) задачі (1), (2) до простору $\mathbf{E}\mathcal{N}^{\beta}_{q,n}(\mathcal{D})$. Враховуючи, що K^{Δ} — скінченна множина (буде показано далі), оцінимо абсолютну величину функцій u_k та їх похідних до порядку n лише для $k \in \mathbb{Z} \setminus K^{\Delta}$, зокрема

$$\big|u_k^{(r)}(t)\big| \le \frac{\tilde{\nu}_k^r}{|\Delta(\nu_k)|} \max_{j,l} |\Delta_{jl}(\nu_k)| \sum_{l=1}^{n} \frac{\big|\lambda_l^r(k) e^{\tilde{\nu}_k \lambda_l(\nu_k) t}\big|}{\big|\mu - e^{\tilde{\nu}_k \lambda_l(\nu_k) T}\big|} \sum_{j=0}^{n-1} \big|\tilde{\nu}_k^{-j} \varphi_{jk}\big|, \quad t \in [0, T].$$

Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату і перетворимо до вигляду

$$\big|u_k^{(r)}(t)\big|^2 \le n^3 (1 + 2A)^{2r} \frac{\tilde{\nu}_k^{2r}}{|\Delta(\nu_k)|^2} \max_{j,l} |\Delta_{jl}(\nu_k)|^2 \max_{l} \left| \frac{e^{\tilde{\nu}_k \lambda_l(\nu_k) t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}_k \lambda_l(\nu_k) T}} \right|^2 \sum_{j=0}^{n-1} \big|\tilde{\nu}_k^{-j} \varphi_{jk}\big|^2. \quad (12)$$

Оскільки для довільних $\nu \in \mathbb{R}$ визначники $\Delta_{jl}(\nu)$ є визначниками порядку $n-1$, що мають обмежені елементи, які є степенями чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то з (6) маємо

$$|\Delta_{jl}(\nu)| \le (n-1)!(1 + 2A)^{(n-1)n/2}. \quad (13)$$

Для подальшої оцінки $|u_k|$ розглянемо вираз $\Delta^2(\nu)$, $\nu \in \mathbb{R}$, у формулі (12), який є дискримінантом $D(\nu)$ полінома $P_\nu(\lambda)$ і для якого справедливі такі два зображення:

$$\Delta^2(\nu) = D(\nu) = \prod_{1 \le r < q \le n} \big(\lambda_q(\nu) - \lambda_r(\nu)\big)^2 = \tilde{\nu}^{-n(n-1)} \prod_{1 \le r < q \le n} \big(\tilde{\nu}\lambda_q(\nu) - \tilde{\nu}\lambda_r(\nu)\big)^2,$$

$$D(\nu) = \pm \begin{vmatrix} 1 & \tilde{b}_1(\nu) & \dots & \tilde{b}_{n-1}(\nu) & \tilde{b}_n(k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \tilde{b}_{n-2}(\nu) & \tilde{b}_{n-1}(\nu) & \tilde{b}_n(\nu) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{b}_1(\nu) & \tilde{b}_2(\nu) & \tilde{b}_3(\nu) & \dots & \tilde{b}_n(\nu) \\ n & (n-1)\tilde{b}_1(\nu) & \dots & \tilde{b}_{n-1}(\nu) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & \dots & 2\tilde{b}_{n-2}(\nu) & \tilde{b}_{n-1}(\nu) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n & (n-1)\tilde{b}_1(\nu) & (n-2)\tilde{b}_2(\nu) & \dots & \tilde{b}_{n-1}(\nu) \end{vmatrix},$$

де знак перед визначником визначає формула $(-1)^{(n-1)n/2}$.

Дискримінант $D(\nu)$ подамо у вигляді многочлена:

$$D(\nu) = D_0\Big(\frac{\nu}{\tilde{\nu}}\Big)^{n(n-1)} + \frac{D_1}{\tilde{\nu}}\Big(\frac{\nu}{\tilde{\nu}}\Big)^{n(n-1)-1} + \frac{D_2}{\tilde{\nu}^2}\Big(\frac{\nu}{\tilde{\nu}}\Big)^{n(n-1)-2} + \ldots + \frac{D_{n(n-1)}}{\tilde{\nu}^{n(n-1)}} =$$
$$= \Big(\frac{\nu}{\tilde{\nu}}\Big)^{n(n-1)}\Big(D_0 + \frac{D_1}{\nu} + \frac{D_2}{\nu^2} + \ldots + \frac{D_{n(n-1)}}{\nu^{n(n-1)}}\Big), \quad (14)$$

де $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_{n(n-1)}$ — комплексні числа, які є многочленами від a_{s_0,s_1}, причому D_0 — дискримінант многочлена $\lambda^n + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n-j,j}\lambda^{n-j}$ (цей многочлен будується за головною частиною рівняння (1)):

$$D_0 = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1,1} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{0,n} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & a_{2,n-2} & a_{1,n-1} & a_{0,n} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,1} & a_{n-2,2} & a_{n-3,3} & \ldots & a_{0,n} \\ n & (n-1)a_{n-1,1} & \ldots & a_{1,n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & n & \ldots & 2a_{2,n-2} & a_{1,n-1} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & n & (n-1)a_{n-1,1} & (n-2)a_{n-2,2} & \ldots & a_{1,n-1} \end{vmatrix},$$

$D_{n(n-1)}$ — дискримінат многочлена $\lambda^n + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n-j,0}\lambda^{n-j}$ (многочлен будується за коефіцієнтами біля чистих за t похідних):

$$D_{n(n-1)} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1,0} & \ldots & a_{1,0} & a_{0,0} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & a_{2,0} & a_{1,0} & a_{0,0} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,0} & a_{n-2,0} & a_{n-3,0} & \ldots & a_{0,0} \\ n & (n-1)a_{n-1,0} & \ldots & a_{1,0} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & n & \ldots & 2a_{2,0} & a_{1,0} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & n & (n-1)a_{n-1,0} & (n-2)a_{n-2,0} & \ldots & a_{1,0} \end{vmatrix}.$$

Нехай $D_0 \neq 0$, тоді дискримінант $D(\nu)$ при $\nu \neq 0$ факторизуємо так:

$$D(\nu) = \frac{D_0}{2}\Big(\frac{\nu}{\tilde{\nu}}\Big)^{n(n-1)}\Big(2 + \frac{2D_1}{D_0\nu} + \frac{2D_2}{D_0\nu^2} + \ldots + \frac{2D_{n(n-1)}}{D_0\nu^{n(n-1)}}\Big) =$$
$$= \frac{D_0}{2}\Big(\frac{\nu}{\tilde{\nu}}\Big)^{n(n-1)}\Big(2 + \frac{2}{\nu D_0}\Big(D_1 + \frac{D_2}{\nu} + \ldots + \frac{D_{n(n-1)}}{\nu^{n(n-1)-1}}\Big)\Big).$$

З останньої формули випливає нерівність $|D(\nu)| \geq \dfrac{|D_0|}{2} \cdot \Big(\dfrac{|\nu|}{\tilde{\nu}}\Big)^{n(n-1)}$ при $|\nu| \geq \dfrac{\tilde{D}_0}{|D_0|}$, де $\tilde{D}_0 = 2(|D_1| + |D_2| + \ldots + |D_{n(n-1)}|)$.

Для дробу $|\nu|/\tilde{\nu}$ справедливою є оцінка

$$\frac{|\nu|}{\tilde{\nu}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad |\nu| \geq 1. \tag{15}$$

Врахувавши нерівність (15), оцінимо модуль $D(\nu)$ знизу

$$|D(\nu)| \geq \frac{|D_0|}{2} \cdot \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{n(n-1)} = \big(\sqrt{2}\big)^{-n(n-1)-2}|D_0|, \quad |\nu| \geq \max\Big(1, \frac{\tilde{D}_0}{|D_0|}\Big). \tag{16}$$

Отримана оцінка є точною за ν при $|\nu| \geq \max\Big(1, \dfrac{\tilde{D}_0}{|D_0|}\Big)$, оскільки оцінка зверху, яка випливає із зображення дискримінанта $D(\nu)$, має такий вигляд $|D(\nu)| \leq 3|D_0|/2$.

З оцінки (16) випливає також скінченність множини $\mathcal{N}^{\Delta}$, кількість елементів якої не перевищує кількості елементів множини $\mathcal{N}$, модуль яких менший $\max(1, \tilde{D}_0/|D_0|)$.

У формулі (12) залишається оцінити зверху дроби $\dfrac{e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}}$ для $\nu \in \mathbb{R}$ і $\mu \neq 0$, оскільки $\left|\dfrac{e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}}\right| = e^{-\tilde{\nu}Re\lambda_l(\nu)(T-t)}$ для $\mu = 0$.

З рівності $2\mathrm{Re}\,\lambda_j(\nu){=}\lambda_j(\nu) + \bar{\lambda}_j(\nu) = \lambda_j(\nu){-}(-\bar{\lambda}_j(\nu))$ і того, що $-\bar{\lambda}_1(\nu), \ldots, -\bar{\lambda}_n(\nu)$ є коренями многочлена

$$P_{1\nu}(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda + \bar{\lambda}_j(\nu)) = \lambda^n + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{-j}\bar{\tilde{b}}_j(\nu)\lambda^{n-j},$$

отримаємо, що числа $2\mathrm{Re}\,\lambda_j(\nu)$ є множниками результанта

$$R(\nu) = \prod_{j=1}^{n}\prod_{l=1}^{n}(\lambda_j(\nu) - (-\bar{\lambda}_l(\nu)))$$

многочленів P_ν та $P_{1\nu}$. Цей результант дорівнює такому визначнику:

$$R(\nu) = \begin{vmatrix} 1 & \tilde{b}_1(\nu) & \ldots & \tilde{b}_{n-1}(\nu) & \tilde{b}_n(\nu) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & \tilde{b}_{n-2}(\nu) & \tilde{b}_{n-1}(\nu) & \tilde{b}_n(\nu) & \ldots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & \tilde{b}_1(\nu) & \tilde{b}_2(\nu) & \tilde{b}_3(\nu) & \ldots & \tilde{b}_n(k) \\ 1 & -\bar{\tilde{b}}_1(\nu) & \ldots & (-1)^{n-1}\bar{\tilde{b}}_{n-1}(\nu) & (-1)^n\bar{\tilde{b}}_n(\nu) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & (-1)^{n-2}\bar{\tilde{b}}_{n-2}(\nu) & (-1)^{n-1}\bar{\tilde{b}}_{n-1}(\nu) & (-1)^n\bar{\tilde{b}}_n(\nu) & \ldots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & -\bar{\tilde{b}}_1(\nu) & -\bar{\tilde{b}}_2(\nu) & -\bar{\tilde{b}}_3(\nu) & \ldots & (-1)^n\bar{\tilde{b}}_n(\nu) \end{vmatrix}.$$

Для довільного $j = 1, \ldots, n$ оцінимо модуль даного результанта зверху

$$|R(\nu)| \leq 2^{n^2}(1 + 2A)^{n^2-1}|\mathrm{Re}\,\lambda_j|.$$

Для оцінки знизу подамо результант у вигляді

$$R(\nu) = \Big(\frac{\nu}{\tilde{\nu}}\Big)^{n^2}\Big(R_0 + \frac{R_1}{\nu} + \frac{R_2}{\nu^2} + \ldots + \frac{R_{n^2}}{\nu^{n^2}}\Big), \quad \nu \neq 0, \tag{17}$$

де R_0 дорівнює такому визначнику:

$$R_0=\begin{vmatrix} 1 & a_{n-1,1} & \dots & a_{1,n-1} & a_{0,n} & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & a_{2,n-2} & a_{1,n-1} & a_{0,n} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,1} & a_{n-2,2} & a_{n-3,3} & \dots & 0\\ 1 & -\bar a_{n-1,1} & \dots & (-1)^{n-1}\bar a_{1,n-1} & (-1)^n\bar a_{0,n} & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & (-1)^{n-2}\bar a_{2,n-2} & (-1)^{n-1}\bar a_{1,n-1} & (-1)^n\bar a_{0,n} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & -\bar a_{n-1,1} & -\bar a_{n-2,2} & -\bar a_{n-3,3} & \dots & (-1)^n\bar a_{0,n}\end{vmatrix},$$

і у випадку $R_0\neq 0$ маємо добуток

$$R(\nu)=\frac{R_0}{2}\Big(\frac{\nu}{\tilde\nu}\Big)^{n^2}\Big(2+\frac{2}{\nu R_0}\Big(R_1+\frac{R_2}{\nu}+\ldots+\frac{R_{n^2}}{\nu^{n^2-1}}\Big)\Big).$$

Якщо $\nu\in\mathbb R$ і $|\nu|\geq\max\Big(1,\dfrac{\tilde R_0}{|R_0|}\Big)$, де $\tilde R_0=2(|R_1|+|R_2|+\ldots+|R_{n^2}|)$, то справджується нерівність

$$2^{n^2}(1+2A)^{n^2-1}|\operatorname{Re}\lambda_j|\geq|R(\nu)|\geq\frac{|R_0|}{2}\Big(\frac{|\nu|}{\tilde\nu}\Big)^{n^2}\geq(\sqrt2)^{-n^2-2}|R_0|.$$

Оскільки $|\operatorname{Re}\lambda_j(\nu)|\geq\tilde A$, де

$$\tilde A=(1+2A)^{1-n^2}\cdot 2^{-3n^2/2-1}|R_0|,$$

і $\tilde\nu\to\infty$ разом з $|\nu|$, то звідси випливає асимптотика, якщо $|\nu|\to\infty$, то

$$\tilde\nu|\operatorname{Re}\lambda_j(\nu)|\geq\tilde\nu\tilde A\to\infty.$$

Для шуканої оцінки дробів враховуємо асимптотику і знак $\operatorname{Re}\lambda_l(\nu)$. Якщо $\operatorname{Re}\lambda_l(\nu)>0$, то справджується на $[0,T]$ оцінка

$$\Big|\frac{e^{\tilde\nu\lambda_l(\nu)t}}{\mu-e^{\tilde\nu\lambda_l(\nu)T}}\Big|\leq\frac{e^{\tilde\nu\operatorname{Re}\lambda_l(\nu)t}}{\big|\mu-e^{\tilde\nu\lambda_l(\nu)T}\big|}=\frac{e^{\tilde\nu\operatorname{Re}\lambda_l(\nu)(t-T)}}{\big|\mu e^{-\tilde\nu\lambda_l(\nu)T}-1\big|}\leq 2e^{-\tilde\nu|\operatorname{Re}\lambda_l(\nu)|(T-t)}$$

при $\tilde\nu\geq\dfrac{M_1}{|R_0|}$ і $|\nu|\geq\max\Big(1,\dfrac{\tilde R_0}{|R_0|}\Big)$, де $M_1=\dfrac{\ln(2|\mu|)}{T\tilde A}$.

Якщо ж $\operatorname{Re}\lambda_l(\nu)<0$, то

$$\Big|\frac{e^{\tilde\nu\lambda_l(\nu)t}}{\mu-e^{\tilde\nu\lambda_l(\nu)T}}\Big|=\frac{e^{\tilde\nu\operatorname{Re}\lambda_l(\nu)t}}{\big|\mu-e^{\tilde\nu\lambda_l(\nu)T}\big|}\leq\frac{2}{|\mu|}e^{\tilde\nu\operatorname{Re}\lambda_l(\nu)t}$$

при $\tilde\nu\geq\dfrac{M_2}{|R_0|}$ і $|\nu|\geq\max\Big(1,\dfrac{\tilde R_0}{|R_0|}\Big)$, де $M_2=\dfrac{\ln(2/|\mu|)}{T\tilde A}$.

Отже, при виконанні умов

$$\tilde\nu\geq\max\frac{(M_1,M_2)}{|R_0|}=\frac{(\sqrt2)^{3n^2+2}(1+2A)^{n^2-1}}{T|R_0|}\ln(2\max(1/|\mu|,|\mu|)),$$

$$|\nu| \geq \max\Big(1, \frac{\tilde{R}_0}{|R_0|}\Big)$$

для виразу $\Big|\dfrac{e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}}\Big|$ справджуються такі нерівності:

$$\Big|\frac{e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}}\Big| \leq 2e^{-\tilde{\nu}\min\limits_{l}|\mathrm{Re}\,\lambda_l(\nu)|(T-t)} \leq 2e^{-\tilde{\nu}\tilde{A}(T-t)} \qquad \text{для} \quad \mathrm{Re}\,\lambda_l(\nu) > 0,$$

$$\Big|\frac{e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}}\Big| \leq \frac{2}{|\mu|}e^{-\tilde{\nu}\min\limits_{l}|\mathrm{Re}\,\lambda_l(\nu)|t} \leq \frac{2}{|\mu|}e^{-\tilde{\nu}\tilde{A}t} \qquad \text{для} \quad \mathrm{Re}\,\lambda_l(\nu) < 0.$$

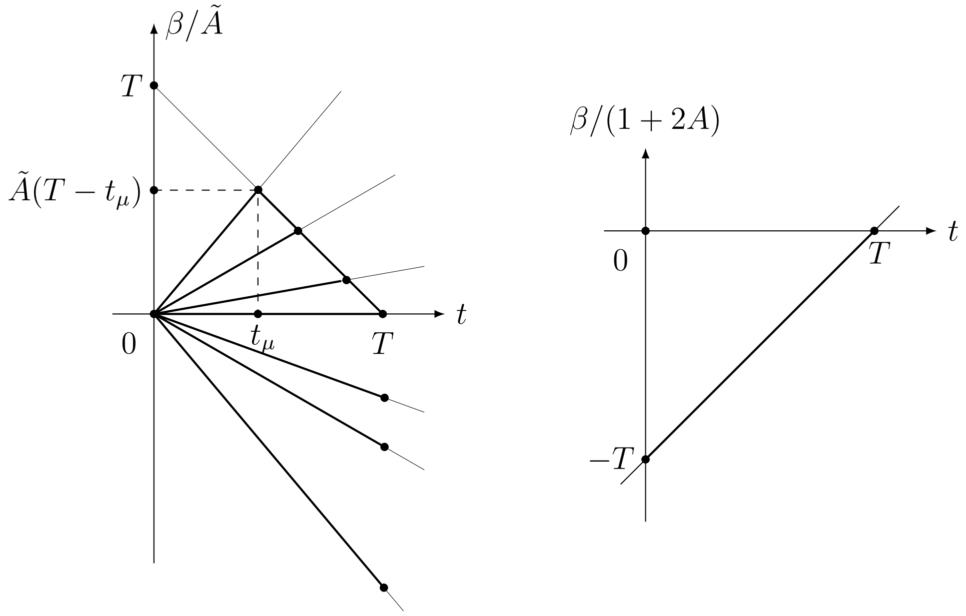

Рис. 1: Кусково-лінійна залежність $\dfrac{\beta}{\tilde{A}}$ від t для $|\mu| > 0$ та лінійна залежність $\dfrac{\beta}{1+2A}$ від t для $\mu = 0$, де $t_\mu = \dfrac{T}{1+\ln|\mu|}$, причому $t_\mu \to 0$ у разі $|\mu| \to \infty$ і $t_\mu \to T$ у разі $|\mu| \to 1$.

Об'єднавши дані результати, запишемо наступну оцінку:

$$\max_l \Big|\frac{e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}}\Big| \leq 2\max\Big(e^{-\tilde{\nu}\tilde{A}(T-t)}, \frac{1}{|\mu|}e^{-\tilde{\nu}\tilde{A}t}\Big) \leq 2e^{-\tilde{\nu}\tilde{A}\min\big(T-t,\ t\ln|\mu|\big)}.$$

Позначивши $\beta(t) = \tilde{A}\min\big(T-t,\ t\ln|\mu|\big)$ для $\mu \neq 0$ і $\beta(t) = (1+2A)(t-T)$ для $\mu = 0$, отримаємо

$$\max_l \Big|\frac{e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}}\Big| \leq 2e^{-\tilde{\nu}\beta(t)}. \tag{18}$$

На рисунках зображено залежність від t експоненційної гладкості розв'язку $\beta = \beta(t)$ з нерівності у формулі (18).

4 Основний результат, теорема існування та єдиності розв'язку

Враховуючи нерівності (12), (13), (16) і (18), для всіх $t \in [0,T]$ і $k \in \mathbb{Z} \setminus K_{00}^{\Delta}$, де K_{00}^{Δ} — множина тих k, які задовольняють хоча б одну з нерівностей

$$|\nu_k| \leq \max\Big(1, \frac{\tilde{D}_0}{|D_0|}, \frac{\tilde{R}_0}{|R_0|}\Big), \quad \tilde{\nu}_k \leq \max \frac{(M_1, M_2)}{|R_0|},$$

отримаємо оцінки розв'язку задачі (4), (5) та його похідних до порядку n

$$\tilde{\nu}_k^{-2r} e^{2\tilde{\nu}_k \beta(t)} |u_k^{(r)}(t)|^2 \leq n^3 \frac{\sqrt{2}^{n(n-1)+6}}{|D_0|} \left((n-1)!\right)^2 (1+2A)^{n(n-1)+2r} \sum_{j=0}^{n-1} |\tilde{\nu}_k|^{-2j} |\varphi_{jk}|^2. \qquad (19)$$

Теорема 2. *Нехай $D_0 R_0 \neq 0$ і для всіх $k \in K_{00}^{\Delta}$ рівняння (9) не має розв'язків на множині $\mathbb{Z} \times \mathcal{N}$, а також $\varphi_0 \in \mathbf{E}\mathcal{N}_q^0(\mathcal{S})$, $\varphi_1 \in \mathbf{E}\mathcal{N}_{q-1}^0(\mathcal{S})$,..., $\varphi_{n-1} \in \mathbf{E}\mathcal{N}_{q-n+1}^0(\mathcal{S})$. Тоді існує лише один розв'язок задачі (1), (2), який належить до простору $\mathbf{E}\mathcal{N}_{q,n}^{\beta}(\mathcal{D})$, де $\beta = \tilde{A} \min\left(T - t,\ t \ln |\mu|\right)$ і $\beta = (1+2A)(t-T)$ у разі $\mu = 0$. Цей розв'язок неперервно залежить від правих частин $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ умов (2).*

Доведення. За умови $D_0 R_0 \neq 0$ справджується оцінка (19) розв'язку u_k задачі (4), (5) для $k \in \mathbb{Z} \setminus K_{00}^{\Delta}$. Якщо $k \in K_{00}^{\Delta}$, то розв'язок задачі належить до простору $\mathbb{C}^n[0,T]$.

З нерівності (12) випливає $\left|u_k^{(r)}(t)|^2 \leq C_r(k) \sum\limits_{j=0}^{n-1} \left|\tilde{\nu}_k^{-j} \varphi_{jk}\right|^2\right.$, де

$$C_r(k) = \max_t n^3 (1+2A)^{2r} \frac{\tilde{\nu}_k^{2r}}{|\Delta(\nu_k)|^2} \max_{j,l} |\Delta_{jl}(\nu_k)|^2 \max_l \left|\frac{e^{\tilde{\nu}_k \lambda_l(\nu_k) t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}_k \lambda_l(\nu_k) T}}\right|^2.$$

Враховуючи формулу (11) та нерівність (19), оцінимо зверху квадрат норми розв'язку задачі (1), (2):

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{\mathbf{E}\mathcal{N}_{q,n}^{\beta}(\mathcal{D})} \leq \sum_{r=0}^{n} \max_{[0,T]} \sum_{k \in K_{00}^{\Delta}} \tilde{\nu}_k^{2(q-r)} e^{2\beta(t)\tilde{\nu}_k} |u_k^{(r)}(t)|^2 + \\ + \sum_{r=0}^{n} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus K_{00}^{\Delta}} \tilde{\nu}_k^{2q} n^3 \left((n-1)!\right)^2 (1+2A)^{2r+n(n-1)} 2^{(n^2-n+6)/2} \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\nu}_k^{-2j} |\varphi_{jk}|^2 \leq \\ \leq \sum_{r=0}^{n} \sum_{k \in K_{00}^{\Delta}} C_r(k) \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\nu}_k^{-2j} |\varphi_{jk}|^2 + \frac{C_1}{|D_0|} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus K_{00}^{\Delta}} \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\nu}_k^{-2j} |\varphi_{jk}|^2 \leq \\ \leq \frac{C_2}{|D_0|} \sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j\|^2_{\mathbf{E}\mathcal{N}_{q-j}^0(\mathcal{S})}, \end{aligned} \qquad (20)$$

де

$$C_1 = n^3 (n+1) \left((n-1)!\right)^2 (1+2A)^{n(n-1)} 2^{(n^2-n+6)/2},$$

$$C_2 = \max\Big\{C_1, |D_0| \sum_{r=0}^{n} \max_{k \in K_{00}^{\Delta}} C_r(k) \tilde{\nu}_k^{2(q-r)} e^{2\beta(t)\tilde{\nu}_k}\Big\}.$$

Остання нерівність у формулі (20) випливає зі скінченності множини K_{00}^{Δ}. Теорему доведено.

З доведення теореми випливають властивості (екпоненційної) гладкості β розв'язку задачі (1), (2).

При $|\mu| > 1$ гладкість $\beta(t)$ функції $u(t,\cdot)$ на відрізку $[0, t_\mu]$ лінійно зростає від 0 до $\tilde{A}(T - t_\mu)$, а на відрізку $[t_\mu, T]$ лінійно спадає до 0, де $t_\mu = T/(1 + \ln|\mu|)$. При $|\mu| = 1$ гладкість не залежить від t, при $|\mu| < 1$ гладкість лінійно спадає від 0 до $\tilde{A}T\ln|\mu|$, а при $\mu = 0$ гладкість лінійно зростає від $(-1 - 2A)T$ до 0.

Отже, при $|\mu| > 1$ на інтервалі $(0, T)$ гладкість додатня, при $|\mu| = 1$ гладкість нульова, при $|\mu| < 1$ гладкість від'ємна.

Розглядувана задача у випадку багатьох комплексних змінних є некоректною за Адамаром, а її розв'язність залежить від малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку. Як бачимо, у випадку однієї змінної відповідні знаменники не є малими і оцінюються знизу деякими сталими.

Список літератури

[**1**] Goy T., Negrych M., Savka I. *On nonlocal boundary value problem for the equation of motion of a homogeneous elastic beam with pinned-pinned ends.* Carpathian Mathematical Publications. 2018, **10** (1), 105–113. https://doi.org/10.15330/cmp.10.1.105-113

[**2**] Il'kiv V.S., Nytrebych Z.M., Pukach P.Y. *Nonlocal problem with moment conditions for hyperbolic equations.* Electronic J. of Differential Eq., 2017, **265**, 1–9. https://digital.library.txstate.edu/handle/10877/16066

[**3**] Il'kiv V.S., Strap N.I., Volyanska I.I. *Conditions of solvability of the nonlocal boundary-value problem for a differential-operator equation with weak nonlinearity.* Journal of Mathematical Sciences. 2021, **256** (6), 753–769. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05458-4

[**4**] Kalenyuk P.I., Baranetskij Ya.O. Kolyasa L.I. *A nonlocal problem for a differential operator of even order with involution.* Journal of Applied Analysis.2020, **26** (2), 297–307. https://doi.org/10.1515/jaa-2020-2026

[**5**] Kalenyuk P.I., Kohut I.V., Nytrebych Z.M. *Problem with nonlocal two-point condition in time for a homogeneous partial differential equation of infinite order with respect to space variables* Journal of Mathematical Sciences. 2010, **167** (1), 1–15. https://doi.org/10.1007/s10958-010-9898-9

[**6**] Кондратів Л.Й., Симотюк М.М., Тимків І.Р. *Задача з нелокальними умовами для безтипних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами з відхиленням.* Прикарпатський вісник НТШ. Число. 2018, **1** (45), 37–44. https://pvntsh.nung.edu.ua/index.php/number/article/view/11

[**7**] Malanchuk O., Nytrebych Z. *Homogeneous two-point problem for PDE of the second order in time variable and infinite order in spatial variables* Open Mathematics. 2017, **15** (1), 101–110. DOI:10.1515/math-2017-0009

[**8**] Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. Київ: Наук. думка, 2002, 416 с.

[**9**] Савка І.Я. *Нелокальна задача із залежними коефіцієнтами в умовах для рівняння другого порядку за часовою змінною* Карпат. мат. публ. 2010, **2** (2), 101 – 110.

[**10**] Shevchuk R.V., Savka I.Y., Nytrebych Z.M. *The nonlocal boundary value problem for one-dimensional backward Kolmogorov equation and associated semigroup.* Carpathian Mathematical Publications. 2019, **11** (2), 463–474. https://doi.org/10.15330/cmp.11.2.463-474

[**11**] Власій О.Д., Пташник Б.Й. *Нелокальна крайова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними, не розв'язних відносно старшої похідної за часом.* Укр. мат. журн. 2007, **59** (3), 370–381. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/164082

[**12**] Volyanska I.I., Il'kiv V.S., Symotyuk M.M. *Nonlocal boundary-value problem for a second-order partial differential equation in an unbounded strip.* Ukrainian mathematical journal. 2019, **70** (10), 1585–1593. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01591-1

Список літератури

[**1**] Goy T., Negrych M., Savka I. *On nonlocal boundary value problem for the equation of motion of a homogeneous elastic beam with pinned-pinned ends.* Carpathian Mathematical Publications. 2018, **10** (1), 105–113. https://doi.org/10.15330/cmp.10.1.105-113

[**2**] Il'kiv, V.S., Nytrebych, Z.M., Pukach, P.Y. *Nonlocal problem with moment conditions for hyperbolic equations.* Electronic J. of Differential Eq., 2017, **265**, 1–9. https://digital.library.txstate.edu/handle/10877/16066

[**3**] Il'kiv V.S., Strap N.I., Volyanska I.I. *Conditions of solvability of the nonlocal boundary-value problem for a differential-operator equation with weak nonlinearity.* Journal of Mathematical Sciences. 2021, **256** (6), 753–769. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05458-4

[**4**] Kalenyuk P.I., Baranetskij Ya.O. Kolyasa L.I. *A nonlocal problem for a differential operator of even order with involution.* Journal of Applied Analysis.2020, **26** (2), 297–307. https://doi.org/10.1515/jaa-2020-2026

[**5**] Kalenyuk P.I., Kohut I.V., Nytrebych Z.M. *Problem with nonlocal two-point condition in time for a homogeneous partial differential equation of infinite order with respect to space variables* Journal of Mathematical Sciences. 2010, **167** (1), 1–15. https://doi.org/10.1007/s10958-010-9898-9

[**6**] Kondrativ L.Yo., Symotyuk M.M., Tymkiv I.R. *Problem with nonlcal conditions for partial diffeential equations with constant coefficitnts with delay.* Precarpathian bulletin of Shevchenko Scientific Society Number. 2018, **1** (45), 37–44. https://pvntsh.nung.edu.ua/index.php/number/article/view/11 (in Ukrainian)

[**7**] Malanchuk, O., Nytrebych, Z. *Homogeneous two-point problem for PDE of the second order in time variable and infinite order in spatial variables* Open Mathematics. 2017, **15** (1), 101–110. DOI:10.1515/math-2017-0009

[**8**] Ptashnyk B.I., Il'kiv V.S., Kmit' I.Ya., Polishchuk V.M. Nonlocal boundary value problems for partial differential equations. Kyiv: Naukova dumka, 2002, 416 p. (in Ukrainian)

[**9**] Savka I.Ya. *Nonlocal problem with dependent coefficients in conditions for the second-order equation in time variable* Carpathian Mathematical Publications. 2010, **2** (2), 101 – 110. (in Ukrainian)

[**10**] Shevchuk R.V., Savka I.Y., Nytrebych Z.M. *The nonlocal boundary value problem for one-dimensional backward Kolmogorov equation and associated semigroup.* Carpathian Mathematical Publications. 2019, **11** (2), 463–474. https://doi.org/10.15330/cmp.11.2.463-474

[**11**] Vlasii O.D., Ptashnyk B.I. *Nonlocal boundary-value problem for linear partial differential equations unsolved with respect to the higher time derivative.* Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal 2007, **59** (3), 370–381. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/164082 (in Ukrainian)

[**12**] Volyanska I. I., Il'kiv V. S., Symotyuk M.M. *Nonlocal boundary-value problem for a second-order partial differential equation in an unbounded strip.* Ukrainian mathematical journal. 2019, **70** (10), 1585–1593. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01591-1

Надійшло 11.11.2022

Il'kiv V.S., Strap N.I., Volyanska I.I. *Nonlocal boundary value problem in spaces of exponential type of Dirichlet-Taylor series for the equation with complex differentiation operator*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 43–58.

Problems with nonlocal conditions for partial differential equations represent an important part of the present-day theory of differential equations. Such problems are mainly ill possed in the Hadamard sence, and their solvability is connected with the problem of small denominators. A specific feature of the present work is the study of a nonlocal boundary-value problem for partial differential equations with the operator of the generalized differentiation $B = zd/dz$, which operate on functions of scalar complex variable z. A criterion for the unique solvability of these problems and a sufficient conditions for the existence of its solutions are established in the spaces of functions, which are Dirichlet-Taylor series. The unity theorem and existence theorems of the solution of problem in these spaces are proved. The considered problem in the case of many generalized differentiation operators is incorrect in Hadamard sense, and its solvability depends on the small denominators that arise in the constructing of a solution. In the article shown that in the case of one variable the corresponding denominators are not small and are estimated from below by some constants. Correctness after Hadamard of the problem is shown. It distinguishes it from an ill-conditioned after Hadamard problem with many spatial variables.