Bukovinian Math. Journal. 2022, **10**, 2, 240–248 Буковинський матем. журнал 2022, Т.10, №2, 240–248

Спічак С. В., Стогній В. І., Копась І. М.

Групова класифікація одного класу (2+1)-вимірних лінійних рівнянь ціноутворення азійських опціонів

Проведено групову класифікацію одного класу (2+1)-вимірних лінійних рівнянь ціноутворення азійських опціонів. Як результат було знайдено ядро максимальних алгебр інваріантності та неперервні перетворення еквівалентності цього класу рівнянь. За допомогою перетворень еквівалентності виділено всі нееквівалентні підкласи рівнянь, які мають алгебру інваріантності ширшу ніж, ядро основних алгебр інваріантності.

Ключові слова і фрази: групова класифікація, група еквівалентності, рівняння азійських опціонів.

Інститут математики НАН України, м. Київ, Україна (Спічак С. В.)
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна (Стогній В. І., Копась І. М.)
e-mail: *stas.math@gmail.com (Спічак С. В.), stogniyvaleriy@gmail.com (Стогній В. І.), innak@net.ua (Копась І. М.)*

Вступ

У роботі досліджено симетрійні властивості класу $(2+1)$-вимірних лінійних рівнянь вигляду

$$u_t = x^2 u_{xx} + f(x) u_y, \tag{1}$$

де $u = u(t,x,y)$, $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $f(x) \neq \mathrm{const}$ є довільною гладкою функцією.

Рівняння (1) можна отримати заміною незалежних та залежної змінних з лінійного рівняння ціноутворення азійських опціонів [2]:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + f(S)\frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0, \tag{2}$$

де $V = V(\tau, S, A)$; r, σ — сталі. У зазначеній заміні $S = x$ і функція $f(S)$ має такий самий вигляд, як і в рівнянні (1).

УДК 517.912:512.816
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K10, 58J70.

Рівняння (2) містить низку відомих рівнянь азійських опціонів. Так, у роботі [2] розглядається рівняння із $f(S) = S$ та $f(S) = \ln S$, у роботі [1] — рівняння із $f(S) = \dfrac{1}{S}$.

Широке застосування рівняння (2) в задачах фінансової математики викликає беззаперечний інтерес до отримання його точних розв'язків. Одним із найбільш ефективних методів, що дозволяють здійснити пошук розв'язків, є методи групового аналізу [7, 9].

У роботі [13] досліджено симетрійні властивості рівняння (2) із $f(S) = S$ й отримано такий результат: рівняння допускає 5-параметричну групу нетривіальних локальних перетворень незалежних і залежних змінних. Це дало можливість будувати точні розв'язки у явному вигляді рівняння (2) через проведення симетрійної редукції за операторами з алгебри інваріантності цього рівняння.

Оскільки теоретико-групові методи дають змогу інтегрувати диференціальні рівняння, які мають нетривіальні групи інваріантності, то актуальною є задача групової класифікації диференціального рівняння (1) з довільною функцією.

Сучасну постановку задачі групової класифікації диференціальних рівнянь зробив у 1959 р. Л. В. Овсянніков у роботі [10], де він запропонував метод розв'язування задачі групової класифікації та застосував його для класифікації нелінійних рівнянь теплопровідності. Детальний огляд публікацій із групової класифікації диференціальних рівнянь станом на середину 90-х рр. XX ст. наведено в довіднику [6]. Групову класифікацію еволюційних рівнянь у просторах вищої розмірності, ніж у двовимірному просторі-часі, розглянуто у працях [3–5, 8, 11, 12, 14].

Розв'язання задачі групової класифікації класу рівнянь (1) дозволить виокремити підкласи рівняння, що допускають нетривіальні симетрійні властивості, а також побудувати точні розв'язки таких рівнянь.

1 Постановка задачі

Метою роботи є: 1) знайти ядро A^{ker} максимальних алгебр інваріантності диференціальних рівнянь із класу (1); 2) знайти неперервні перетворення еквівалентності цього класу рівнянь; 3) виділити усі нееквівалентні рівняння із класу, що допускають алгебру інваріантності вищої розмірності, ніж A^{ker}.

2 Ядро максимальних алгебр інваріантності

Групову класифікацію рівнянь (1) можна провести, використовуючи класичний метод Лі-Овсяннікова [7, 9]. Перший етап реалізації цього алгоритму вимагає обчислення ядра максимальних алгебр інваріантності диференціальних рівнянь досліджуваного класу, тобто дозволяє знайти максимальну алгебру інваріантності рівняння (1) за довільної функції $f(x)$.

Теорема 1. *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння* (1) *за довільної гладкої функції* $f(x)$ *є алгебра*

$$A^{ker} =< \partial_t, \partial_y, u\partial_u, \beta(t,x)\partial_u > \tag{3}$$

де функція $\beta(t,x)$ *є довільним розв'язком лінійного рівняння* $\beta_t = x^2\beta_{xx}$.

Доведення. Згідно з алгоритмом Лі-Овсяннікова інфінітезимальні оператори, що генерують алгебру інваріантності рівняння (1), шукаємо у класі операторів

$$X = \tau\partial_t + \xi^1\partial_x + \xi^2\partial_y + \eta\partial_u, \tag{4}$$

де $\tau = \tau(t,x,y,u)$, $\xi^1 = \xi^1(t,x,y,u)$, $\xi^2 = \xi^2(t,x,y,u)$, $\eta = \eta(t,x,y,u)$ — довільні двічі диференційовані функції в деякій області простору незалежних t, x, y та залежної змінної u.

З умови $\tilde{X}(u_t - x^2u_{xx} - f(x)u_y)\Big|_{u_t=x^2u_{xx}+f(x)u_y} = 0$, де $\tilde{X}$ — друге продовження оператора X, отримуємо систему визначальних рівнянь, щоб знайти координати оператора X та функції $f(x)$:

$$\tau_x = \tau_u = \xi^1_u = \xi^2_x = \xi^2_u = \eta_{uu} = 0, \tag{5}$$

$$x\tau_t - 2x\xi^1_x + 2\xi^1 - xf(x)\tau_y = 0, \tag{6}$$

$$\xi^1_t - x^2\xi^1_{xx} - f(x)\xi^1_y + 2x^2\eta_{ux} = 0, \tag{7}$$

$$f'(x)\xi^1 + f(x)(\tau_t - \xi^2_y) - (f(x))^2\tau_y + \xi^2_t = 0, \tag{8}$$

$$\eta_t - x^2\eta_{xx} - f(x)\eta_y = 0. \tag{9}$$

Із рівнянь (5) отримуємо, що

$$\tau = \tau(t,y),\ \xi^1 = \xi^1(t,x,y),\ \xi^2 = \xi^2(t,y),\ \eta = \alpha(t,x,y)u + \beta(t,x,y).$$

Далі, оскільки функція $f(x)$ довільна, то розщепивши рівняння (6)–(9) за $f(x)$, $f'(x)$ та $(f(x))^2$ й розв'язавши отримані рівняння, отримаємо такі рівності:

$$\tau_t = \tau_y = \xi^1 = \xi^2_t = \xi^2_y = \alpha_t = \alpha_x = \alpha_y = \beta_y = 0;\quad \beta_t - x^2\beta_{xx} = 0,$$

звідки

$$\tau = C_1,\ \xi^1 = 0,\ \xi^2 = C_2,\ \eta = C_3u + \beta(t,x), \tag{10}$$

де C_i, $i \in \{1,2,3\}$ — довільні сталі інтегрування, $\beta(t,x)$ — довільний гладкий розв'язок лінійного рівняння $\beta_t = x^2\beta_{xx}$. Оператор X із координатами (4) породжує алгебру (3).

Теорему доведено.

3 Група перетворень еквівалентності

Щоб дослідити симетрійні властивості певного класу, важливо знати перетворення еквівалентності цього класу, тобто такі перетворення змінних, які переводять будь-яке рівняння із класу (1) в деяке інше рівняння з цього самого класу. За допомогою перетворень еквівалентності клас рівнянь можна поділити на нееквівалентні підкласи, виділивши при цьому в кожному з підкласів по одному представнику з найпростішим виглядом рівняння, які називають канонічними рівняннями. Тоді досить дослідити тільки канонічні представники із кожного підкласу, щоб зробити висновок про симетрійні властивості всіх рівнянь певного класу.

Означення 1. *Перетворенням еквівалентності класу рівнянь* (1) *називають невироджену локальну заміну змінних*

$$\bar{t} = T(t,x,y,u); \quad \bar{x} = X(t,x,y,u); \quad \bar{y} = Y(t,x,y,u);$$
$$\bar{u} = U(t,x,y,u); \quad \bar{f} = F(t,x,y,u,f),$$

яка переводить кожне рівняння із класу (1) *на функцію* $u = u(t,x,y)$ *з довільним елементом* f *у деяке інше рівняння з цього самого класу на функцію* $\bar{u} = \bar{u}(\bar{t},\bar{x},\bar{y})$ *з новим довільним елементом* $\bar{f}$.

Множина перетворень еквівалентності становить групу перетворень еквівалентності, яку надалі позначатимемо E. Групу E знаходимо за відомим алгоритмом [7, 9]. Провівши обчислення, отримуємо таке твердження.

Теорема 2. *Група* E *рівнянь* (1) *складається з таких перетворень:*

$$\bar{t} = a_1^2 t + a_2; \quad \bar{x} = a_3 x^{a_1}; \quad \bar{y} = a_4 t + a_5 y + a_6;$$
$$\bar{u} = a_7 e^{(1-a_1^2)t/4} x^{(a_1-1)/2} u + \varphi(t,x); \quad \bar{f} = \frac{a_5}{a_1^2} f - \frac{a_4}{a_1^2}, \tag{11}$$

де a_i, $i \in \{1,\ldots,7\}$ *— довільні сталі, що задовольняють умову* $a_1 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, $a_5 \neq 0$, $a_7 \neq 0$; $\varphi(t,x)$ *— довільний розв'язок лінійного рівняння*

$$\varphi_t = x^2\varphi_{xx} + (1-a_1)x\varphi_x.$$

4 Розширення ядра максимальних алгебр інваріантності диференціальних рівнянь із класу (1)

Розглянемо розв'язок задачі виділення із класу (1) із точністю до перетворень еквівалентності тих диференціальних рівнянь (знайдемо всі специфікації функції $f(x)$), які мають нетривіальні симетрійні властивості, тобто допускають алгебру інваріантності вищої розмірності, ніж

$$A^{ker} \oplus_s < \gamma(t,x,y)\partial_u >, \tag{12}$$

де $\gamma(t,x,y)$ — довільний гладкий розв'язок відповідного рівняння (1); символ $\oplus_s$ тут і надалі позначатиме напівпряму суму двох алгебр Лі. Оператор симетрії $X = \gamma(t,x,y)\partial_u$, який притаманний лінійним рівнянням й обумовлює принцип суперпозиції, надалі не враховуватимемо.

Перший етап полягає в тому, щоб знайти представників підкласів рівнянь із найпростішим виглядом, алгебра інваріантності яких має вищу розмірності, ніж (12), тобто треба знайти відповідні “канонічні“ функції $f(x)$. Для розв'язування цієї задачі необхідно розв'язати систему визначальних рівнянь (5)–(9).

Спочатку розглянемо випадок, коли $\tau_y = 0$.

Із рівняння (6) маємо

$$\xi^1 = \left(\frac{1}{2}\tau_t(\ln x - 1) + P(t,y)\right)x, \tag{13}$$

де $P(t, y)$ — довільна функція.

Якщо $\tau_t = 0$ та $P(t, y) = 0$, то з рівнянь (7)–(9) отримаємо $f(x) = \mathrm{const}$ або максимальною алгеброю інваріантності для рівняння (1) із будь-якою функцією $f(x)$ буде алгебра (12).

Отже, або $\tau_t \neq 0$, або $P(t, y) \neq 0$.

Враховуючи це, підставимо (13) у (8) й отримаємо диференціальне рівняння на функцію $f(x)$:

$$f' + \frac{\tau_t - \xi_y^2}{\left(\frac{1}{2}\tau_t(\ln x - 1) + P(t, y)\right)x} f = -\frac{\xi_t^2}{\left(\frac{1}{2}\tau_t(\ln x - 1) + P(t, y)\right)x}. \tag{14}$$

Оскільки функція $f(x)$ залежить тільки від x, то з рівняння (14) отримаємо таке диференціальне рівняння на функцію $f(x)$:

$$f' + \frac{a_1}{(a_2 \ln x + a_3)x} f = \frac{a_4}{(a_2 \ln x + a_3)x}, \tag{15}$$

де a_i, $i \in \{1, \ldots, 4\}$ – довільні сталі. Розв'язавши рівняння (15), отримаємо такі розв'язки:

1)якщо $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$, то $f = Cx^{-\frac{a_1}{a_3}} + \dfrac{a_4}{a_1}$;

2)якщо $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, $a_4 \neq 0$, то $f = \dfrac{a_4}{a_2} \ln(a_2 \ln x + a_3) + C$;

3)якщо $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, то $f = C(a_2 \ln x + a_3)^{\frac{a_1}{a_2}} + \dfrac{a_4}{a_1}$;

4)якщо $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$, $a_4 \neq 0$, то $f = \dfrac{a_4}{a_3} \ln x + C$;

де C — довільна стала.

Оскільки функція $f(x)$ залежить тільки від x, то із розв'язків 1)–4) вона може набути вигляду

$$f = k_1 x^n + k_2, \;\; f = k_1 \ln(\ln x + k_2) + k_3, \;\; \text{або} \;\; f = k_1(\ln x + k_2)^n + k_3 \tag{16}$$

де n, k_i $i \in \{1, 2, 3\}$ — довільні сталі, що задовольняють умову $n \neq 0$, $k_1 \neq 0$.

Використовуючи перетворення еквівалентності (11), можна дещо спростити вигляд функцій (16). Результати цих перетворень відображено у табл. 1.

Таблиця 1.

№ з/п	$f(x)$	Перетворення еквівалентності	$\overline{f}(\overline{x})$
1	$k_1 x^n + k_2$, $k_1 \neq 0$, $n \neq 0$	$\bar{t} = t$, $\overline{x} = \lvert k_1\rvert^{\frac{1}{n}} x$, $\overline{y} = (k_2 t + y)\mathrm{sign} k_1$, $\overline{u} = u$	$\overline{x}^n$
2	$k_1 \ln(\ln x + k_2) + k_3$, $k_1 \neq 0$	$\bar{t} = t$, $\overline{x} = e^{k_2} x$, $\overline{y} = \dfrac{k_3}{k_1} t + \dfrac{1}{k_1} y$, $\overline{u} = u$	$\ln \ln \overline{x}$
3	$k_1(\ln x + k_2)^n + k_3$, $k_1 \neq 0$, $n \neq 0$	$\bar{t} = t$, $\overline{x} = e^{k_2} x$, $\overline{y} = \dfrac{k_3}{k_1} t + \dfrac{1}{k_1} y$, $\overline{u} = u$	$\ln^n \overline{x}$

Отже, знайдено "канонічні" функції, які представляють відповідні підкласи рівнянь у випадку $\tau_y = 0$. У випадку $\tau_y \neq 0$ аналіз пошуку "канонічних" функцій $f(x)$ аналогічний (хоча і більш складний), і приводить до такого ж результату, що і в попередньому випадку, які відображені в табл. 1.

Останній етап групової класифікації передбачає розв'язування визначальних рівнянь (5)–(9) для кожного випадку отриманих функцій $f(x) = x^n$, $f(x) = \ln\ln x$ та $f(x) = \ln^n x$, де $n \neq 0$, й знаходження відповідних інфінітезимальних операторів симетрії.

Розглянемо випадок $f(x) = x^n$, $n \neq 0$.

Розв'язавши визначальні рівняння (5)–(9) із $f(x) = x^n$, отримуємо такий розв'язок системи:

$$\tau = C_1;\ \xi^1 = (C_2 y + C_3)x;\ \xi^2 = C_2\frac{n}{2}y^2 + C_3 n y + C_4;$$
$$\eta = \left(C_2\frac{1}{2n}(x^n + n(1-n)y) + C_5\right)u + \beta(t,x,y),$$

де C_i, $i \in \{1,\ldots,5\}$ — довільні сталі інтегрування, $\beta(t,x,y)$ — довільний розв'язок рівняння (1).

Отже, максимальною алгеброю інваріантності рівняння (1) з функцією $f(x) = x^n$, $n \neq 0$, є п'ятивимірна алгебра із базисними операторами:

$$\langle \partial_t, \partial_y, u\partial_u, x\partial_x + ny\partial_y, xy\partial_x + \frac{n}{2}y^2\partial_y + \frac{1}{2n}(x^n + n(1-n)y)u\partial_u\rangle.$$

Таким чином, в цьому випадку до операторів алгебри A^{ker} додаються оператори

$$X_4 = x\partial_x + ny\partial_y,\ X_5 = xy\partial_x + \frac{n}{2}y^2\partial_y + \frac{1}{2n}(x^n + n(1-n)y)u\partial_u.$$

Якщо $f(x) = \ln\ln x$, то із системи визначальних рівнянь (6)–(9) отримуємо такий розв'язок:

$$\tau = C_1 t + C_2;\ \xi^1 = \frac{1}{2}C_1 x\ln x;\ \xi^2 = C_1\left(y - \frac{1}{2}t\right) + C_3;$$
$$\eta = \left(\frac{1}{4}C_1(\ln x - t) + C_4\right)u + \beta(t,x,y),$$

де C_i, $i \in \{1,\ldots,4\}$ — довільні сталі інтегрування, $\beta(t,x,y)$ — довільний розв'язок рівняння (1).

Отже, максимальною алгеброю інваріантності є чотиривимірна алгебра із базисними операторами:

$$\langle \partial_t, \partial_y, u\partial_u, t\partial_t + \frac{1}{2}x\ln x\partial_x + \left(y - \frac{1}{2}t\right)\partial_y + \frac{1}{4}(\ln x - t)u\partial_u\rangle.$$

У цьому випадку до операторів алгебри A^{ker} додається оператор

$$X_4 = t\partial_t + \frac{1}{2}x\ln x\partial_x + \left(y - \frac{1}{2}t\right)\partial_y + \frac{1}{4}(\ln x - t)u\partial_u.$$

Розглянемо випадок, коли у класі рівнянь (1) $f(x) = \ln^n x$, $n \neq 0$, $n \neq 1$.

Якщо $f(x) = \ln^n x$, $n \neq 0$, $n \neq 1$, то із системи визначальних рівнянь (5)–(9) отримуємо такий розв'язок:

$$\tau = C_1 t + C_2;\ \xi^1 = \frac{1}{2} C_1 x \ln x;\ \xi^2 = C_1 \frac{n+2}{2} y + C_3;$$
$$\eta = \left(\frac{1}{4} C_1 (\ln x - t) + C_4 \right) u + \beta(t, x, y),$$

де C_i, $i \in \{1, \ldots, 4\}$ — довільні сталі інтегрування, $\beta(t, x, y)$ — довільний розв'язок рівняння (1).

Отже, максимальною алгеброю інваріантності є чотиривимірна алгебра із базисними операторами:

$$\langle \partial_t, \partial_y, u\partial_u, t\partial_t + \frac{1}{2} x \ln x \partial_x + \frac{n+2}{2} y \partial_y + \frac{1}{4} (\ln x - t) u \partial_u \rangle.$$

Таким чином, в цьому випадку до операторів алгебри A^{ker} додається оператор

$$X_4 = t\partial_t + \frac{1}{2} x \ln x \partial_x + \frac{n+2}{2} y \partial_y + \frac{1}{4} (\ln x - t) u \partial_u.$$

Розглянемо випадок, коли у класі рівнянь (1) $f(x) = \ln x$.

Розв'язавши систему визначальних рівнянь (5)–(9) із $f(x) = \ln x$, отримуємо такий розв'язок:

$$\tau = C_1 t^2 + C_2 t + C_3;$$
$$\xi^1 = \left(C_1 t + \frac{1}{2} C_2 \right) x \ln x + (C_4 t^2 + C_5 t - 3C_1 y + C_6) x;$$
$$\xi^2 = 3C_1 t y + \frac{3}{2} C_2 y - \frac{1}{3} C_4 t^3 - \frac{1}{2} C_5 t^2 - C_6 t + C_7;$$
$$\eta = \left(-C_1 \ln^2 x + \frac{1}{2} \left((C_1 - 2C_4) t - C_5 + \frac{1}{2} C_2 \right) \ln x + \frac{1}{4} (2C_4 - C_1) t^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4} (2C_5 - 8C_1 - C_2) t - \left(C_4 + \frac{3}{2} C_1 \right) y + C_8 \right) u + \beta(t, x, y),$$

де C_i, $i \in \{1, \ldots, 8\}$ — довільні сталі інтегрування, $\beta(t, x, y)$ — довільний розв'язок рівняння (1).

Отже, максимальною алгеброю інваріантності рівняння (1) із функцією $f(x) = \ln x$ є восьмивимірна алгебра із базисними операторами:

$$\langle \partial_t, \partial_y, u\partial_u, x\partial_x - t\partial_y, tx\partial_x - \frac{1}{2} t^2 \partial_y + \frac{1}{2} (t - \ln x) u \partial_u,$$
$$t^2 \partial_t + (t \ln x - 3y) x \partial_x + 3ty \partial_y + \left(-\ln^2 x + \frac{1}{2} t \ln x - \frac{1}{4} t^2 - 2t - \frac{3}{2} y \right) u \partial_u,$$
$$t\partial_t + \frac{1}{2} x \ln x \partial_x + \frac{3}{2} y \partial_y + \frac{1}{4} (\ln x - t) u \partial_u,\ t^2 x \partial_x - \frac{1}{3} t^3 \partial_y - \left(t \ln x + y - \frac{1}{2} t^2 \right) u \partial_u \rangle.$$

У цьому випадку, до операторів алгебри A^{ker} додаються оператори:

$$X_4 = x\partial_x - t\partial_y, X_5 = tx\partial_x - \frac{1}{2}t^2\partial_y + \frac{1}{2}(t - \ln x)u\partial_u,$$
$$X_6 = t^2\partial_t + (t\ln x - 3y)x\partial_x + 3ty\partial_y + \left(-\ln^2 x + \frac{1}{2}t\ln x - \frac{1}{4}t^2 - 2t - \frac{3}{2}y\right)u\partial_u,$$
$$X_7 = t\partial_t + \frac{1}{2}x\ln x\partial_x + \frac{3}{2}y\partial_y + \frac{1}{4}(\ln x - t)u\partial_u,$$
$$X_8 = t^2x\partial_x - \frac{1}{3}t^3\partial_y - \left(t\ln x + y - \frac{1}{2}t^2\right)u\partial_u.$$

5 Висновки

У цій статті знайдено неперервні перетворення класу лінійних рівнянь ціноутворення азійських опціонів і зроблено групову класифікацію цих рівнянь, у результаті якої виділено всі нееквівалентні підкласи рівнянь, які мають алгебру інваріантності ширшу, ніж ядро основних алгебр інваріантності рівнянь класу (1).

На наступних етапах для рівнянь, які є представниками нееквівалентних підкласів, ми плануємо зробити класифікацію всіх одновимірних і двовимірних підалгебр їх алгебр інваріантності, а надалі, використовуючи інваріанти операторів цих підалгебр, провести симетрійну редукцію і знайти всі нееквівалентні інваріантні розв'язки.

Список літератури

[**1**] Al-Azemi F., Calin O. *Asian Options with Harmonic Average.* Appl. Math. Inf. Sci. 2015, **9** (6), 2803–2811.

[**2**] Barucci E., Polidoro S., Vespri V. *Some Results on Partial Differential Equations and Asian options.* Math. Models and Methods in Appl. Sci. 2001, **11** (3), 475–497.

[**3**] Demetriou E., Ivanova N. M., Sophocleous C. *Group analysis of (2+1)- and (3+1)-dimensional diffusion-convection equations.* J. Math. Anal. Appl. 2008, **348** (1), 55–65.

[**4**] Dorodnitsyn V. A., Knyazeva I. V., Svirschevsky S. R. *Group properties of the heat equation with a source in two-dimensional and three-dimensional cases.* Differential Equations 1983, **19** (7), 1215–1223. (in Russian)

[**5**] Elwakil S. A., Zahran M. A., Sabry R. *Group classification and symmetry reduction of a (2+1)-dimensional diffusion-advection equation.* J. Appl. Math. Phys. 2005, **56** (6), 986–999.

[**6**] Ibragimov N. X. (ed.) CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. CRC Press, Boca Raton, 1994.

[**7**] Lahno V. I., Spichak S. V., Stogniy V. I. Symmetry Analysis of Evolution Type Equations. Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2002. (in Ukrainian)

[**8**] Nikitin A. G., Popovych R. O. *Group classification nonlinear Schrodinger equations.* Ukr. Math. J. 2001, **53** (8), 1255–1265.

[**9**] Ovsiannikov L. V. Group Analysis of Differential Equations. Academic Press, New York, 1982.

[**10**] Ovsiannikov L. V. *Group properties of nonlinear heat equation.* Dokl. AN SSSR 1959, **125** (3), 492–495. (in Russian)

[**11**] Rassokha I., Serov M., Spichak S., Stogniy V. *Group classification of a class of generalized nonlinear Kolmogorov equations and exact solutions.* J. Math. Phys. 2018, **59** (7), 071514.

[**12**] Spichak S. V., Stogniy V. I. *Symmetry classification and exact solutions of the Kramers equation.* J. Math. Phys. 1998, **39** (6), 3505–3510.

[**13**] Spichak S. V., Stogniy V. I., Kopas I. M. *Symmetry properties and exact solutions of (2+1)-dimensional linear equations of pricing of Asian options.* Proceedings of Institute of Mathematscs of NAS of Ukraine 2019, **16** (1), 164–173. (in Ukrainian)

[**14**] Vaneeva O., Karadzhov Yu., Sophocleous C. *Group analysis of a class of nonlinear Kolmogorov equations.* Lie Theory and Its Applications in Physics, Springer Proc. Math. Stat., Springer, Singapore 2016, **191**, 349–360.

Надійшло 19.12.2022

Spichak S. V., Stogniy V. I., Kopas I. M. *Group classification of one class (2+1)-dimensional linear equations of Asian options pricing*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 240–248.

A group classification of one class of (2+1)-dimensional linear equations of Asian options pricing was carried out. As a result, the kernel of maximal invariance algebras and continuous equivalence transformations of this class of equations were found. Using equivalence transformations, all non-equivalent subclasses of equations that have an invariance algebra wider than the kernel of maximal invariance algebras are selected. For each such subclass of equations, Lie algebras of symmetry operators of dimensions four, five, and eight are found.