Городецький В.В., Шевчук Н.М., Колісник Р.С.

Багатоточкова за часом задача для одного класу еволюційних рівнянь у просторах типу S

Доведено коректну розв'язність багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з функціями від оператора диференціювання, зокрема, з операторами дробового диференціювання, та початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу S'. Досліджено поведінку розв'язку зазначеної задачі при $t \to +\infty$ у просторах типу S' (слабка стабілізація). Знайдено умову на початкову функцію, при виконанні якої розв'язок стабілізується до нуля рівномірно на $\mathbb{R}$.

Ключові слова і фрази: багатоточкова за часом задача, еволюційні рівняння, задача Коші, оператор Бесселя, параболічні рівняння, топологічна структура, мультиплікатор, згортка, згортувач, фінітна узагальнена функція, перетворення Фур'є.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
e-mail: *v.gorodetskiy@chnu.edu.ua,n.shevchuk@chnu.edu.ua, r.kolisnyk@chnu.edu.ua*

Вступ. У теорії задачі Коші для рівномірно параболічних рівнянь та систем рівнянь на сьогодні одержано досить повні результати щодо коректної розв'язності, інтегрального зображення розв'язків та дослідження їх властивостей. При цьому початкові умови – початкові функції - часто мають особливості у одній або декількох точках і допускають регуляризацію у певних просторах узагальнених функцій типу розподілів Соболєва-Шварца, ультрарозподілів, гіперфункцій тощо. Отже, задача Коші для таких рівнянь має природну постановку і у класах початкових умов, які є узагальненими функціями скінченного або нескінченного порядків.

При дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними параболічного типу або сингулярних параболічних рівнянь з оператором Бесселя (B-параболічних рівнянь [1]) часто використовуються простори типу S, введені І.М. Гельфандом та Г.Є. Шиловим в [2]. Функції з таких просторів на дійсній осі разом з усіма своїми похідними спадають при $|x| \to \infty$ швидше, ніж $\exp\{-a|x|^\alpha\}$, a, $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}$. У працях [3–8] встановлено, що простори типу S та S' – топологічно спряжені до S, є природними множинами початкових даних задачі Коші для широких класів рівнянь з частинними похідними, при яких розв'язки є цілими функціями за просторовими змінними.

УДК 517.98
2010 *Mathematics Subject Classification:* 39B12, 45J05.

Теорія лінійних параболічних та B-параболічних рівнянь з частинними похідними бере свій початок із дослідження рівняння теплопровідності. Класична теорія задачі Коші та крайових задач для таких рівнянь і систем рівнянь побудована в працях І.Г. Петровського, С.Д. Ейдельмана, С.Д. Івасишена, М.І. Матійчука, М.В. Житарашу, А. Фрідмана, С. Теклінда, І.А. Кіпріянова, В.В. Крехівського та ін. Задача Коші з початковими умовами у просторах узагальнених функцій типу розподілів та ультрарозподілів вивчалася Г.Є. Шиловим, Б.Л. Гуревичем, М.Л. Горбачуком, В.І. Горбачук, О.І. Кашпіровським, Я.І. Житомирським, В.В. Городецьким, О.В. Мартинюк та ін.

Узагальненням задачі Коші для таких рівнянь є нелокальна багатоточкова за часом задача, коли початкова умова $u(t,\cdot)|_{t=0} = f$ замінюється умовою

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = f, \tag{1}$$

де $t_0 = 0$, $\{t_1, ..., t_m\} \subset (0,\infty)$, $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ – фіксовані числа (якщо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші), при цьому умова (1) трактується у класичному розумінні або в слабкому сенсі, якщо f – узагальнена функція. Зазначимо, що нелокальна багатоточкова за часом задача відноситься до нелокальних задач для диференціально-операторних рівнянь та рівнянь з частинними похідними. Такі задачі виникають при моделюванні багатьох процесів та задач практики крайовими задачами з нелокальними умовами, при описі всіх коректних задач для конкретного оператора, при побудові загальної теорії крайових задач (див., напр., [9–15] огляд результатів, які стосуються нелокальних задач, див. у [15]).

Формальним розширенням класу лінійних параболічних рівнянь є еволюційні рівняння з оператором $\varphi\Big(i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$, побудованими за функціями, які задовольняють певну умову. У цій статті досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \varphi\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}. \tag{2}$$

Зауважимо, що до рівнянь (2) відносяться і рівняння параболічного типу з операторами диференціювання "нескінченного порядку" [16], а також рівняння з операторами дробового диференціювання. Встановлено властивості фундаментального розв'язку багатоточкової за часом задачі для рівняння (2), доведено коректну розв'язність зазначеної задачі з початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу S', знайдено аналітичне зображення розв'язку. Досліджено поведінку розв'язку $u(t,\cdot)$ при $t \to +\infty$ у просторі узагальнених функцій типу S' (слабка стабілізація), а також рівномірну стабілізацію розв'язку до нуля на $\mathbb{R}$.

1. Простори типу S та S'. І.М. Гельфанд та Г.Є. Шилов ввели в [2] серію просторів, названих ними просторами типу S. Вони складаються з нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють умову

$$\exists c = c(\varphi) > 0 \; \exists A = A(\varphi) > 0 \; \exists B = B(\varphi) > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \; \forall \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+ :$$

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \le cA^k B^n m_{kn} \tag{3}$$

де $m_{kn} = k^{k\alpha} n^{n\beta}$, α, $\beta > 0$ – фіксовані параметри.

Введені простори можна охарактеризувати ще й так [2].

S_α^β складається з тих й лише тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(n)}(x)| \le cB^n n^{n\beta} \exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{4}$$

де сталі c, a, $B > 0$ залежать лише від функції φ.

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \ge 1-\beta$, то S_α^β складається з тих й лише тих функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які аналітично продовжуються в комплексну площину $\mathbb{C}$ і для яких

$$|\varphi(x+iy)| \le c\exp\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\}, c, a, b > 0, \{x,y\} \subset \mathbb{R}.$$

S_α^1, $\alpha > 0$, складається з функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які аналітично продовжуються в деяку смугу $|\operatorname{Im} z| < \delta$, $z = x+iy$ (залежну від φ) комплексної площини, при цьому справджується оцінка

$$|\varphi(x+iy)| \le c\exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}, c, a > 0, |y| < \delta, x \in \mathbb{R}.$$

Простори S_α^β нетривіальні при $\alpha + \beta \ge 1$ і утворюють щільні в $L_2(\mathbb{R})$ множини.

Топологічна структура в S_α^β визначається так. Символом $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$, $A, B > 0$, позначимо сукупність функцій $\varphi \in S_\alpha^\beta$, які задовольняють умову

$$\forall \overline{A} > A,\ \forall \overline{B} > B:\ |x^k \varphi^{(n)}(x)| \le c\overline{A}^k \overline{B}^n k^{k\alpha} n^{n\beta},\ \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

Ця множина перетворюється в повний зліченно-нормований досконалий простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,n} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(A+\delta)^k (B+\rho)^n k^{k\alpha} n^{n\beta}},\ \{\delta, \rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}.$$

Вказану систему норм іноді замінюють еквівалентною їй системою норм

$$\|\varphi\|'_{\delta\rho} = \sup_{x,k,n} \frac{\exp\{a(1-\delta)|x|^{1/\alpha}\}|\varphi^{(n)}(x)|}{(B+\rho)^n n^{n\beta}}, \quad \{\delta, \rho\} \subset \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}.$$

Якщо $A_1 < A_2$, $B_1 < B_2$, то $S_{\alpha,A_1}^{\beta,B_1}$ неперервно вкладається в $S_{\alpha,A_2}^{\beta,B_2}$ і $S_\alpha^\beta = \bigcup_{A,B>0} S_{\alpha,A}^{\beta,B}$, тобто в S_α^β вводиться топологія індуктивної границі просторів $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$. Отже, збіжність послідовності $\{\varphi_\nu, \nu \ge 1\} \subset S_\alpha^\beta$ до нуля в просторі S_α^β – це збіжність за топологією одного з просторів $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$, до якого належать всі функції φ_ν. Іншими словами (див. [2]), $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ у просторі S_α^β тоді і тільки тоді, коли послідовність $\{\varphi_\nu^{(n)}, \nu \ge 1\}$ (при кожному $n \in \mathbb{Z}_+$) збігається при $\nu \to +\infty$ рівномірно до нуля на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$ і для деяких $c, a, B > 0$, не залежних від ν, справджується нерівність

$$|\varphi_\nu^{(n)}(x)| \le cB^n n^{n\beta} \exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}, n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

Функція $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ називається *мультиплікатором* у просторі S_α^β, якщо $g\psi \in S_\alpha^\beta$ для довільної функції $\psi \in S_\alpha^\beta$ і відображення $\psi \to g\psi$ є лінійним і неперервним оператором у S_α^β.

Множина $F \subset S_\alpha^\beta$ називається *обмеженою*, якщо вона міститься в деякому зліченно-нормованому просторі $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ і в ньому обмежена, тобто, для всіх функцій з F справджується оцінка (3) (або (4)) з одними й тими ж сталими $c, A, B > 0$ $(c, B, a > 0)$.

У просторах S_α^β клас лінійних обмежених операторів збігається з класом лінійних неперервних операторів [2].

У цих просторах визначена і неперервна операція множення на незалежну змінну, диференціювання, зсуву аргумента T_x: $\varphi(\xi) \to \varphi(\xi + x)$, $\forall \varphi \in S_\alpha^\beta$. Ця операція є також диференційовною (навіть нескінченно диференційовною) у тому розумінні, що граничні співвідношення вигляду

$$(\varphi(x+h) - \varphi(x))h^{-1} \to \varphi'(x), h \to 0,$$

справджуються для кожної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$ в сенсі збіжності за топологією простору S_α^β (див. [2]).

Простори S_α^β пов'язані між собою перетворенням Фур'є, а саме, правильною є формула $F[S_\alpha^\beta] = S_\beta^\alpha$, де

$$F[S_\alpha^\beta] := \Big\{\psi : \ \psi(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx, \ \varphi \in S_\alpha^\beta \Big\},$$

при цьому оператор F: $S_\alpha^\beta \to S_\beta^\alpha$, $\alpha, \beta > 0$, є неперервним.

Символом P_ω, де $\omega \in (0, 1]$ – довільно фіксований параметр, позначимо множину функцій φ: $\mathbb{R} \to (0, \infty)$, які задовольняють умови: 1) $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, 2) $\forall \sigma \in \mathbb{R}$: $\varphi(\sigma) > |\sigma|^\omega$, 3) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists c_\varepsilon > 0 \ \forall \sigma \in \mathbb{R}$: $\varphi(\sigma) \le c_\varepsilon \exp\{\varepsilon |\sigma|^\omega\}$, 4) $\exists c_0, B_0 > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall \sigma \in \mathbb{R}$: $|\varphi^{(n)}(\sigma)| \le c_0 B_0^n n!$.

Урахувавши формулу Стірлінга, умову 4) можна записати у вигляді

4′) $\exists c_1, B_1 > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall \sigma \in \mathbb{R}$: $|\varphi^{(n)}(\sigma)| \le c_1 B_1^n n^n$

(приклади функцій, які задовольняють умови 1) –4), або 1) – 4′), наведемо пізніше).

Лема 1. *Кожна функція $\varphi \in P_\omega$ – мультиплікатор у просторі $S_{1/\omega}^1$, а також у кожному просторі $S_{1/\omega}^\gamma$, де $\gamma > 1$.*

Доведення. Насамперед доведемо, що $\varphi\psi \in S_{1/\omega}^1$ для довільної функції $\psi \in S_{1/\omega}^1$. Функція ψ, згідно з означенням простору $S_{1/\omega}^1$, задовольняє умову

$$\exists a > 0 \ \exists c > 0 \ \exists B > 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}_+ \ \forall \sigma \in \mathbb{R} :$$

$$|\psi^{(n)}(\sigma)| \le c B^n n^n \exp\{-a|\sigma|^\omega\}. \tag{5}$$

Урахувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, умови 3), 4′), одержимо

$$|(\varphi(\sigma)\psi(\sigma))^{(n)}| = \Big| \sum_{k=0}^{n} C_n^k \varphi^{(k)}(\sigma) \psi^{(n-k)}(\sigma) \Big| \le$$

$$\le |\varphi(\sigma)| \cdot |\psi^{(n)}(\sigma)| + \sum_{k=1}^{n} C_n^k |\varphi^{(k)}(\sigma)| |\psi^{(n-k)}(\sigma)\Big| \le$$

$$\leq c_1 c_\varepsilon B^n n^n \exp\{\varepsilon|\sigma|^\omega - a|\sigma|^\omega\} + c_1 c_\varepsilon \sum_{k=1}^{n} C_n^k B_1^k k^k B^{n-k}(n-k)^{n-k} \exp\{-a|\sigma|^\omega\}.$$

Взявши $\varepsilon = a/2$, прийдемо до нерівності

$$|(\varphi(\sigma)\psi(\sigma))^{(n)}| \leq \tilde{c}\tilde{B}^n n^n \exp\{-\tilde{a}|\sigma|^\omega\}, \tag{6}$$

де $\tilde{c} = c_1 c_\varepsilon$, $\tilde{B} = \max\{B, B_2\}$, $B_2 = 2\max\{B, B_1\}$, $\tilde{a} = a/2$. З (6) випливає, що $\varphi\psi \in S^1_{1/\omega}$, а також те, що оператор $\psi \to \varphi\psi$ відображає кожну обмежену множину простору $S^1_{1/\omega}$ у обмежену множину цього ж простору, тобто цей оператор є неперервним. Це і означає, що φ – мультиплікатор у просторі $S^1_{1/\omega}$, а також у кожному просторі $S^\gamma_{1/\omega}$, де $\gamma > 1$.

Лему 1 доведено. □

Нехай φ – довільно фіксована функція з класу P_ω. Нагадаємо, що $i\partial/\partial x$ – самоспряжений у $L_2(\mathbb{R})$ зі щільною у $L_2(\mathbb{R})$ областю визначення

$$\mathcal{D}(i\partial/\partial x) = \{\psi \in L_2(\mathbb{R}) :\ \exists \psi' \in L_2(\mathbb{R})\}.$$

Якщо E_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, – спектральна функція оператора $i\partial/\partial x$, то, внаслідок основної спектральної теореми для самоспряжених операторів та операційного числення для таких операторів

$$\varphi\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda)dE_\lambda\psi, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}\Big(\varphi\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big).$$

Звідси випливає, що $\varphi\Big(i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$ – самоспряжений у $L_2(\mathbb{R})$ оператор. Відомо ([17]), що

$$E_\lambda\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\lambda} \Big\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau)e^{i\sigma\tau}d\tau\Big\}e^{-it\sigma}d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\lambda} F[\psi](\sigma)e^{-it\sigma}d\sigma.$$

Отже, $dE_\lambda\psi = \dfrac{1}{2\pi}F[\psi](\lambda)e^{-it\lambda}d\lambda$, тобто

$$\varphi\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda)F[\psi](\lambda)e^{-it\lambda}d\lambda = F^{-1}[\varphi(\lambda)F[\psi]].$$

Якщо $\psi \in S_2^{1/\omega}$, то $F[\psi] \in S^2_{1/\omega}$. Оскільки φ – мультиплікатор у просторі $S^2_{1/\omega}$, то $\varphi F[\psi] \in S^2_{1/\omega}$, а $F^{-1}[\varphi F[\psi]] \in S_2^{1/\omega}$. Нехай $\hat{A} := \varphi\Big(i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)|_{S_2^{1/\omega}}$ – звуження оператора $\varphi\Big(i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$ на простір $S_2^{1/\omega}$. Із означення мультиплікатора та властивостей перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S випливає, що $\hat{A}$: $S_2^{1/\omega} \to S_2^{1/\omega}$ – лінійний, неперервний оператор, який збігається із псевдодиференціальним оператором у просторі $S_2^{1/\omega}$, побудованим за функцією-символом $\varphi \in P_\omega$.

Символом $(S_\alpha^\beta)'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на S_α^β зі слабкою збіжністю. Елементи простору $(S_\alpha^\beta)'$ називатимемо узагальненими функціями типу ультрарозподілів. Якщо $f \in (S_\alpha^\beta)'$, то до цього ж простору належить також кожна похідна $f^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$, де $f^{(p)}$ визначається за допомогою формули:

$$\langle f^{(p)}, \psi\rangle := (-1)^p \langle f, \psi^{(p)}\rangle, \forall \psi \in S_\alpha^\beta$$

(тут $\langle f^{(p)}, \psi\rangle$ позначає дію функціонала $f^{(p)}$ на основну функцію ψ). Оскільки в основному просторі S_α^β визначена операція зсуву, то згортку узагальненої функції $f \in (S_\alpha^\beta)'$ із основною функцією $\psi \in S_\alpha^\beta$ задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) := \langle f_\xi, T_{-x}\check{\varphi}(\xi)\rangle = \langle f_\xi, \varphi(x-\xi)\rangle, \quad \check{\varphi}(\xi) := \varphi(-\xi).$$

Із властивості нескінченної диференційовності операції зсуву аргумента у просторі S_α^β випливає, що згортка $f * \varphi$ є звичайною нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією.

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in (S_\alpha^\beta)'$ визначається за допомогою співвідношення

$$\langle F[f], \psi\rangle = \langle f, F[\psi]\rangle, \ \forall \psi \in S_\beta^\alpha.$$

Із властивості лінійності і неперервності функціонала f та властивостей перетворення Фур'є основних функцій випливає лінійність і неперервність функціонала $F[f]$, визначеного на просторі основних функцій S_β^α. Отже, перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in (S_\alpha^\beta)'$ є узагальненою функцією, заданою на S_β^α, тобто $F[f] \in (S_\beta^\alpha)'$.

Нехай $f \in (S_\alpha^\beta)'$. Якщо $f * \psi \in S_\alpha^\beta$ для довільної функції $\psi \in S_\alpha^\beta$ і із співвідношення $\psi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ за топологією простору S_α^β випливає, що $f * \psi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ за топологією простору S_α^β, то функціонал f називається *згортувачем* у просторі S_α^β. Якщо $f \in (S_\alpha^\beta)'$ – згортувач у просторі S_α^β, то для довільної функції $\psi \in S_\alpha^\beta$ правильною є формула $F[f * \psi] = F[f] \cdot F[\psi]$, при цьому $F[f]$ – мультиплікатор у просторі S_β^α.

2. Багатоточкова за часом задача. Розглянемо еволюційне рівняння

$$\partial u(t,x)/\partial t + \hat{A}u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{7}$$

де $\hat{A} = \varphi\Big(i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)|_{S_2^{1/\omega}} = F^{-1}[\varphi F]$, $\varphi \in P_\omega$ (див. п. 1). Під розв'язком рівняння (7) розуміємо функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, яка володіє властивостями: 1) $u(t,\cdot) \in C^1(0,+\infty)$ при кожному $x \in \mathbb{R}$; 2) $u(\cdot,x) \in S_2^{1/\omega}$ при кожному $t \in (0,\infty)$; 3) $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (7).

Для рівняння (7) поставимо нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти розв'язок рівняння (7), який задовольняє умову:

$$\mu u(0,x) - \mu_1 u(t_1,x) - \dots - \mu_m u(t_m,x) = f(x), x \in \mathbb{R}, f \in S_2^{1/\omega}, \tag{8}$$

де $u(0,x) := \lim\limits_{t\to+0} u(t,x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0,+\infty)$, $\{t_1,\dots,t_m\} \subset (0,+\infty)$, $m \in \mathbb{N}$ – фіксовані числа, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < +\infty$, $\mu > \sum\limits_{k=1}^m \mu_k$.

Розв'язок задачі (7), (8) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є, ввівши позначення: $F[u(t,\cdot)] = v(t,\cdot)$. Для функції v: $\Omega \to \mathbb{R}$ дістанемо задачу з параметром σ:

$$\frac{dv(t,\sigma)}{dt} + \varphi(\sigma)v(t,\sigma) = 0,\ (t,\sigma)\in\Omega, \tag{9}$$

$$\mu v(0,\sigma) - \sum_{k=1}^{m}\mu_k v(t_k,\sigma) = \tilde{f}(\sigma),\ \sigma\in\mathbb{R}, \tag{10}$$

де $\tilde{f}(\sigma) = F[f](\sigma)$. Загальний розв'язок рівняння (9) має вигляд

$$v(t,\sigma) = c\exp\{-t\varphi(\sigma)\},\ (t,\sigma)\in\Omega, \tag{11}$$

де $c = c(\sigma)$ визначимо з умови (10). Підставивши (11) у (10) знайдемо, що

$$c = \tilde{f}(\sigma)\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\{-t_k\varphi(\sigma)\}\Big)^{-1},\ \sigma\in\mathbb{R}.$$

Введемо позначення: $G(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)]$, $Q(t,\sigma) := Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)$, $Q_1(t,\sigma) = \exp\{-t\varphi(\sigma)\}$, $Q_2(\sigma) = \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\{-t_k\varphi(\sigma)\}\Big)^{-1}$. Далі, міркуючи формально, прийдемо до співвідношення:

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)f(\xi)d\xi = G(t,x)*f(x),\ (t,x)\in\Omega.$$

Справді,

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\Big(\int_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{i\sigma\xi}d\xi\Big)e^{-i\sigma x}d\sigma =$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\Big((2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)e^{-i\sigma(x-\xi)}d\sigma\Big)f(\xi)d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)f(\xi)d\xi = G(t,x)*f(x),\quad (t,x)\in\Omega. \tag{12}$$

Коректність проведених тут перетворень, а, отже, правильність формули (12) випливає з властивостей функції Q, які наведено нижче.

Лема 2. *Для похідних функції $Q_1(t,\sigma)$, $(t,\sigma)\in\Omega$, правильними є оцінки*

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \le cA^s t^{\nu s}s^s\exp\{-t|\sigma|^\omega\}, s\in\mathbb{N}, \tag{13}$$

де $\nu = 0$, якщо $0 < t \le 1$ і $\nu = 1$, якщо $t > 1$, сталі c, $A > 0$ не залежать від t.

Доведення. Для доведення твердження скористаємось формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції

$$D_\sigma^s F(g(\sigma)) = \sum_{p=1}^{s}\frac{d^pF(g)}{dg^p}\sum\frac{s!}{p_1!\ldots p_l!}\Big(\frac{d}{d\sigma}g(\sigma)\Big)^{p_1}\ldots\Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\sigma^l}g(\sigma)\Big)^{p_l}, s\in\mathbb{N} \tag{14}$$

(знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $p_1+2p_2+\dots+lp_l=s$, $p_1+p_2+\dots+p_l=m$), де покладемо $F=e^g$, $g=-t\varphi(\sigma)$. Тоді

$$D^s_\sigma e^{-t\varphi(\sigma)} = e^{-t\varphi(\sigma)} \sum_{p=1}^{s} \sum \frac{s!}{p_1!\dots p_l!}\Lambda,$$

де символом Λ позначено вираз:

$$\Lambda := \Big(\frac{d}{d\sigma}(-t\varphi(\sigma))\Big)^{p_1} \Big(\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\sigma^2}(-t\varphi(\sigma))\Big)^{p_2} \dots \Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\sigma^l}(-t\varphi(\sigma))\Big)^{p_l}.$$

Урахувавши властивості функції $\varphi\in P_\omega$ знайдемо, що

$$|\Lambda| \le c_0^{p_1+\dots+p_l} B_0^{p_1+2p_2+\dots+lp_l} t^{p_1+\dots+p_l} \le \tilde c_0^s t^p B_0^s, \tag{15}$$

де $\tilde c_0=\max\{1,c_0\}$. Скориставшись (15), нерівністю $\varphi(\sigma)>|\sigma|^\omega$, $\sigma\in\mathbb{R}$, та формулою Стірлінга, прийдемо до нерівності

$$|D^s_\sigma Q_1(t,\sigma)| \le \tilde c_0 B_0^s t^{\nu s} s! \exp\{-t\varphi(\sigma)\} \le cA^s t^{\nu s} s^s \exp\{-t|\sigma|^\omega\}, \sigma\in\mathbb{R}, \tag{16}$$

де $\nu=0$, якщо $0<t\le 1$ і $\nu=1$, якщо $t>1$, сталі c, $A>0$ не залежать від t. Лему 2 доведено. □

Зауваження 1. *Із оцінок* (16) *випливає, що* $Q_1(t,\cdot)\in S^1_{1/\omega}$ *при кожному* $t>0$.

Лема 3. *Функція* Q_2 *– мультиплікатор у просторі* $S^2_{1/\omega}$.

Доведення. Для доведення твердження здійснимо оцінку похідних функції Q_2. Для цього скористаємося формулою (14), у якій покладемо $F=\varphi^{-1}$, $\varphi=R$, де

$$R(\sigma)=\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\{-t_k\varphi(\sigma)\} \equiv \mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\sigma).$$

Тоді $Q_2(\sigma)=F(\varphi)\equiv R^{-1}$ і

$$|D^s_\sigma Q_2(\sigma)| = \Big|\sum_{p=1}^{s}\frac{d^p}{dR^p}R^{-1}\sum\frac{s!}{p_1!\dots p_l!}\Big(\frac{d}{d\sigma}R(\sigma)\Big)^{p_1}\cdot\dots\cdot\Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\sigma^l}R(\sigma)\Big)^{p_l}\Big|.$$

Врахувавши нерівності (16), одержимо

$$\Big|\frac{1}{j!}\frac{d^j}{d\sigma^j}R(\sigma)\Big| \le \frac{1}{j!}\sum_{k=1}^{m}\mu_k|D^j_\sigma Q_1(t_k,\sigma)| \le \tilde c_0\sum_{k=1}^{m}\mu_k B_0^j t_m^{\nu_j} \le \tilde c\tilde B^j,$$

де $\tilde c=\tilde c_0\mu$, $\tilde B=B_0\tilde t_m$, $\tilde t_m=\max\{1,t_m\}$ (тут врахована нерівність $\sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k<\mu$, а також те, що $0<t_1<t_2<\dots<t_m<+\infty$). Тоді

$$\Big|\Big(\frac{d}{d\sigma}R(\sigma)\Big)^{p_1}\dots\Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\sigma^l}R(\sigma)\Big)^{p_l}\Big| \le (\tilde c\tilde B)^{p_1}(\tilde c\tilde B^2)^{p_2}\dots(\tilde c\tilde B^l)^{p_l} =$$

$$= \tilde{c}^{p_1+\dots+p_l}\tilde{B}^{p_1+2p_2+\dots+lp_l} \le \tilde{\tilde{c}}^s \tilde{B}^s,\ \ \tilde{\tilde{c}} = \max\{1, \tilde{c}\}.$$

Крім того, $\dfrac{d^p}{dR^p}R^{-1} = (-1)^p p! R^{-(p+1)}$ і

$$R^{-1}(\sigma) = Q_2(\sigma) = \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k \exp\{-t_k\varphi(\sigma)\}\Big)^{-1} \le \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k\Big)^{-1} \equiv \beta_0 > 0,$$

оскільки, за умовою, $\mu > \sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k$. Отже,

$$\Big|\frac{d^p}{dR^p}R^{-1}\Big| \le \beta_0^{p+1}p!, |D_\sigma^s Q_2(\sigma)| \le \tilde{\tilde{c}}^s \tilde{B}^s s! \sum_{p=1}^{s}\beta_0^{p+1}p! \le c_1\beta_1^2(s!)^2 \le c_2\beta_2^s s^{2s}, s \in \mathbb{N}.$$

З останньої нерівності та обмеженості функції Q_2 на $\mathbb{R}$ випливає, що Q_2 – мультиплікатор у просторі $S^2_{1/\omega}$.

Лему 3 доведено. □

Наслідок 1. *При кожному $t > 0$ функція $Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, є елементом простору $S^2_{1/\omega}$, при цьому справджуються оцінки*

$$|D_\sigma^s Q(t,\sigma)| \le \tilde{c}\tilde{A}^s t^{\nu s} s^{2s} \exp\{-t|\sigma|^\omega\}, s \in \mathbb{Z}_+, (t,\sigma) \in \Omega,$$

де сталі $\tilde{c}$, $\tilde{A} > 0$ не залежать від t.

Урахувавши властивості перетворення Фур'є (прямого та оберненого) та формулу $F^{-1}[S^2_{1/\omega}] = S_2^{1/\omega}$, одержимо, що $G(t,\cdot) \in S_2^{1/\omega}$ при кожному $t > 0$. Виділимо в оцінках похідних функції G (за змінною x) залежність від параметра t, вважаючи, що $t > 1$. Для цього скористаємося співвідношенням

$$x^k D_x^s F[\varphi](x) = i^{k+s}F[(\sigma^s\varphi(\sigma))^{(k)}] =$$

$$= i^{k+s}\int\limits_{\mathbb{R}}(\sigma^s\varphi(\sigma))^{(k)}e^{i\sigma x}d\sigma, \{k,s\} \subset \mathbb{Z}_+, \varphi \in S^2_{1/\omega}.$$

Отже,

$$x^k D_x^s G(t,x) = (2\pi)^{-1}i^{k+s}(-1)^s\int\limits_{\mathbb{R}}(\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)}e^{i\sigma x}d\sigma.$$

Застосувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій та оцінки похідних функції $Q(t,\sigma)$, одержимо

$$|(\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)}| = \Big|\sum_{p=0}^{k} C_k^p(\sigma^s)^{(p)}Q^{(k-p)}(t,-\sigma)\Big| \le$$

$$\le |\sigma^s Q^{(k)}(t,-\sigma)| + ks|\sigma^{s-1}Q^{(k-1)}(t,-\sigma)| + \frac{k(k-1)}{2!}s(s-1)\times$$

$$\times|\sigma^{s-2}Q^{(k-2)}(t,-\sigma)| + \dots \le \tilde{c}\Big[\tilde{A}^k t^{\nu k}\tilde{B}^s t^{-s/\omega}m_{ks} + ks\tilde{A}^{k-1}t^{\nu(k-1)}\tilde{B}^{s-1}t^{-(s-1)/\omega}m_{k-1,s-1} +$$

$$+\frac{1}{2!}k(k-1)s(s-1)\tilde{A}^{k-2}t^{\nu(k-2)}\tilde{B}^{s-2}t^{-(s-2)/\omega}m_{k-2,s-2}+\dots\Big]e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\omega},$$

де $m_{ks}=k^{2k}s^{s/\omega}$; тут врахована також нерівність

$$|\sigma|^s\exp\{-t|\sigma|^\omega\}\le\tilde{B}^st^{-s/\omega}s^{s/\omega}\exp\Big\{-\frac{t}{2}|\sigma|^\omega\Big\},\tilde{B}=2^{1/\omega}.$$

Врахувавши результати, наведені в [2, с. 236–241], одержимо , що подвійна послідовність $m_{ks}=k^{2k}s^{s/\omega}$ задовольняє нерівність

$$ks\frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}}\le\tilde{\gamma}(k+s),\quad \tilde{\gamma}>0.$$

Урахувавши останню нерівність, а також те, що $t>1$, матимемо

$$|(\sigma^sQ(t,-\sigma))^{(k)}|\le\tilde{c}\tilde{A}^kt^k\tilde{B}^sm_{ks}\Big(1+\frac{ks}{\tilde{A}\tilde{B}}\frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}}+\dots+$$

$$+\frac{1}{2!}k(k-1)s(s-1)\frac{1}{\tilde{A}^2\tilde{B}^2}\frac{m_{k-2,s-2}}{m_{ks}}+\dots\Big)e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\omega}\le\tilde{c}\tilde{A}^kt^k\tilde{B}^sm_{ks}\times$$

$$\times\Big(1+\frac{ks}{\tilde{A}\tilde{B}}\frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}}+\frac{1}{2!}\frac{1}{\tilde{A}^2\tilde{B}^2}ks\frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}}(k-1)(s-1)\frac{m_{k-2,s-2}}{m_{k-1,s-1}}+\dots\Big)e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\omega}\le$$

$$\le\tilde{c}\tilde{A}^kt^k\tilde{B}^sm_{ks}\Big(1+\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{A}\tilde{B}}(k+s)+\frac{1}{2!}\frac{\tilde{\gamma}^2}{\tilde{A}^2\tilde{B}^2}(k+s)^2+\dots\Big)e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\omega}\le$$

$$\le c_1\overline{A}^kt^k\overline{B}^km_{ks}e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\omega},\overline{A}=\tilde{A}\exp\Big\{\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{A}\tilde{B}}\Big\},\overline{B}=\tilde{B}\exp\Big\{\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{A}\tilde{B}}\Big\}.$$

Отже,

$$|x^kD_x^sG(t,x)|\le(2\pi)^{-1}c_1\overline{A}^kt^k\overline{B}^sm_{ks}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\omega}d\sigma\le c_2\overline{A}^kt^k\overline{B}^st^{-1/\omega}k^{2k}s^{s/\omega},\{k,s\}\subset\mathbb{Z}_+.$$

Тоді

$$|D_x^sG(t,x)|\le c_2\overline{B}^st^{-1/\omega}s^{s/\omega}\inf_k\frac{\overline{A}^kk^{2k}}{(t^{-1}|x|)^k}\le c_3\overline{B}^st^{-1/\omega}s^{s/\omega}\exp\{-a_0t^{-1/2}|x|^{1/2}\},$$

де $c_3,\overline{B},a_0>0$ не залежать від t; тут ми скористалися відомою нерівністю з [2, с. 204]:

$$\exp\{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{1/\alpha}\}\le\inf_k\frac{L^kk^{k\alpha}}{|\xi|^k}\le c\exp\{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{1/\alpha}\},\ c=e^{\frac{\alpha e}{2}},$$

в якій $\alpha=2$, $L=\overline{A}$. Таким чином, правильним є твердження

Лема 4. *Похідні функції $G(t,x)$ (за змінною x) при $t>1$ задовольняють нерівності*

$$|D_x^sG(t,x)|\le c_3\overline{B}^st^{-1/\omega}s^{s/\omega}\exp\{-a_0t^{-1/2}|x|^{1/2}\},s\in\mathbb{Z}_+,\tag{17}$$

сталі $c_3,\overline{B},a_0>0$ не залежать від t.

Наведемо ще деякі властивості функції G.

Лема 5. *Функція $G(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $S_2^{1/\omega}$, диференційовна по t.*

Доведення. Із властивості неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S випливає, що для доведення твердження досить встановити, що функція $F[G(t,\cdot)] = Q(t,\cdot)$, як абстрактна функція параметра t зі значеннями в просторі $S^2_{1/\omega}$, диференційовна по t. Іншими словами, потрібно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) := \frac{1}{\Delta t}[Q(t+\Delta t,\cdot) - Q(t,\cdot)] \to \frac{\partial}{\partial t}Q(t,\cdot),\ \ \Delta t\to 0,$$

виконується в тому розумінні, що:

1) $D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma) \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} D^s_\sigma(-\varphi(\sigma)Q(t,\sigma))$, $s\in\mathbb{Z}_+$, рівномірно на кожному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$;

2) $|D^s_\sigma\Phi_{\Delta t}(\sigma)| \le \bar c\bar B^s s^{2s}\exp\{-\bar a|\sigma|^\omega\}$, $s\in\mathbb{Z}_+$, де сталі $\bar c,\bar B,\bar a>0$ не залежать від Δt, якщо Δt досить мале.

Функція $Q(t,\sigma)$, $(t,\sigma)\in\Omega$, диференційовна по t у звичайному розумінні, тому внаслідок теореми Лагранжа про скінченні прирости

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) = -\varphi(\sigma)Q(t+\theta\Delta t,\sigma), 0<\theta<1.$$

Отже,

$$D^s_\sigma\Phi_{\Delta t}(\sigma) = -\sum_{l=0}^{s} C^l_s D^l_\sigma\varphi(\sigma) D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t,\sigma) \tag{18}$$

і

$$D^s_\sigma\Big(\Phi_{\Delta t}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big) = -\sum_{l=0}^{s} C^l_s D^l_\sigma\varphi(\sigma)[D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D^{s-l}_\sigma Q(t,\sigma)].$$

Оскільки

$$D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D^{s-l}_\sigma Q(t,\sigma) = D^{s-l+1}_\sigma Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t,\ \ 0<\theta_1<1,$$

то звідси та з оцінок (17) випливає, що

$$D^{s-l+1}_\sigma Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t \to 0, \Delta t\to 0,$$

рівномірно на довільному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Тоді і

$$D^s_\sigma\Phi_{\Delta t}(\sigma) \to D^s_\sigma\Big(\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big),\ \Delta t\to 0,$$

рівномірно на кожному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Отже, умова 1) виконується.

Врахувавши (18) та оцінки, які задовольняють функції $\varphi(\sigma)$, $Q(t,\sigma)$ та їхні похідні, знайдемо, що

$$|D^s_\sigma\Phi_{\Delta t}(\sigma)| \le c_0\tilde c\sum_{l=1}^{s} C^l_s B^l_0 l^l \tilde A^{s-l} t^{\nu(s-l)}(s-l)^{2(s-l)}\exp\{-(t+\theta\Delta t)|\sigma|^\omega\}+$$

$$+c_\varepsilon\tilde c\tilde A^s s^{2s} t^{\nu s}\exp\{-(t+\theta\Delta t)|\sigma|^\omega + \varepsilon|\sigma|^\omega\}$$

(тут $\varepsilon > 0$ – довільно фіксований параметр). Візьмемо $\varepsilon = t/2$. Тоді

$$|D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \le \overline{c}\,\overline{L}^s s^{2s} \exp\{-\overline{a}|\sigma|^\omega\},$$

де $\overline{c} = \max\{c_0\tilde{c}, c_\varepsilon\}$, $\overline{L} = \max\{\overline{B}, \overline{A}\}$, $\overline{B} = 2\max\{B_0, \tilde{A}\}$, $\overline{a} = t/2$, причому всі сталі не залежать від Δt.

Твердження доведено. □

Наслідок 2. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = f * \frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot), \quad \forall f \in (S_2^{1/\omega})', t > 0.$$

Доведення. Згідно з означенням згортки узагальненої функції з основною

$$f * G(t,\cdot) = \langle f_\xi, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle,\ \check{G}(t,\xi) = G(t,-\xi).$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{\Delta t}[(f * G(t+\Delta t,\cdot)) - (f * G(t,\cdot))] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\langle f_\xi, \frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)]\rangle.$$

Внаслідок леми 5 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)] \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\check{G}(t,\xi), \Delta t \to 0$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору $S_2^{1/\omega}$. Тому

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = \langle f_\xi, \lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)]\rangle =$$

$$= \langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle = \langle f_\xi, T_{-x}\frac{\partial}{\partial t}\check{G}(t,\xi)\rangle = f * G(t,\cdot).$$

Твердження доведено. □

Лема 6. *У просторі $(S_2^{1/\omega})'$ виконуються співвідношення:*

1) $G(t,\cdot) \to F^{-1}[Q_2], \quad t \to +0;$

2) $\mu G(t,\cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k G(t_k,\cdot) \to \delta, t \to +0$ (19)

(тут δ – дельта-функція Дірака).

Доведення. 1. Урахувавши властивість неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S', для доведення твердження досить встановити, що

$$F[G(t,\cdot)] = Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot) \to Q_2(\cdot), t \to +0,$$

у просторі $(S^2_{1/\omega})'$. Для цього візьмемо довільну функцію $\psi \in S^2_{1/\omega}$ і, скориставшись тим, що Q_2 – мультиплікатор у просторі $S^2_{1/\omega}$, а також теоремою Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, знайдемо, що

$$\langle Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot),\psi\rangle = \langle Q_1(t,\cdot),Q_2(\cdot)\psi\rangle =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)\psi(\sigma)d\sigma \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \int\limits_{\mathbb{R}} Q_2(\sigma)\psi(\sigma)d\sigma = \langle Q_2,\psi\rangle$$

(тут $Q(t,\cdot) = Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot)$ трактується як регулярний функціонал з простору $(S^2_{1/\omega})'$). Звідси вже випливає твердження 1 леми 6.

2. Урахувавши твердження 1, одержимо

$$\mu G(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m}\mu_k G(t_k,\cdot) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \mu F^{-1}[Q_2] - \sum_{k=1}^{m}\mu_k G(t_k,\cdot) =$$

$$= \mu F^{-1}[Q_2] - \sum_{k=1}^{m}\mu_k F^{-1}[Q_1(t_k,\cdot)Q_2(\cdot)] =$$

$$= F^{-1}\Big[\mu Q_2 - \sum_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\cdot)Q_2(\cdot)\Big] = F^{-1}\Big[\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\cdot)\Big)Q_2(\cdot)\Big] =$$

$$= F^{-1}\Big[\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\cdot)\Big)\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\cdot)\Big)^{-1}\Big] = F^{-1}[1] = \delta.$$

Отже, співвідношення (19) виконується в просторі $(S_2^{1/\omega})'$.

Твердження доведено. □

Зауваження 2. *Якщо* $\mu = 1$, $\mu_1 = \cdots = \mu_m = 0$, *то задача* (7), (8) – *задача Коші для рівняння* (7). *У цьому випадку* $Q_2(\sigma) = 1$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $G(t,\cdot) = F^{-1}[e^{-t\varphi(\sigma)}]$ *і* $G(t,\cdot) \to F^{-1}[1] = \delta$, $t \to +0$, *у просторі* $(S_1^{1/\omega})'$.

Наслідок 3. *Нехай*

$$\omega(t,x) = f * G(t,x), \quad f \in (S_{2,*}^{1/\omega})', (t,x) \in \Omega$$

(тут $(S_{2,*}^{1/\omega})'$ *– клас згортувачів у просторі* $S_2^{1/\omega}$*). Тоді у просторі* $(S_2^{1/\omega})'$ *виконується граничне співвідношення*

$$\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m}\mu_k\omega(t_k,\cdot) \to f, t \to +0.$$

Доведення. Для доведення твердження досить встановити, що граничне співвідношення

$$F\Big[\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m}\mu_k\omega(t_k,\cdot)\Big] \to F[f], t \to +0,$$

виконується у просторі $(S^2_{1/\omega})' = F[(S^{1/\omega}_2)']$. Згідно з умовою, узагальнена функція f – згортувач у просторі $S^{1/\omega}_2$, $G(t,\cdot) \in S^{1/\omega}_2$ (при кожному $t > 0$), тому

$$F[\omega(t,x)] = F[f * G(t,x)] = F[f] \cdot Q(t,\cdot).$$

Оскільки $Q(t,\cdot) \to Q_2(\cdot)$ при $t \to +0$ у просторі $(S^2_{1/\omega})'$ (див. доведення твердження 1 леми 6), а $F[f]$ – мультиплікатор у просторі $S^2_{1/\omega}$, то в просторі $(S^2_{1/\omega})'$ виконується граничне співвідношення

$$F[\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \omega(t_k,\cdot)] = F[f]\Big(\mu Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k Q(t_k,\cdot)\Big) \underset{t\to+0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{t\to+0}{\longrightarrow} F[f]\Big(\mu Q_2(\cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\cdot)Q_2(\cdot)\Big) = F[f]Q_2(\cdot)\Big(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\cdot)\Big) =$$

$$= F[f]\Big(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\cdot)\Big)^{-1}\Big(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\cdot)\Big) = F[f].$$

Твердження доведено. $\square$

Функція $\omega(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, є розв'язком рівняння (7). Справді, оскільки f – згортувач у просторі $S^{1/\omega}_2$, то

$$\hat{A}\omega(t,x) = F^{-1}[\varphi(\sigma)F[f * G(t,\cdot)]] = F^{-1}[\varphi(\sigma)F[f]Q(t,\cdot)] = -F^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\cdot)F[f]\Big] =$$

$$= -F^{-1}\Big[F\Big[\frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)\Big]F[f]\Big] = -F^{-1}\Big[F\Big[f * \frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)\Big]\Big] = -f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}.$$

З іншого боку (див. наслідок 2),

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(t,\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}.$$

Звідси випливає, що функція $\omega(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (7).

З наслідку 3 випливає, що для рівняння (7) m-точкову задачу можна ставити так: знайти розв'язок рівняння (7), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k u(t_k,\cdot) = f, \quad f \in (S^{1/\omega}_{2,*})', \tag{20}$$

де граничне співвідношення (20) розглядається у просторі $(S^{1/\omega}_2)'$ (обмеження на параметри μ, $\mu_1, \ldots, \mu_m$, $t_1, \ldots, t_m$ такі ж, як і у випадку задачі (7), (8)).

Із доведеного раніше випливає, що функція $u(t,x) = f * G(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, є розв'язком рівняння (7). Якщо $f = \delta \in (S^{1/\omega}_{2,*})'$, то $f * G(t,x) = G(t,x)$, тобто $G(t,x)$ також є розв'язком рівняння (7). Урахувавши цей факт, а також співвідношення (19). функцію $G(t,x)$ називатимемо фундаментальним розв'язком задачі (7), (20).

Теорема 1. *Задача* (7), (20) *коректно розв'язна, розв'язок дається формулою*

$$u(t,x) = f * G(t,x), (t,x) \in \Omega.$$

Доведення. Функція $f * G(t,x)$ задовольняє рівняння (7). Розв'язок неперервно залежить від f в умові (20) у тому розумінні, що якщо $\{f, f_n, n \geq 1\} \subset (S_{2,*}^{1/\omega})'$ і $f_n \to f$ при $n \to \infty$ у просторі $(S_2^{1/\omega})'$, то $u_n = f_n * G(t,x) \to u = f * G(t,x)$ при $n \to \infty$ у просторі $(S_2^{1/\omega})'$. Ця властивість випливає з властивості неперервності згортки.

Залишилося переконатися в тому, що задача (7), (20) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \hat{A}^* v, (t,x) \in [0, t_0) \times \mathbb{R}, 0 \leq t < t_0 < +\infty \tag{21}$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0} = \psi, \quad \psi \in (S_{2,*}^{1/\omega})', \tag{22}$$

де $\hat{A}^*$ – звуження спряженого оператора до оператора $\hat{A}$ на простір $S_2^{1/\omega} \subset (S_{2,*}^{1/\omega})'$. Умову (22) розуміємо в слабкому сенсі. Задача Коші (21), (22) є розв'язною при кожному $t \in [0, t_0)$.

Нехай $Q_{t_0}^t$: $(S_{2,*}^{1/\omega})' \to S_2^{1/\omega}$ – оператор, який зіставляє функціоналу $\psi \in (S_{2,*}^{1/\omega})'$ розв'язок задачі (21), (22). Оператор $Q_{t_0}^t$ є лінійним і неперервним, він визначений для довільних $0 \leq t < t_0 < +\infty$ і володіє властивостями:

$$\forall \psi \in (S_{2,*}^{1/\omega})': \ \ \frac{dQ_{t_0}^t \psi}{dt} = \hat{A}^* Q_{t_0}^t \psi, \quad \lim_{t \to t_0} Q_{t_0}^t \psi = \psi$$

(границя розглядається в просторі $(S_{2,*}^{1/\omega})'$).

Розв'язок $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, розумітимемо як регулярний функціонал з простору $(S_{2,*}^{1/\omega})' \supset S_2^{1/\omega}$. Доведемо, що задача (7), (20) може мати лише єдиний розв'язок у просторі $(S_{2,*}^{1/\omega})'$. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (7) при нульовій початковій умові може бути лише функціонал $u(t,x) = 0$ (при кожному $t \in (0,\infty)$). Застосуємо функціонал u до функції $Q_{t_0}^t \psi$, де ψ – довільний елемент з простору $S_2^{1/\omega} \subset (S_{2,*}^{1/\omega})'$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння (7), (21), отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi \rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q_{t_0}^t \psi \right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial Q_{t_0}^t \psi}{\partial t} \right\rangle = \langle -\hat{A}u, Q_{t_0}^t \psi \rangle + \langle u, \hat{A}^* Q_{t_0}^t \psi \rangle =$$

$$= \langle -\hat{A}u, Q_{t_0}^t \psi \rangle + \langle \hat{A}u, Q_{t_0}^t \psi \rangle = 0, t \in [0, t_0).$$

Звідси випливає, що $\langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi \rangle$ є сталою величиною. Із властивостей абстрактних функцій [2] випливає співвідношення

$$\lim_{t \to t_0} \langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi \rangle = \langle u(t_0,\cdot), \psi \rangle = c_0 = c_0(t_0)$$

у довільній точці $t_0 \in (0,\infty)$. Отже, якщо в (20) $f = 0$, то

$$\mu \lim_{t \to +0} \langle u(t,\cdot), \psi \rangle - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \langle u(t_k,\cdot), \psi \rangle = \mu c_0 - \sum_{k=1}^{m} \mu_k c_k = 0.$$

Звідси випливає, що $c_0 = c_1 = \cdots = c_m = 0$. Справді, нехай це не так. Наприклад, $c_0 \neq 0$. Тоді маємо співвідношення:

$$\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \beta_k = 0,$$

де $\beta_k = c_k/c_0$, тобто $\mu = \sum_{k=1}^{m} \mu_k \beta_k$. Оскільки, за умовою $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$, де $\mu_1, \dots, \mu_m$ – фіксовані, то одержане протиріччя доводить, що $c_0 = 0$. Аналогічно переконуємося в тому, що $c_1 = \dots = c_m = 0$. Таким чином, $\langle u(t_0, \cdot), \psi \rangle = 0$ для довільного $\psi \in S_2^{1/\omega}$, тобто $u(t_0, \cdot)$ – нульовий функціонал з простору $(S_{2,*}^{1/\omega})'$. Оскільки $t_0 \in (0, \infty)$ і t_0 вибране довільним чином, то $u(t, x) = 0$ для всіх $t \in (0, \infty)$. Теорему 1 доведено. □

Теорема 2. *Нехай $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, – розв'язок задачі* (7), (20). *Тоді $u(t, x) \to 0$ при $t \to +\infty$ у просторі $(S_2^{1/\omega})'$* .

Доведення. Розв'язок задачі (7), (20) дається формулою

$$u(t, x) = f * G(t, x) = \langle f_\xi, G(t, x - \xi) \rangle, f \in (S_{2,*}^{1/\omega})', (t, x) \in \Omega.$$

Доведемо, що $\langle u(t, \cdot), \psi \rangle \to 0$ при $t \to +\infty$ для довільної функції $\psi \in S_2^{1/\omega}$ (це і означатиме, що $u(t, \cdot) \to 0$ при $t \to +\infty$ у просторі $(S_2^{1/\omega})'$). Введемо позначення

$$\Psi_t(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, x - \xi)\psi(x)dx, \quad \Psi_{t,R}(\xi) := \int_{-R}^{R} G(t, x - \xi)\psi(x)dx, \quad R > 0,$$

і доведемо, що: а) при кожному $t > 1$ і $R > 0$ функція $\Psi_{t,R}(\xi)$ є елементом простору $S_2^{1/\omega}$. $\Psi_{t,R}(\xi) \to \Psi_t(\xi)$ при $R \to +\infty$ у просторі $S_2^{1/\omega}$; б) $\Psi_t(\xi) \in S_2^{1/\omega}$ при кожному $t > 1$. Звідси дістаємо, що

$$\langle u(t, \cdot), \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f_\xi, G(t, x - \xi) \rangle \psi(x)dx = \langle f_\xi, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, x)\psi(x + \xi)dx \rangle =$$

$$= \langle f_\xi, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, -y)\psi(-(y - \xi))dy \rangle = \langle f_\xi, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, -y)\check{\psi}(y - \xi)dy \rangle, \check{\psi}(z) = \psi(-z),$$

(тут $u(t, \cdot)$ трактується як регулярна узагальнена функція з простору $(S_2^{1/\omega})'$ при кожному $t > 0$).

Отже, встановимо властивість а). При фіксованих $\{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+$ маємо:

$$|\xi^k D_\xi^m \Psi_{t,R}(\xi)| \le \int_{-R}^{R} |\xi^k \psi(x) D_\xi^m G(t, x - \xi)|dx \le \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi^k \psi(\xi + \eta) D_\eta^m G(t, \eta)|d\eta.$$

Оскільки $\psi \in S_2^{1/\omega}$, то при деяких $c, L, B > 0$

$$|\xi^k D_\xi^m \psi(\xi)| \le cL^k B^m k^{2k} m^{m/\omega}, \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Звідси, при кожному $\eta \in \mathbb{R}$:

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\xi^k \psi(\xi + \eta)| - \sup_{y \in \mathbb{R}} |(y - \eta)^k \psi(y)| = \sup_{y \in \mathbb{R}} \Big| \sum_{l=0}^{k} C_k^l y^l (-\eta)^{k-l} \psi(y) \Big| \le$$

$$\leq \sum_{l=0}^{k} C_k^l |\eta|^{k-l} \sup_{y\in\mathbb{R}} |y^l \psi(y)| \leq c \sum_{l=0}^{k} C_k^l L^l l^{2l} |\eta|^{k-l}.$$

Далі скористаємося оцінками (17). Тоді

$$|\xi^k D_\xi^m \Psi_{t,R}(\xi)| \leq c \sum_{l=0}^{k} C_k^l L^l l^{2l} \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} |D_\eta^m G(t,\eta)| d\eta \leq$$

$$\leq cc_3 \overline{B}^m t^{-1} m^{m/\omega} \sum_{l=0}^{k} C_k^l l^{2l} L^l \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} \exp\{-a_0 t^{-1/2} |\eta|^{1/2}\} d\eta.$$

За допомогою безпосередніх обчислень знаходимо, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} \exp\{-a_0 t^{-1/2} |\eta|^{1/2}\} d\eta \leq c_4 \tilde{L}^{k-l} (k-l)^{2(k-l)} t^{k-l+1}, c_4, \tilde{L} > 0.$$

Таким чином,

$$|\xi^k D_\xi^m \Psi_{t,R}(\xi)| \leq cc_3 c_4 \overline{B}^m m^{m/\omega} \sum_{l=0}^{k} C_k^l L^l \tilde{L}^{k-l} t^{k-l} l^{2l} (k-l)^{2(k-l)} \leq$$

$$\leq \overline{c} \overline{B}^m \overline{L}^k k^{2k} m^{m/\omega}, \tag{23}$$

де $\overline{c} = cc_3c_4$, $\overline{L} = 2\max\{L, \tilde{L}t\}$. Отже, $\Psi_{t,R}(\xi) \in S_2^{1/\omega}$ при кожному $t > 1$ і довільному $R > 0$. Далі безпосередньо переконуємося в тому, що $\Psi_{t,R}(\xi) \to \Psi_t(\xi)$ при $R \to +\infty$ рівномірно по ξ разом з усіма своїми похідними на кожному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Крім того, сукупність функцій $\{\xi^k D_\xi^m \Psi_{t,R}(\xi)\}$, $\{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+$, рівномірно обмежена (відносно R) у просторі $S_2^{1/\omega}$ (ця властивість випливає з оцінок (21), у яких сталі $\overline{c}, \overline{B}, \overline{L} > 0$ не залежать від R). Це і означає виконання умови а).

З умови а) випливає умова б), оскільки в досконалому просторі кожна обмежена множина є компактною.

Використовуючи властивості а), б), отримаємо співвідношення

$$\langle u(t,\cdot), \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)(f * \check{\psi})(y) dy.$$

Оскільки f – згортувач у просторі $S_2^{1/\omega}$, то $f * \check{\psi} \in S_2^{1/\omega}$. Тоді, врахувавши оцінки (17) (при $s = 0$), одержимо

$$|\langle u(t,\cdot), \psi \rangle| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,-y)|\, |(f*\check{\psi})(y)| dy \leq ct^{-1/\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} |(f*\check{\psi})(y)| dy \leq c_0 t^{-1/\omega} \to 0, t \to +\infty,$$

для довільної функції $\psi \in S_2^{1/\omega}$, тобто $u(t,\cdot) \to 0$ при $t \to +\infty$ у просторі $(S_2^{1/\omega})'$. Теорему 2 доведено. $\square$

Якщо узагальнена функція f в умові (20) є фінітною (тобто носій f ($\mathrm{supp} f$) – обмежена множина в $\mathbb{R}$), то можна говорити про рівномірне прямування до нуля на $\mathbb{R}$ при $t \to +\infty$ розв'язку $u(t,x)$ задачі (7), (20). Зауважимо, що кожна фінітна узагальнена функція є згортувачем у просторах типу S. Ця властивість випливає із загального результату, який стосується теорії досконалих просторів (див. [2, с. 173]): якщо Φ – досконалий простір із диференційовною операцією зсуву, то кожний фінітний функціонал є згортувачем у просторі Φ. Фінітні функціонали утворюють досить широкий клас. Зокрема, кожна обмежена замкнена множина є носієм деякої фінітної узагальненої функції [5].

Теорема 3. *Нехай $u(t,x)$ – розв'язок задачі (7), (20) з узагальненою функцією f, яка є елементом простору $(S^{1/\omega}_{2,*})'$, де $\omega \in (0,1)$. Тоді $u(t,x) \to 0$ при $t \to +\infty$ рівномірно на $\mathbb{R}$.*

Наведемо схему доведення сформульованого твердження. Нехай $supp\ f \subset [a_1,b_1] \subset [a_2,b_2] \subset \mathbb{R}$. Розглянемо функцію $\psi \in S^{1/\omega}_2$ таку, що $\psi(x) = 1$, $x \in [a_1,b_1]$, $supp\ \psi \subset [a_2,b_2]$. Така функція існує, оскільки простір $S^{1/\omega}_2$ при $1/\omega > 1$ містить фінітні функції [2]. Подамо функцію $u(t,x)$ у вигляді

$$u(t,x) = \langle f_\xi, \psi(\xi)G(t,x-\xi)\rangle + \langle f_\xi, \gamma(\xi)G(t,x-\xi)\rangle,$$

де $\gamma = 1 - \psi$. Оскільки

$$\mathrm{supp}\,(\gamma(\xi)G(t,x-\xi)) \cap \mathrm{supp} f = \varnothing,$$

то

$$u(t,x) = t^{-1/\omega}\langle f_\xi, t^{1/\omega}\psi(\xi)G(t,x-\xi)\rangle.$$

Для доведення твердження досить переконатися в тому, що сукупність функцій $\Phi_{t,x}(\xi) = t^{1/\omega}\psi(\xi)G(t,x-\xi)$ обмежена в просторі $S^{1/\omega}_2$ при великих значеннях $t, x \in \mathbb{R}$ і $\xi \in \mathbb{R} \setminus [a_1,b_1]$ (ця властивість випливає з оцінок (17)).

Приклад. Розглянемо функцію

$$\varphi_{\omega,p}(\sigma) = \Big(\sum_{k=0}^{p} \sigma^{2k}\Big)^{\omega/(2p)}, \sigma \in \mathbb{R},$$

де $\omega \in (0,1]$, $p \in \mathbb{N}$ – довільно фіксовані числа. Очевидно, що $\varphi_{\omega,p} \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(\sigma) > |\sigma|^\omega$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Якщо $|\sigma| \leq 1$, то

$$\varphi_{\omega,p}(\sigma) \leq (p+1)^{\omega/(2p)} \leq (p+1) \leq (p+1)e^{\varepsilon|\sigma|^\omega}$$

для довільно фіксованого $\varepsilon > 0$. Якщо $|\sigma| > 1$, то

$$\varphi_{\omega,p}(\sigma) \leq (p+1)|\sigma|^\omega \leq \frac{1}{\varepsilon}(p+1)e^{\varepsilon|\sigma|^\omega}.$$

Отже,

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall \sigma \in \mathbb{R}: \ \ \varphi_{\omega,p}(\sigma) \leq c_\varepsilon e^{\varepsilon|\sigma|^\omega},$$

де $c_\varepsilon = (p+1)\max\{1, 1/\varepsilon\}$. Крім того, безпосередньо переконуємося в тому, що похідні функції $\varphi_{\omega,p}$ задовольняють умову

$$\exists c_0, B_0 > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall \sigma \in \mathbb{R}: \ \ |\varphi_{\omega,p}^{(n)}(\sigma)| \leq c_0 B_0^n n!$$

(сталі c_0, B_0 залежать від p, ω). Отже, $\varphi_{\omega,p} \in P_\omega$ (при довільно фіксованому $p \in \mathbb{N}$).

Скориставшись спектральною теоремою для самоспряжених операторів та операційним численням для таких операторів одержимо

$$\varphi_{\omega,p}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big) = \Big(I + \sum_{k=1}^{p}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{2k}\Big)^{\omega/(2p)} = \Big(I + \sum_{k=1}^{p}(-1)^k\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}\Big)^{\omega/(2p)}$$

(тут I – одиничний оператор). Наприклад,

$$\varphi_{1,1}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big) = \Big(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)^{1/2}.$$

Цей оператор часто використовується в теорії дробового інтегро-диференціювання і називається оператором Бесселя дробового диференціювання порядку $1/2$ (див. [18]). Інші приклади:

$$\varphi_{4/7,2}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big) = \Big(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}\Big)^{1/7},$$
$$\varphi_{5/6,3}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big) = \Big(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^6}{\partial x^6}\Big)^{5/36},$$

оператори $\varphi_{\omega,p}\Big(i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$ природно називати операторами дробового диференціювання. Згідно з теоремою 1, нелокальна m-точкова за часом задача для рівняння (7), наприклад, з оператором $\varphi_{5/6,3}\Big(i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$ коректно розв'язна, якщо початкова функція f в умові (20) є елементом простору $(S_{2,*}^{5/6})'$.

Наведемо ще приклад узагальненої функції з простору $(S_{2,*}^{1/\omega})'$. Нехай

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{|x|^{-\alpha}\}, & x \in [-1,1]\setminus\{0\}, \alpha > 0, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Відомо [19], що f_α допускає регуляризацію у просторі $(S_2^\beta)'$, де $1 < \beta < 1 + 1/\alpha$, тобто f_α є регулярною узагальненою функцією з простору $(S_2^\beta)'$. Якщо вважати, що $\omega \in (0,1)$ і покласти $\beta = 1/\omega > 1$, то

$$\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\omega} - 1 = \frac{1-\omega}{\omega}, \alpha < \frac{\omega}{1-\omega}.$$

Отже, якщо $\alpha < \dfrac{\omega}{1-\omega}$, то $f_\alpha \in (S_2^{1/\omega})'$. Для прикладу візьмемо $\alpha = \dfrac{\omega}{2(1-\omega)}$ і покладемо $\omega = 1/2$; тоді $\alpha = 1/2$. Отже, функція

$$f_{\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} \exp\{|x|^{-1/2}\}, & x \in [-1,1]\setminus\{0\}, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

породжує регулярний функціонал з простору $(S_2^2)'$. Оскільки носій $(\mathrm{supp})f_{1/2}$ – відрізок $[-1,1]$, то $f_{1/2}$ – фінітна узагальнена функція, а, отже, $f_{1/2}$ – згортувач у просторі S_2^2. Згідно з теоремами 1, 3, задача (7), (20) з оператором $\varphi_{1/2,p}\Big(i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$ і початковою функцією $f_{1/2} \in (S_{2,*}^2)'$ – коректно розв'язна, при цьому $u(t,x) \to 0$ при $t \to +\infty$ рівномірно на $\mathbb{R}$.

Висновки. Формального розширення класу рівнянь з частинними похідними параболічного типу можна домогтися, залучивши еволюційні рівняння з операторами $\varphi\Big(i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$, побудованими за повними функціями. Звуження таких операторів на певні простори типу S (простори S_α^β) збігаються із псевдодиференціальними операторами у таких просторах, побудованих за функціями φ, які є мультиплікаторами у просторах S_β^α. Такий підхід дозволяє ефективно використати метод перетворення Фур'є для дослідження багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з операторами дробового диференціювання і початковою функцією, яка може мати в одній точці особливість навіть "експоненціального" порядку.

Список літератури

[**1**] *Khrehivskiy V.V., Matiychuk M.I.* Fundamental solutions and Cauchy problem for linear parabolic systems for equqtions with Bessel operator // Dokl. AN SSSR. – 1968. - V.181, No 6. – P. 1320–1323. (in Ukrainian)

[**2**] *Gelfand I.M., Shylov G.E.* The space of the spaces of main and generalized functions. – M.: Fizmatgiz, 1958. – 307 p. (in Russian)

[**3**] *Gorbachuk V.I., Gorbachuk M.L.* The boundary problems for differential-operator equations. – K.: Nauk. dumka, 1984. – 284 p. (in Ukrainian)

[**4**] *Gorbachuk M.L., Dudnikov P.I.* On initial data of Cauchy problem for parabolic equations when the solutions are infinity differentiable // Dokl. AN USST. Ser. A, 1981. – No 4. – p. 9–11. (in Russian)

[**5**] *Gorodetskyy V.V.* The boundary properties of parabolic equation solutions smooth in layer. – Chernivtsi: Ruta, 1998. – 225 p. (in Ukrainian)

[**6**] *Gorodetskyy V.V.* The initial values sets of smooth solutions for differential-operator parabolic equations. – Chernivtsi: Ruta, 1998. – 219 p. (in Ukrainian)

[**7**] *Zhytomirskiy Ya.I.* Cauchy problem for systems of linear partial differential equations with a Bessel differential operato // Mat. sbornik. – 1955. – V. 36, No 2. – P. 299–310. (in Russian)

[**8**] *Gorodetskyy V.V., Martynuk O.V.* Parabolic pseudodifferential equations with analytic symbols in S type spaces. - Chernivtsi: Tehnodruk, 2019. - 280 p. (in Ukrainian)

[**9**] *Nahushev A.M.* Mathematical biology equations. – M.: Vysshaya shkola, 1995. – 301 p. (in Russian)

[**10**] *Dezin A.A.* General questions of the theory of boundary value problems. – M.: Nauka, 1980. – 208 p. (in Russian)

[**11**] *Belavin I.A., Kapitsa S.P., Kurdyumov S.P.* // Zhurn vychysl. matematiki i matematicheskoy fiziki. – 1998. – V. 38, No 6. – P. 885–902. (in Russian)

[**12**] *Makarov A.A.* Existence of a correct two-point boundary value problem for systems of pseudodifferential equations // Differents. uravneniya. – 1994. – V. 30, No 1. – P. 144–150. (in Russian)

[**13**] *Chesalin V.I.* A problem with nonlocal boundary conditions for some abstract hyperbolic equations // Differents. uravneniya. – 1979. – V. 15, No 11. – C. 2104–2106. (in Russian)

[**14**] *Gorodetskyy V.V., Drin' Ya.M.* Multipoint by time problem for one class of evolition pseudodifferential equations // Ukr. mat. zhurn. – 2014. – V. 66, No 5. – P. 619–633. (in Russian)

[**15**] *Gorodetskyy V.V., Martynyuk O.V.* Cauchy problem and non-local problems for singular evolution equations of parabolic type. – Chernivtsi: Knygy XXI. – 2010. – 320 p. (in Ukrainian)

[**16**] *Verezhak G.P., Gorodetskyy V.V.* Stabilization of solutions of a non-local multipoint by time problem for one class of evolution pseudo-differential equations // Neliniyni kolyvannya. – 2017. – V. 20, No 3. – P. 303–327. (in Ukrainian)

[**17**] *Gorodetskyy V.V., Nagnibida N.I., Nastasiev P.P.* The solving functional analysys problems methods. – Kiev, Vysshaya shkola, 1990. – 479 p. (in Russian)

[**18**] *Samko G.S., Kilbas A.A., Marichev O.I.* Fractional integrals and derivatives and some of their applications . – Minsk: Nauka i tehnika, 1987. – 688 p. (in Russian)

[**19**] *Gorodetskyy V.V., Drin' Ya.M., Nagnibida M.I.* Generalized functions. Methods of problem solving. – Chernivtsi: Knygy – XXI, 2011. – 504 p. (in Ukrainian)

Надійшло 02.12.2022

Horodets'kyi V.V., Shevchuk N.M., Kolisnyk R.S. *Multipoint by time problem for a class of evolution equations in S type space*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 90–110.

The goal of this paper is to study evolution equations of the parabolic type with operators $\varphi\Big(i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$ built according to certain functions (different from polynomials), in particular, with operators of fractional differentiation. It is found that the restriction of such operators to certain S-type spaces match with pseudo-differential operators in such spaces constructed by these functions, which are multipliers in spaces that are Fourier transforms of S-type spaces. The well-posedness of the nonlocal multipoint by time problem is proved for such equations with initial functions that are elements of spaces of generalized functions of S-type. The properties of the fundamental solutions of the specified problem, the behavior of the solution at $t \to +\infty$ in spaces of S'-type (weak stabilization) were studied. We found conditions under which the solution stabilizes to zero uniformly on $\mathbb{R}$.