Карлова О.О.[1,3], Катиринчук К.М.[1], Проценко В.I.[2]

Періодичність рекурентних послідовностей другого і третього порядку

Одержано необхідні і достатні умови на коефіцієнти u_i для періодичності рекурентних послідовностей, що задаються співвідношенням $a_{n+k} = u_{k-1}a_{n+k-1} + \cdots + u_0a_0$ при $n = 0, 1, \ldots$ та $u_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, k-1$, у випадку $k = 2, 3$.

Ключові слова і фрази: рекурентна послідовність k-го порядку, періодична послідовність, послідовність Фібоначчі.

---

[1] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна;
[2] Український Католицький Університет, Україна;
[3] Університет Яна Кохановського в Кельцах, Польща
e-mail: *o.karlova@chnu.edu.ua*

1 Мотивація та історичні ремарки

Серед усіх числових послідовностей числа Фібоначчі та Люка, безперечно, займають одне з визначних місць. Незважаючи на істотну кількість книжок та статей, присвячених послідовностям Фібоначчі та Люка, інтерес до них не згасає й досі, про що свідчить, наприклад, активно діючий журнал "The Fibonacci Quarterly" [7], зокрема, наявність відкритих проблем з цієї тематики майже в кожному номері журналу. Крім того, кожних два роки проводиться міжнародна конференція під егідою Fibonacci Association [8]. Дуже ґрунтовний огляд разом з проблемами та задачами можна знайти в книзі Томаса Коши [4]; рекомендуємо також статтю Дена Калмана і Роберта Мени [3] і літературу, згадану в цій статті.

Мотивацією цього дослідження стало таке спостереження. Якщо замість класичної послідовності Фібоначчі, яка задається рекурентною формулою

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n = 0, 1, 2, \ldots$$

та при початкових значеннях $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ має вигляд

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

УДК 515.12
2010 *Mathematics Subject Classification:* 11B37, 11B39.

розглянути послідовність

$$G_{n+2} = G_{n+1} - G_n, n = 0, 1, 2, \dots,$$

то при $G_0 = 0$, $G_1 = 1$ послідовність $(G_n)_{n=0}^{\infty}$ матиме вигляд

$$0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, \dots.$$

Іншими словами, вона є періодичною з періодом 6.

Таким чином, природно виникають питання

- Які умови повинні задовольняти коефіцієнти рекурентної послідовності для її періодичності?
- Якою може бути довжина періода та як вона залежить від коефіцієнтів послідовності?
- Чи залежить періодичність або довжина періода від початкових значень послідовності?

Нескладно можна показати, що послідовність Фібоначчі за модулем довільного натурального числа $m \geq 2$ періодична, адже серед перших (m^2+1)-ї пар чисел Фібоначчі знайдуться дві рівні пари $(F_i, F_{i+1}) \equiv (F_j, F_{j+1}) \mod m$ для деяких $i \leq j$. Найменше натуральне число $\pi(m)$, яке є довжиною періода послідовності Фібоначчі за модулем m, називається *періодом Пізано.* Це поняття добре вивчене як для класичної послідовності Фібоначчі, так і для різних її узагальнень (див. [9] та цитовану там літературу).

У цій статті ми вивчаємо періодичність послідовностей типу Фібоначчі у звичайному розумінні, тобто, за модулем 1. Наскільки нам відомо, це питання не вивчалося раніше. Ми даємо відповіді на наведені вище запитання для рекурентних послідовностей другого та третього порядків.

Спочатку в другому пункті ми наводимо необхідні та достатні умови періодичності для загальної рекурентної послідовності k-го порядку.

В третьому пункті ми розглядаємо послідовності 2-го порядку, тобто, послідовності, які задаються рекурентно співвідношенням $a_{n+2} = u_1 a_{n+1} + u_0 a_0$ з дійсними коефіцієнтами $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ та дійсними початковими значеннями $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Наведемо тут деякі цікаві послідовності, що описуються цим співвідношенням. Покладемо $a_0 = 0$ і $a_1 = 1$. Тоді

- при $u_0 = u_1 = 1$ ми отримаємо класичну послідовність Фібоначчі $(F_n)_{n=0}^{\infty}$;
- при $u_0 = 1, u_1 = -1$ ми отримаємо описану вище послідовність $(G_n)_{n=0}^{\infty}$, періодичну з періодом 6;
- при $u_0 = 3$, $u_1 = -1$ одержимо послідовність

  $$0, 1, 3, 8, 21, 55, \dots,$$

  в якій впізнаємо послідовність $(F_{2n})_{n=0}^{\infty}$ чисел Фібоначчі з парними індексами,

- при $u_0 = 3$, $u_1 = -2$ ми отримаємо послідовність
$$0, 1, 3, 7, 15, 31, \dots,$$
тобто, послідовність чисел Мерсенна вигляду $M_n = 2^n - 1$,

- при $u_0 = 2$, $u_1 = -1$ отримується послідовність усіх цілих невід'ємних чисел
$$0, 1, 2, 3, 4, \dots,$$

- при $u_0 = 11$, $u_1 = -10$ маємо послідовність вигляду
$$0, 1, 11, 111, 1111, 11111, \dots.$$

Також у третьому пункті статті ми застосовуємо загальні властивості, знайдені в другому пункті, до дослідження періодичності послідовностей другого порядку. Ми з'ясовуємо, зокрема, що коефіцієнт u_1 у випадку періодичної послідовності майже ніколи не може бути раціональним числом, що встановлено в підпункті 3.4. Тут слід зазначити, що Твердження 3 не є новим і відоме, як "Теорема Нівена" (див. [6, Corollary 3.12]). Проте оригінальне доведення теореми Нівена використовує техніку вищої алгебри, тоді як ми наводимо цілком елементарне її доведення.

У четвертому пункті ми вивчаємо рекурентні послідовності третього порядку, тобто, послідовності, що визначаться співвідношенням $a_{n+3} = u_2 a_{n+2} + u_1 a_{n+1} + u_0 a_n$, і знаходимо необхідні та достатні умови на коефіцієнти u_0, u_1 та u_2 для того, щоб послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ була періодичною.

2 Необхіді та достатні умови періодичності рекурентних послідовностей

Позначимо $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Означення 1. Послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ дійсних чисел є *рекурентною порядку* $k \in \mathbb{N}$, якщо для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ виконується співвідношення
$$a_{n+k} = u_{k-1} a_{n+k-1} + u_{k-2} a_{n+k-2} + \dots u_1 a_{n+1} + u_0 a_n \tag{1}$$
для деякого набору $u = (u_0, \dots, u_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$, де $u_0 \neq 0$.

Розглянемо матрицю U розмірності $k \times k$, вектор x_n
$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ u_0 & u_1 & u_2 & \dots & u_{k-2} & u_{k-1} \end{pmatrix}, \ x_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \dots \\ a_{n+k-1} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$Ux_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \dots \\ u_0 a_n + u_1 a_{n+1} + \dots + u_{k-1} a_{n+k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \dots \\ a_{n+k} \end{pmatrix} = x_{n+1}.$$

Таким чином, має місце співвідношення

$$x_{n+1} = Ux_n$$

для кожного $n \in \mathbb{N}_0$, причому вектор x_0 складається з k початкових значень послідовності $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

Означення 2. Числова послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ є *періодичною*, якщо існують такі числа $N \in \mathbb{N}$ та $n_0 \in \mathbb{N}_0$, що

$$a_{n+N} = a_n \ \forall n \geq n_0.$$

Найменше з таких чисел N називається *періодом* послідовності $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

Твердження 1. *Рекурентна послідовність k-го порядку $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ є періодичною з періодом $N \in \mathbb{N}$ тоді і тільки тоді, коли*

$$x_N = x_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{2}$$

Доведення. Необхідність очевидна. Доведемо *достатність.* Без обмеження загальності вважатимемо, що $n_0 \in \mathbb{N}_0$ – найменше серед натуральних чисел m, таких, що $a_{n+N} = a_n$ для всіх $n \geq m$. Тоді $n_0 < N$. Оскільки з (1) випливає, що

$$u_0 a_{n_0+N-1} = a_{n_0+N+k-1} - u_{n_0+N+k-2} a_{n_0+N+k-2} - \dots - u_1 a_{n_0+N},$$

то згідно з припущенням

$$u_0 a_{n_0+N-1} = a_{n_0+k-1} - u_{n_0+k-2} a_{n_0+k-2} - \dots - u_1 a_{n_0} = u_0 a_{n_0-1}.$$

Таким чином, $a_{n_0+N-1} = a_{n_0-1}$, адже $u_0 \neq 0$. Аналогічно, $a_{n_0+N-2} = a_{n_0-2}$. Продовжуючи ці міркування та взявши до уваги нерівність $n_0 < N$, ми одержимо, що $a_n = a_{n+N}$ для всіх $n \geq 0$. □

Рівняння

$$x^k = u_{k-1} x^{k-1} + u_{k-2} x^{k-2} + \dots + u_1 x + u_0 \tag{3}$$

називається *характеристичним рівнянням* рекурентного співвідношення (1) [2, с. 22]. Якщо характеристичне рівняння (3) має k попарно різних коренів $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq k$, то загальний член послідовності $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ має вигляд

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} A_i \lambda_i^n \tag{4}$$

для деяких чисел $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{C}$ [2, с. 25].

Для $n \in \mathbb{N}_0$ розглянемо матрицю Λ_n та вектор A

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n & \dots & \lambda_k^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} & \dots & \lambda_k^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n+k-1} & \lambda_2^{n+k-1} & \dots & \lambda_k^{n+k-1} \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_k \end{pmatrix}$$

Зауважимо, що вектор A знаходиться з рівняння

$$\Lambda_0 \cdot A = x_0, \tag{5}$$

де x_0 – набір k заданих початкових значень послідовності $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Крім того, врахувавши (4), маємо співвідношення

$$x_n = \Lambda_n \cdot A \tag{6}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}_0$.

Зауваження 1. *Очевидно, що при $A = 0$ ми отримуємо тривіальну періодичну послідовність $(0, 0, 0, \dots)$. Тому надалі вважатимемо, що $A \neq 0$.*

Для $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$I_n = \{1 \le i \le k : \lambda_i^n = 1\},$$

де $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – попарно різні корені рівняння (3).

Теорема 1. *Рекурентна послідовність k-го порядку $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ є періодичною з періодом $N \in \mathbb{N}$ тоді і тільки тоді, коли*

(i) $I_N \neq \varnothing$,

(ii) $A_i = 0$ *для всіх* $i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_N$.

Доведення. Покажемо, що властивості (i) та (ii) в сукупності рівносильні умові (2) Твердження 1.

Згідно з (6) маємо

$$x_N = x_0 \ \Leftrightarrow \ \Lambda_N A = \Lambda_0 A,$$

звідки

$$x_N = x_0 \ \Leftrightarrow \ (\Lambda_N - \Lambda_0)A = 0.$$

Рівняння $(\Lambda_N - \Lambda_0)A = 0$ має ненульовий розв'язок $A \neq 0$ тоді і тільки тоді, коли

$$\det(\Lambda_N - \Lambda_0) = 0.$$

Оскільки

$$\Lambda_N - \Lambda_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^N - 1 & \lambda_2^N - 1 & \dots & \lambda_k^N - 1 \\ \lambda_1(\lambda_1^N - 1) & \lambda_2(\lambda_2^N - 1) & \dots & \lambda_k(\lambda_k^N - 1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{k-1}(\lambda_1^N - 1) & \lambda_2^{k-1}(\lambda_2^N - 1) & \dots & \lambda_k^{k-1}(\lambda_k^N - 1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^N - 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^N - 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k^N - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \Lambda_0 \begin{pmatrix} \lambda_1^N - 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^N - 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k^N - 1 \end{pmatrix},$$

то

$$\det(\Lambda_N - \Lambda_0) = \det \Lambda_0 \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda_1^N - 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^N - 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k^N - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \prod_{1 \le i < j \le k} (\lambda_j - \lambda_i) \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i^N - 1).$$

Нагадаємо, що всі значення λ_i попарно різні, тому

$$\det(\Lambda_N - \Lambda_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i^N - 1) = 0.$$

Рівність з правого боку рівносильна властивості (i).

Крім того,

$$(\Lambda_N - \Lambda_0)A = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} \lambda_1^N - 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^N - 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k^N - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_k \end{pmatrix} = 0.$$

Звідси маємо, що

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_i^N = 1, \\ A_i = 0 \end{array} \right.$$

для кожного $i \in \{1, \dots, k\}$. Остання умова рівносильна властивості (ii). □

Зауваження 2. *Теорема 1 дає необхідні та достатні умови періодичності тільки для випадку, коли числа λ_i попарно різні. У випадках, коли характеристичне рівняння має кратні корені, ми будемо досліджувати періодичність послідовності іншими способами.*

3 Рекурентні послідовності другого порядку

В цьому пункті ми з'ясуємо, за яких умов на коефіцієнти $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ рекурентна послідовність другого порядку з початковими значеннями $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, що задається співвідношенням

$$a_{n+2} = u_1 a_{n+1} + u_0 a_n \tag{7}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}_0$, є періодичною.

Матриця U та вектори x_n для другого порядку мають вигляд

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u_0 & u_1 \end{pmatrix}, \ x_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

3.1 Короткі періоди $N = 1$ і $N = 2$

Якщо шукати серед послідовностей вигляду (7) періодичні з періодом $N = 1$, тобто, сталі послідовності $a_n = a$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то вони повинні задовольняти рівність $a = u_1 a + u_0 a$. Звідси $a = 0$ або $u_1 + u_0 = 1$. Отже, стала послідовність забезпечується умовами

$$u_1 + u_0 = 1 \quad \text{і} \quad a_1 = a_0.$$

Наприклад, нехай $a_1 = a_0 = 7$, $u_0 = 3$ і $u_1 = -2$. Тоді отримуємо періодичну послідовність $a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}$ з періодом $N = 1$ вигляду $7, 7, 7, \ldots$.

Шукатимемо тепер періодичні послідовності з періодом $N = 2$. Для таких послідовностей маємо

$$\begin{cases} a_0 = u_1 a_1 + u_0 a_0 \\ a_1 = u_1 a_0 + u_0 a_1, \end{cases}$$

звідки після додавання рівнянь одержимо $(a_0 + a_1)(1 - u_0 - u_1) = 0$.

Якщо $a_1 = -a_0$, то з першого рівняння маємо $u_0 - u_1 = 1$. Отже, при виконанні умов

$$u_0 - u_1 = 1 \quad \text{і} \quad a_1 = -a_0$$

ми отримуємо періодичну послідовність з періодом $N = 2$. Наприклад, при $u_0 = 4$, $u_1 = 3$ маємо послідовність $a_{n+2} = 4a_{n+1} + 3a_n$, та почавши із значень $a_0 = 2$, $a_1 = -2$, ми отримаємо послідовність $2, -2, 2, -2, \ldots$.

Якщо ж $a_1 \neq -a_0$, то, як і у випадку з періодом $N = 1$ ми одержуємо умову $u_0 + u_1 = 1$. Підставивши у систему, маємо $(a_0 - a_1)(1 - u_0) = 0$. Випадок $a_0 = a_1$ відкидаємо, адже в такому разі послідовність має період $N = 1$. Отже,

$$u_0 = 1, u_1 = 0, a_0 \in \mathbb{R}$$

і послідовність має вигляд $a_{n+2} = a_n$ та є періодичною з періодом $N = 2$.

3.2 Періоди довільної довжини

Розглянемо характеристичне рівняння

$$x^2 - u_1 x - u_0 = 0 \tag{8}$$

та дослідимо періодичність рекурентної послідовності другого порядку в залежності від кількості розв'язків цього рівняння.

3.2.1 Характеристичне рівняння має два різні розв'язки

Вважатимемо, що

$$u_1^2 + 4u_0 \neq 0.$$

Нехай $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ – розв'язки рівняння (8), причому $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді послідовність $(a_n)_{n=0}$ має вигляд

$$a_n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n$$

для деяких дійсних $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$. З початкових умов маємо

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = a_0, \\ A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = a_1, \end{cases}$$

звідки

$$A_1 = \frac{a_0\lambda_2 - a_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad A_2 = \frac{a_1 - a_0\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \tag{9}$$

а загальний член послідовності $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ має вигляд

$$a_n = a_1 \cdot \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1} - a_0 \cdot \frac{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1})}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

при $n = 0, 1, \ldots$. Крім того, за теоремою Вієта, $u_1 = \lambda_1 + \lambda_2$ і $u_0 = -\lambda_1\lambda_2$. Таким чином, послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ має рівносильний вигляд

$$a_{n+2} = (\lambda_1 + \lambda_2)a_{n+1} - \lambda_1\lambda_2 a_n. \tag{10}$$

За теоремою 1 послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ буде періодичною з періодом N тоді і тільки тоді, коли $I_N \neq \varnothing$ і $A_i = 0$ для всіх $i \notin I_N$.

Розглянемо спочатку випадок $|I_N| = 1$. В силу симетричності можемо вважати, що $\lambda_1^N = 1$ і $A_2 = 0$. Підставивши $A_2 = 0$ в (9), одержимо, що $a_1 = \lambda a_0$ і $A_1 = a_0$. Звідси

$$a_n = a_0\lambda_1^n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{11}$$

Оскільки

$$x_1 = Ux_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_0 \\ \lambda_1^2 a_0 \end{pmatrix} = \lambda_1 x_0,$$

то λ_1 в цьому випадку є власним значенням матриці U, що відповідає власному вектору x_0.

Оскільки $\lambda_1 + \lambda_2 \in \mathbb{R}$ і $\lambda_1\lambda_2 \in \mathbb{R}$, то $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ або $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. В другому випадку λ_2 теж буде N-тим коренем з одиниці, що суперечить припущенню $|I_N| = 1$. Отже, рівняння (8) має два різні дійсні корені, причому $\lambda_1 = \pm 1$. Тоді з (11) випливає, що послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ має вигляд

$$a_0, a_0, a_0, a_0, \ldots$$

або

$$a_0, -a_0, a_0, -a_0, \ldots,$$

а ці випадки були розглянуті в попередньому підпункті.

Тепер перейдемо до випадку $|I_N| = 2$.

Обидва корені $\lambda_{1,2}$ дійсні. Припустимо, що $u_1^2 + 4u_0 > 0$ і

$$\lambda_1 = \tfrac{u_1 - \sqrt{u_1^2+4u_0}}{2}, \lambda_2 = \tfrac{u_1 + \sqrt{u_1^2+4u_0}}{2}.$$

Врахувавши, що $\lambda_2 - \lambda_1 = \sqrt{u_1^2 + 4u_0}$, ми одержимо формулу для загального члена послідовності

$$a_n = \left(\frac{a_0}{2} + \frac{a_0u_1 - 2a_1}{2\sqrt{u_1^2 + 4u_0}}\right) \cdot \left(\frac{u_1 - \sqrt{u_1^2 + 4u_0}}{2}\right)^n + \\ + \left(\frac{a_0}{2} - \frac{a_0u_1 - 2a_1}{2\sqrt{u_1^2 + 4u_0}}\right) \cdot \left(\frac{u_1 + \sqrt{u_1^2 + 4u_0}}{2}\right)^n, \ n \in \mathbb{N}_0,$$

яка при $u_0 = u_1 = 1$ та $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ дає формулу Біне для класичної послідовності Фібоначчі:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Оскільки $\lambda_1 < \lambda_2$, то $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ і N – парне. З (10) отримуємо, що

$$u_0 = -\lambda_1\lambda_2 = 1, \quad u_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

що дає вже згадувану раніше періодичну послідовність вигляду $a_{n+2} = a_n$ з періодом $N = 2$ для довільного початкового значення $a_0 \in \mathbb{R}$.

Обидва корені $\lambda_{1,2}$ комплексні. У випадку, коли $u_1^2 + 4u_0 < 0$, покладемо

$$\lambda_1 = \frac{u_1 - i\sqrt{D}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{u_1 + i\sqrt{D}}{2},$$

де

$$D = -(u_1^2 + 4u_0).$$

Формула для загального члена послідовності при $u_1^2 + 4u_0 < 0$ виглядає наступним чином:

$$a_n = \left(\frac{a_0}{2} - i \cdot \frac{a_0u_1 - 2a_1}{2\sqrt{D}}\right) \cdot \left(\frac{u_1 - i\sqrt{D}}{2}\right)^n + \\ + \left(\frac{a_0}{2} + i \cdot \frac{a_0u_1 - 2a_1}{2\sqrt{D}}\right) \cdot \left(\frac{u_1 + i \cdot \sqrt{D}}{2}\right)^n, \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Оскільки λ_1 і λ_2 є N-тими коренями з одиниці, а також спряженими комплексними числами, то мають місце співвідношення

$$\begin{cases} \frac{u_1 - i\sqrt{D}}{2} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \\ \frac{u_1 + i\sqrt{D}}{2} = \cos\varphi - i\sin\varphi, \end{cases}$$

де
$$\varphi = \frac{2\pi k}{N}$$
при $0 \le k \le N-1$. Виразивши послідовно з системи значення u_1 та u_0, отримаємо, що
$$u_1 = 2\cos\varphi, \quad u_0 = -1.$$
Нагадаємо, що $u_1^2 + 4u_0 < 0$, тому $4\cos^2\varphi - 4 < 0$, звідки $\cos\varphi \in (-1, 1)$ і
$$u_1 \in (-2, 2).$$

3.2.2 Випадок, коли характеристичне рівняння має єдиний розв'язок

Нехай $u_1^2 + 4u_0 = 0$. Тоді для $n \in \mathbb{N}_0$ виконується рекурентне співвідношення
$$a_{n+2} = u_1 a_{n+1} - \frac{u_1^2}{4} a_n.$$
Методом математичної індукції можна встановити, що загальний член цієї послідовності має вигляд
$$a_n = \frac{u_1^n}{2^{n+1}}(2na_0 - u_1(n-1)a_1),\ n \in \mathbb{N}_0.$$
Оскільки
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{u_1}{2}\right)^n \cdot \frac{n}{2} \cdot \left(2a_0 - u_1 a_1 \cdot \tfrac{n-1}{n}\right) = \infty$$
при $|u_1| \ge 2$, то послідовність $(a_n)_{n=0}^\infty$ може бути періодичною тільки при $|u_1| < 2$.

Припустимо, що $|u_1| < 2$ і $u_1 \ne 0$. Перепишемо a_n у вигляді
$$a_n = \left(\frac{u_1}{2}\right)^{n+1} n \left(\frac{2a_0}{u_1} - a_1\right) + \left(\frac{u_1}{2}\right)^{n+1} a_1,$$
позначимо $c = u_1/2$ і розглянемо функцію $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \left(\frac{a_0}{c} - a_1\right) x c^{x+1} + a_1 c^{x+1},$$
вважаючи, що $c > 0$. Тоді
$$f'(x) = c^{x+1} \cdot \left(\left(\frac{a_0}{c} - a_1\right) \ln c \cdot x + a_1 \ln c + \frac{a_0}{c} - a_1\right).$$
З вигляду похідної зрозуміло, що існує таке $x_0 \in \mathbb{R}$, що функція $f(x)$ строго монотонна на деякому проміжку $(x', +\infty)$, а, отже, неперіодична. Єдина умова для періодичності функції $f(x)$ – це рівність нулеві похідної $f'(x) = 0$ на $[1, +\infty)$. В цьому випадку
$$\begin{cases} \frac{a_0}{c} - a_1 + a_1 \ln c = 0, \\ \ln c \left(\frac{a_0}{c} - a_1\right) = 0. \end{cases}$$
Оскільки $c < 1$, то $\ln c \ne 0$. Тому з другого рівняння $a_0 = ca_1$. Підставивши в перше, одержимо, що $a_1 = 0$, а звідси й $a_0 = 0$. Отже, послідовність є нульовою $(0, 0, 0, \dots)$.

Якщо ж $u_1 < 0$, то, підставивши $v_1 = -u_1 > 0$, одержимо

$$a_n = (-1)^{n+1}\left(\left(\frac{v_1}{2}\right)^{n+1} a_1 - \left(\frac{v_1}{2}\right)^{n+1} n\left(\frac{2a_0}{v_1} + a_1\right)\right).$$

Позначимо $b = \frac{v_1}{2} \in (0,1)$ і розглянемо функцію $g : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = a_1 b^{x+1} - b^{x+1} x\left(\frac{a_0}{b} + a_1\right).$$

Оскільки

$$g'(x) = b^{x+1}\left(a_1 \ln b - \frac{a_0}{b} - a_1 - \left(\frac{a_0}{b} + a_1\right)\ln bx\right),$$

то, як і в попередньому випадку, функція $g(x)$ є строго монотонною на деякому проміжку $(x'', +\infty)$. А з рівності нулеві похідної $g'(x) = 0$ знову випливає, що $a_1 = a_0 = 0$. Таким чином, жодна з послідовностей $(a_{2n})_{n=0}^{\infty}$ чи $(a_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$ не є періодичною, окрім випадку, коли вони нульові. Припустимо, що послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ періодична і, наприклад, $(a_{2n})_{n=0}^{\infty}$ нульова. Легко бачити, що тоді й $(a_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$ періодична, а, отже, нульова.

Отже, при умові $u_1^2 + 4u_0 = 0$ послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ є періодичною тоді і тільки тоді, коли вона нульова.

3.3 Підсумкова теорема та її застосування

Підсумовуючи всі вищенаведені міркування, сформулюємо критерій періодичності послідовності другого порядку.

Теорема 2. *Рекурентна ненульова послідовність другого порядку $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, що визначається співвідношенням $a_{n+2} = u_1 a_{n+1} + u_0 a_n$ з дійсними коефіцієнтами $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$, є періодичною з періодом*

- $N = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + u_1 = 1, \\ a_1 = a_0; \end{cases}$

- $N = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 - u_1 = 1, \\ a_1 = -a_0; \end{cases}$ *або* $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 0, \\ a_1 \neq \pm a_0; \end{cases}$

- $N > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = -1, \\ u_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right), 0 < k < N,\ (k,N) = 1. \end{cases}$

Теорема 2 дає можливість легко конструювати періодичні послідовності як завгодно великої довжини $N \in \mathbb{N}$. Для цього слід вибрати довільний початковий вектор x_0, довільне натуральне $k \in (0,N)$ і послідовно обчислити $a_{n+2} = 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) a_{n+1} - a_n$ для $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

Приклад 1. *Побудуємо послідовність з періодом $N = 24$. Нехай $k = 1$,*

$$u_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{24}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

і початкові значення $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Тоді послідовність

$$a_{n+2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}a_{n+1} - a_n, \ n = 0, 1, \ldots$$

є періодичною з періодом 24 за теоремою 2. Наведемо значення цієї послідовності:

a_0	0	a_{12}	0	a_{24}	0
a_1	1	a_{13}	-1	a_{25}	1
a_2	$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$	a_{14}	$-\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$	a_{26}	$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$
a_3	$1+\sqrt{3}$	a_{15}	$-1-\sqrt{3}$	a_{27}	$1+\sqrt{3}$
a_4	$\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$	a_{16}	$-\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$	a_{28}	$\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$
a_5	$2+\sqrt{3}$	a_{17}	$-2-\sqrt{3}$	a_{29}	$2+\sqrt{3}$
a_6	$\sqrt{2}+\sqrt{6}$	a_{18}	$-\sqrt{2}-\sqrt{6}$	a_{30}	$\sqrt{2}+\sqrt{6}$
a_7	$2+\sqrt{3}$	a_{19}	$-2-\sqrt{3}$	a_{31}	$2+\sqrt{3}$
a_8	$\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$	a_{20}	$-\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$	a_{32}	$\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$
a_9	$1+\sqrt{3}$	a_{21}	$-1-\sqrt{3}$	a_{33}	$1+\sqrt{3}$
a_{10}	$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$	a_{22}	$-\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$	a_{34}	$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$
a_{11}	1	a_{23}	-1	a_{35}	1

При цьому $a_{i+\frac{N}{2}} = -a_i$ для кожного $i \in \mathbb{N}_0$.

Розглянемо тепер обернену задачу: нехай послідовність задана рекурентним співвідношенням (7). Для того, щоб дізнатися, чи вона періодична і яка довжина періода (у випадках, коли не справджуються перші дві умови теореми 2 для коротких періодів), то в разі рівності $u_0 = -1$ необхідно перевірити, чи $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{u_1}{2}$ є раціональним числом. Якщо так, то зобразити $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{u_1}{2}$ у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, і при парному m матимемо період $N = n$, а при непарному m – період $N = 2n$.

Приклад 2. *Нехай послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ визначається співвідношеннями*

$$a_0 = 3, a_1 = -2,$$
$$a_{n+2} = \sqrt{2}a_{n+1} - a_n \ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Оскільки

$$\frac{1}{\pi}\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$$

і при цьому $m = 1$, то послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ є періодичною з періодом $N = 2n = 8$ за теоремою 2, в чому можна переконатися й безпосередньо:

$$3, -2, -2\sqrt{2}-3, -3\sqrt{2}-2, -3, 2, 2\sqrt{2}+3, 2+3\sqrt{2}, 3, -2, \ldots$$

У зв'язку із цим виникає питання

Питання 1. *Описати множину*

$$B = \{b \in [-1, 1] : \frac{1}{\pi}\arccos b \in \mathbb{Q}\}.$$

Зрозуміло, що $\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1\} = \{\pm\sqrt{r} : r = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\} \subseteq B$. Природно запитати наступне.

Питання 2. *Знайти всі раціональні числа $r \in \mathbb{Q}$, такі, що $\sqrt{r} \in B$.*

Як ми бачили в прикладах 1 і 2, коефіцієнт u_1 в кожній з наведених послідовностей є ірраціональним числом. Тому виникає питання, пов'язане з виглядом коефіцієнтів періодичної послідовності, і частково пов'язане з питаннями 1 і 2.

Питання 3. *Описати періодичні послідовності другого порядку з раціональними коефіцієнтами u_1 та u_0.*

Відповіді на друге і третє питання ми дамо в наступному підпункті.

3.4 Раціональність функцій $\cos x$ та $\arccos x$

З'ясуємо спочатку, за яких умов коефіцієнт $u_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$ є раціональним числом.

Теорема 3. *Якщо $r \in \mathbb{Q}$ і $\cos(2\pi r) \in \mathbb{Q}$, то $\cos(2\pi r) \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$.*

Доведення. Нехай
$$\cos(2\pi r) = \frac{m_0}{n_0},$$
де m_0 – ціле, n_0 – натуральне, причому числа m_0 і n_0 взаємно прості, тобто, найбільший спільний дільник $(m_0, n_0) = 1$.

Припустимо, що $\cos(2\pi r) \notin \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$. Тоді $m_0 \neq 0$ і $n_0 > 2$. За формулою косинуса подвійного кута, маємо
$$\cos(4\pi r) = \frac{2m_0^2 - n_0^2}{n_0^2}.$$
Розглянемо випадок, коли чисельник та знаменник дробу в правій частині рівності не є взаємно простими числами. Нехай p – простий дільник чисел $2m_0^2 - n_0^2$ і n_0^2. Тоді $p|n_0$ і $p|2m_0^2$. Оскільки m_0 і n_0 взаємно прості, то $p|2$. Отже, $n_0 = 2k$ для деякого цілого числа k. Тоді
$$\cos(4\pi r) = \frac{m_0^2 - 2k^2}{2k^2}.$$
Якщо існує просте число q, таке, що $q|(m_0^2 - 2k^2)$ і $q|k^2$, то $q|k$ і $q|m_0^2$. Звідси $q|m_0$ і $q|n_0$, що суперечить припущенню про нескоротність дробу $\frac{m_0}{n_0}$. Крім того, оскільки $n_0 > 2$, то $n_0^2 > 2k_0^2 = \frac{n_0^2}{2} > n_0$. Таким чином,
$$\cos(4\pi r) = \frac{m_1}{n_1},$$
де $n_1 > n_0$ і $(m_1, n_1) = 1$. Аналогічно,
$$(\cos 8\pi r) = \frac{m_2}{n_2},$$

де $n_2 > n_1$ і $(m_2, n_2) = 1$. Продовжуючи ці міркування до нескінченності, ми отримаємо послідовність раціональних чисел $(\cos(2\pi \cdot 2^k r))_{k=0}^{\infty}$, таких, що

$$\cos(2\pi \cdot 2^k r) = \frac{m_k}{n_k},$$

$$(m_k, n_k) = 1, \tag{12}$$

і, крім того,

$$n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \ldots . \tag{13}$$

Нехай раціональне число r має вигляд $r = \frac{a}{b}$. Врахувавши 2π-періодичність косинуса, ми отримаємо, що

$$|\{\cos(2\pi \cdot 2^k r) : k = 0, 1, \ldots\}| = b.$$

Але скінченність множини значень послідовності $(\cos(2\pi \cdot 2^k r))_{k=0}^{\infty}$ суперечить властивостям (12) і (13).

Отримана суперечність завершує доведення. $\square$

Наслідок 1. *Нехай* $a_{n+2} = u_1 a_{n+1} + u_0 a_n$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}_0$, *причому* $u_0, u_1 \in \mathbb{Q}$. *Наступні умови рівносильні*

(i) $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *періодична з періодом* $N > 2$;

(ii) $u_0 = -1$, $u_1 \in \{0, \pm 1\}$.

Доведення. **(i) ⇒ (ii).** З теореми 2 випливає, що $u_0 = -1$ і $u_1 = 2\cos(2\pi r)$, $r \in \mathbb{Q}$, причому $u_1 \neq \pm 2$. Тоді, застосувавши теорему 3, ми одержимо, що $u_1 \in \{0, \pm 1\}$.

(ii) ⇒ (i). При $u_1 = 0$ ми отримуємо послідовність $a_{n+2} = -a_n$ вигляду

$$a_0, a_1, -a_0, -a_1, a_0, a_1, \ldots,$$

періодичну з періодом $N = 4$.

При $u_1 = 1$ ми отримуємо послідовність $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ вигляду

$$a_0, a_1, a_1 - a_0, -a_0, -a_1, a_0 - a_1, a_0, a_1, \ldots,$$

періодичну з періодом $N = 6$.

При $u_1 = -1$ ми отримуємо послідовність $a_{n+2} = -a_{n+1} - a_n$ вигляду

$$a_0, a_1, -a_1 - a_0, a_0, a_1, \ldots,$$

періодичну з періодом $N = 3$. $\square$

Перейдемо тепер до вивчення питання, коли $\frac{1}{2\pi} \arccos b = \frac{m}{n}$ для $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ і $|m| < n$.

В теоремі 3 ми з'ясували, що $b \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow b \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$. Зауважимо, що

$$\left(\cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi m}{n}\right)\right)^n = 1,$$

тому n-ий корінь з одиниці $w = \cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi m}{n}\right)$, будучи коренем многочлена $x^n - 1 = 0$, є алгебраїчним числом. Оскільки $b = \cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right) = \frac{w+\overline{w}}{2}$, то b також є числом алгебраїчним. Отже, природно дізнатися, чи є число b алгебраїчним цілим, а також, чи є воно алгебраїчним цілим числом невисоких степенів, наприклад, другого чи третього. Для цього нам буде корисною теорема Лемера [5, Theorem 1].

Теорема 4 (Лемер)**.** *Нехай $m, n \in \mathbb{N}$ – взаємно прості, $n > 2$. Тоді $2\cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right)$ є алгебраїчним цілим степеня $\frac{1}{2}\varphi(n)$, де $\varphi(n)$ – функція Ейлера.*

Розглянемо періодичну послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ з періодом $N > 2$, таку, що її коефіцієнти $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ є алгебраїчними цілими числами степеня $k > 1$. За теоремою 2, $u_0 = -1$ і $u_1 = 2\cos(\frac{2\pi m}{n})$, $|m| < n$ і числа m, n взаємно прості.

Згідно з теоремою Лемера, якщо u_1 є алгебраїчним цілим числом другого степеня, то $\varphi(n) = 4$. Розкладемо $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_i^{\alpha_i} > 1$, тоді $\varphi(n) = \prod_{j=1}^{i} p_j^{\alpha_i - 1}(p_j - 1)$.

Нехай $n = 2^m s$, де $m \geq 1$ і s – непарне. Тоді

$$2^m s(p_2 - 1)\dots(p_i - 1) = 8p_2 \dots p_i, \tag{14}$$

де p_j при $2 \leq j \leq i$ – непарне прості числа.

- Якщо $m = 3$, то $i = 1$, інакше ліва частина рівності (14) буде кратна 16, а права – ні. В цьому випадку $n = 8$.

- Якщо $m = 2$, то $s > 1$ і, крім того, з (14) випливає рівність $s(p_2 - 1)\dots(p_i - 1) = 2p_2 \dots p_i$. Звідси маємо, що в розкладі числа n присутнє тільки одне просте число p_j, $j \geq 2$, в ненульовому степені. Нехай $p_j - 1 = 2q$, тоді $sq = p_j$, що можливо тільки у випадку $q = 1$. Отже, $p_j = 3$. В цьому випадку $n = 12$.

- Якщо $m = 1$, то $s > 1$ і $s(p_2 - 1)\dots(p_i - 1) = 4p_2 \dots p_i$. В цій ситуації можливі два варіанти – в розкладі числа n присутні рівно 2 числа $p_j < p_l$ в ненульових степенях, такі, що $p_j \equiv p_l \equiv 3 \mod 4$, або тільки одне число p_j в ненульовому степені, таке, що $p_j \equiv 1 \mod 4$. В першому випадку маємо $p_j^{\alpha_j - 1} p_l^{\alpha_l - 1}(p_j - 1)(p_l - 1) = 4$. Після скорочення на 4 обидвох частин рівності, ми одержимо, що $p_j = p_l = 3$, що суперечить припущенню $p_j < p_l$. В другому випадку маємо $p_j^{\alpha_j - 1}(p_j - 1) = 4$. Звідси $\alpha_j = 1$, $p_j = 5$. Отже, $n = 10$.

Нехай тепер n – непарне число. Тоді $\alpha_1 = 0$ і

$$p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_i^{\alpha_i - 1}(p_2 - 1)\dots(p_i - 1) = 4.$$

Аналогічно до попередніх міркувань для випадку $m = 1$, така рівність можлива тільки для $n = 5$.

Таким чином,

$$\varphi(n)=4 \ \Leftrightarrow \ n\in\{5,8,10,12\}.$$

Подібно можна встановити, що

$$\begin{array}{lcl}\varphi(n)=6 & \Leftrightarrow & n\in\{7,9,14,18\}\\ \varphi(n)=8 & \Leftrightarrow & n\in\{15,16,20,24,30\}\\ \varphi(n)=10 & \Leftrightarrow & n\in\{11,22\}\\ \varphi(n)=12 & \Leftrightarrow & n\in\{13,21,26,28,36,42\}\\ \varphi(n)=14 & \Leftrightarrow & n\in\varnothing.\end{array}$$

Оскільки не існує натурального числа n, такого, що $\varphi(n)=14$, то коефіцієнт u_1 періодичної послідовності $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ не може бути коренем зведеного многочлена 7-го степеня з цілими коефіцієнтами.

Знайдемо тепер всі можливі значення кутів $\varphi=2\pi m/n$ та коефіцієнтів $u_1=2\cos\varphi$ у випадках, коли вони є алгебраїчними цілими числами степенів $k=2,3,4,5$.

k	поліном	u_1 (нулі полінома)	φ	l	N
2	x^2+x-1	$-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{2\pi\cdot l}{5}$	$1,2$	5
	x^2-2	$\pm\sqrt{2}$	$\frac{\pi\cdot l}{4}$	$1,3$	8
	x^2-x-1	$\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\pi\cdot l}{5}$	$1,3$	10
	x^2-3	$\pm\sqrt{3}$	$\frac{\pi\cdot l}{6}$	$1,5$	12
3	x^3+x^2-2x-1	$-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt[3]{49}}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}(1+3i\sqrt{3})}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{7}{2}(1+3i\sqrt{3})}$	$\frac{2\pi\cdot l}{7}$	$1,2,3$	7
	x^3-3x+1	$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}i(\sqrt{3}+i)}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}i(\sqrt{3}+i)}$	$\frac{2\pi\cdot l}{9}$	$1,2,4$	9
	x^2-x^2-2x+1	$\frac{1}{3}+\frac{\sqrt[3]{49}}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-1+3i\sqrt{3})}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{7}{2}(-1+3i\sqrt{3})}$	$\frac{\pi\cdot l}{7}$	$1,3,5$	14
	x^3-3x-1	$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})}$	$\frac{\pi\cdot l}{9}$	$1,5,7$	18
4	$x^4-x^3-4x^2+4x+1$	$\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}-\sqrt{30+6\sqrt{5}}\right)$	$\frac{2\pi\cdot l}{15}$	$1,2,4,7$	15
		$\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}\right)$			
		$\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}}\right)$			
		$\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}\right)$			
	x^4-4x^2+2	$\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}$	$\frac{\pi\cdot l}{8}$	$1,3,5,7$	16
	x^4-5x^2+5	$\pm\sqrt{\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}}$	$\frac{\pi\cdot l}{10}$	$1,3,7,9$	20
	x^4-4x^2+1	$\pm\frac{1}{2}(\sqrt{2}\pm\sqrt{6})$	$\frac{\pi\cdot l}{12}$	$1,5,7,11$	24
	$x^4+x^3-4x^2-4x+1$	$\frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}\right)$	$\frac{\pi\cdot l}{15}$	$1,7,11,13$	30
		$\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}-\sqrt{30+6\sqrt{5}}\right)$			
		$\frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}\right)$			
		$\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}}\right)$			

5	$x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1$	$2\cos\varphi$	$\frac{2\pi\cdot l}{11}$	$1,2,3,4,5$	11
	$x^5-x^4-4x^3+3x^2+3x-1$	$2\cos\varphi$	$\frac{\pi\cdot l}{22}$	$1,3,5,7,9$	22

Опишемо знаходження незвідного полінома $P_q(x) = x^q + a_{q-1}x^{q-1} + \cdots + a_1x + a_0$ з цілими коефіцієнтами, коренем якого є число u_1, наприклад, для $k = 4$ і $u_1 = 2\cos\frac{2\pi}{15}$. Позначимо

$$w = \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{15}\right).$$

Тоді

$$u_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) = w + \overline{w} = w + \tfrac{1}{w}.$$

Зауважимо, що $w^{15} = 1$ і, оскільки $w \neq 1$, то $w^{14} + w^{13} + \cdots + w + 1 = 0$. Поділимо останню рівність на $w^7 \neq 0$ і отримаємо

$$\left(w^7 + \frac{1}{w^7}\right) + \cdots + \left(w + \frac{1}{w}\right) + 1 = 0.$$

Оскільки

$$\begin{gathered}
x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy,\\
x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y),\\
x^4 + y^4 = (x+y)^4 - 4xy(x+y)^2 + 2x^2y^2,\\
x^5 + y^5 = (x+y)^5 - 5xy(x+y)^3 + 5x^2y^2(x+y),\\
x^6 + y^6 = (x+y)^6 - 6xy(x+y)^4 + 9x^2y^2(x+y)^2 - 2x^3y^3,\\
x^7 + y^7 = (x+y)^7 - 7xy(x+y)^5 + 14x^2y^2(x+y)^3 - 7x^3y^3(x+y),
\end{gathered}$$

то, підставивши $x = w$, $y = \frac{1}{w}$ та зробивши заміну $t = w + \frac{1}{w}$, ми отримаємо рівняння

$$t^7 + t^6 - 6t^5 - 5t^4 + 10t^3 + 6t^2 - 4t - 1 = 0.$$

З допомогою WolframAlpha переконуємося, що многочлен в лівій частині рівності розкладається на множники

$$t^7 + t^6 - 6t^5 - 5t^4 + 10t^3 + 6t^2 - 4t - 1 = (t+1)(t^2+t-1)(t^4 - t^3 - 4t^2 + 4t + 1).$$

Оскільки $u_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)$ не є коренем ані $(t+1)$, ані (t^2+t-1), то u_1 є коренем незвідного многочлена $t^4 - t^3 - 4t^2 + 4t + 1$ з цілими коефіцієнтами, а, отже, алгебраїчним цілим числом четвертого степеня.

4 Рекурентні послідовності третього порядку

Перейдемо до питання періодичності рекурентних послідовностей третього порядку, тобто, послідовностей $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, які визначаються рекурентним співвідношенням

$$a_{n+3} = u_2 a_{n+2} + u_1 a_{n+1} + u_0 a_n, \tag{15}$$

для $n = 0, 1, \dots$ із заданими початковими значеннями a_0, a_1, a_2.

Розглянемо матрицю U і вектори x_n при $n \in \mathbb{N}_0$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ u_0 & u_1 & u_2 \end{pmatrix}, \quad x_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$$

та нагадаємо, що $x_{n+1} = Ux_n$. Крім того, індукцією можна довести, що для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ має місце співвідношення

$$x_n = U^n x_0. \tag{16}$$

4.1 Короткі періоди $N = 1, 2, 3$

Коефіцієнти сталої послідовності вигляду (15) з початковим вектором $x_0 = (a, a, a)$ задовольняють рівність $a = (u_2 + u_1 + u_0)a$, звідки $u_2 + u_1 + u_0 = 1$ або $a = 0$.

Нехай послідовність (15) має період $N = 2$. Тоді початковий вектор має вигляд $x_0 = (a_0, a_1, a_0)$ і $a_3 = a_1$, $a_4 = a_0$. Підставивши значення a_3 і a_4 в (15), одержимо рівності

$$\begin{cases} a_1 = u_2 a_0 + u_1 a_1 + u_0 a_0, \\ a_0 = u_2 a_1 + u_1 a_0 + u_0 a_1. \end{cases}$$

Звідси маємо, що $(a_0 + a_1)(u_0 + u_1 + u_2 - 1) = 0$. Якщо $a_1 = -a_0$, то з першого рівняння системи $u_1 - u_0 - u_2 = 1$. В цьому випадку послідовність має вигляд $a_0, -a_0, a_0, -a_0, \dots$. Якщо ж $a_1 \neq -a_0$, то підставивши $u_0 + u_1 + u_2 = 1$ в систему, одержимо $(a_0 - a_1)(1 - u_1) = 0$. У випадку $a_1 = a_0$ ми отримуємо сталу послідовність. Таким чином, $u_1 = 1$ і $u_0 + u_2 = 0$, а послідовність виглядатиме наступним чином: $a_0, a_1, a_0, a_1, \dots$.

Знайдемо тепер умови на коефіцієнти для періоду $N = 3$. Оскільки $x_3 = x_0$, то з (15) випливають рівності

$$\begin{cases} a_0 = u_2 a_2 + u_1 a_1 + u_0 a_0, \\ a_1 = u_2 a_0 + u_1 a_2 + u_0 a_1, \\ a_2 = u_2 a_1 + u_1 a_0 + u_0 a_2. \end{cases}$$

Додавши ці рівності, маємо $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ або $u_0 + u_1 + u_2 = 1$. Якщо $a_0 + a_1 + a_2 = 0$, то, підставивши $a_2 = -a_1 - a_0$ в систему, після перетворень, отримаємо співвідношення $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ і $u_2 = u_1 = u_0 - 1$. Наприклад, при $x_0 = (1, 2, -3)$ і $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + 2a_n$ маємо періодичну послідовність $1, 2, -3, 1, 2, -3, \dots$ з періодом $N = 3$. У випадку, коли $a_0 + a_1 + a_2 \neq 0$, то $u_0 + u_1 + u_2 = 1$, звідки з системи маємо

$$\begin{cases} u_1(a_1 - a_2) = (a_0 - a_2)(1 - u_0) \\ u_1(a_2 - a_0) = (a_1 - a_0)(1 - u_0). \end{cases}$$

Відкинувши співвідношення, з яких випливають випадки періодів $N = 1$ та $N = 2$, одержимо, що $u_1 = u_2 = 0$, $u_0 = 1$ і вектор x_0 не сталий, тобто, $(a_1 - a_0)^2 + (a_2 - a_1)^2 + (a_2 - a_0)^2 > 0$. Послідовність має вигляд $a_{n+3} = a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, і є періодичною з періодом $N = 3$.

4.2 Періоди довільної довжини

Розглянемо характеристичне рівняння

$$x^3 - u_2x^2 - u_1x - u_0 = 0 \tag{17}$$

співвідношення (15). Зробимо підстановку $x = y + \frac{u_2}{3}$ і після перетворень одержимо кубічне рівняння

$$y^3 + py + q = 0, \tag{18}$$

де

$$p = -\frac{u_2^2}{3} - u_1, \quad q = -\frac{2u_2^3}{27} - \frac{u_2u_1}{3} - u_0.$$

Згідно з [1, с. 235], корені рівняння (18) можуть бути знайдені за формулою Кардано

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

де з трьох різних коренів кубічних

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{19}$$

потрібно обирати той, що задовольняє рівність $\alpha\beta = -\frac{p}{3}$, де

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{20}$$

Позначимо

$$D = -108\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right) = -4u_2^3u_0 + u_2^2u_1^2 - 18u_2u_1u_0 + 4u_1^3 - 27u_0^2. \tag{21}$$

Згідно з [1, с. 236-237], у випадках $D \neq 0$ рівняння (17) має три попарно різні корені, а у випадку $D = 0$ – три корені, два з яких рівні між собою.

4.3 Характеристичне рівняння має три попарно різні корені

Розглянемо випадок $D \neq 0$ і нехай λ_1, λ_2 і λ_3 – попарно різні корені рівняння (17). Згідно з (4), загальний член послідовності $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, яка визначається співвідношенням (15), має вигляд

$$a_n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n + A_3\lambda_3^n \tag{22}$$

для кожного $n = 0, 1, \ldots,$ де $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$. Знайдемо ці числа з матричного рівняння $\Lambda_0 A = x_0$, де

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \ x_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$\Lambda_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)} & \frac{-\lambda_2-\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)} & \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)} \\ \frac{\lambda_1\lambda_3}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)} & \frac{-\lambda_1-\lambda_3}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)} & \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)} \\ \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} & \frac{-\lambda_1-\lambda_2}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} & \frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} \end{pmatrix},$$

то

$$A_1 = \frac{\lambda_2\lambda_3 a_0 - \lambda_2 a_1 - \lambda_3 a_1 + a_2}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)},$$
$$A_2 = \frac{\lambda_1\lambda_3 a_0 - \lambda_1 a_1 - \lambda_3 a_1 + a_2}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)},$$
$$A_3 = \frac{\lambda_1\lambda_2 a_0 - \lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_1 + a_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}. \quad (23)$$

Слідуючи теоремі 1, необхідно дослідити умови на коефіцієнти u_0, u_1 та u_2, при виконанні яких $|I_N| \neq \varnothing$ та $A_i = 0$ для всіх $i \in \{1, 2, 3\} \setminus I_N$. Отже, нехай спочатку $|I_N| = 1$. Без обмеження загальності вважатимемо, що

$$A_1 = A_2 = 0, \ \lambda_3^N = 1.$$

Тоді з рівностей (23) випливає, що

$$\begin{cases} \lambda_2\lambda_3 a_0 - (\lambda_2 + \lambda_3)a_1 + a_2 &= 0, \\ \lambda_1\lambda_3 a_0 - (\lambda_1 + \lambda_3)a_1 + a_2 &= 0, \\ \lambda_1\lambda_2 a_0 - (\lambda_1 + \lambda_2)a_1 + a_2 &= A_3(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2). \end{cases}$$

Віднявши друге рівняння від першого та врахувавши, що $\lambda_2 \neq \lambda_1$, ми одержимо рівність $a_1 = \lambda_3 a_0$. Підставивши цей зв'язок у перше рівняння, отримаємо, що $a_2 = \lambda_3^2 a_0$. Тоді з третього рівняння $A_3 = a_0$, звідки отримуємо загальний вигляд послідовності

$$a_n = \lambda_3^n a_0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (24)$$

Оскільки

$$Ux_0 = x_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_3 a_0 \\ \lambda_3^2 a_0 \\ \lambda_3^3 a_0 \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} a_0 \\ \lambda_3 a_0 \\ \lambda_3^2 a_0 \end{pmatrix} = \lambda_3 x_0,$$

то x_0 є власним вектором матриці U із власним значенням λ_3.

При $D > 0$ всі корені рівняння (18), а значить, і рівняння (17) дійсні. Тому $\lambda_1 = \pm 1$. З (24) випливає, що послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ має вигляд $a_0, a_0, \ldots$ або $a_0, -a_0, a_0, -a_0, \ldots,$ а такі послідовності ми вже розглядали раніше.

У випадку $D < 0$ рівняння (18) матиме один дійсний корінь і два комплексні спряжені корені. Зрозуміло, що тоді й корені рівняння (17) матимуть таку ж властивість. Тоді $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, інакше λ_1 мало б спряжений корінь, який теж був би N-тим коренем з одиниці, що суперечить припущенню $|I_N| = 1$. Отже, $\lambda_1 = \pm 1$, що знову приводить до вищенаведених випадків.

Припустимо тепер, що $|I_N| = 2$ і, наприклад, $A_3 = 0$, а $\lambda_1^N = \lambda_2^N = 1$. Тоді, з (23) маємо

$$\begin{cases} \lambda_2\lambda_3 a_0 - (\lambda_2 + \lambda_3)a_1 + a_2 &= A_1(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2), \\ \lambda_1\lambda_3 a_0 - (\lambda_1 + \lambda_3)a_1 + a_2 &= A_2(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1), \\ \lambda_1\lambda_2 a_0 - (\lambda_1 + \lambda_2)a_1 + a_2 &= 0. \end{cases}$$

З третього рівняння

$$a_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)a_1 - \lambda_1\lambda_2 a_0.$$

Підставивши значення a_2 в перше та друге рівняння, ми одержимо

$$A_1 = \frac{a_0\lambda_2 - a_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad A_2 = \frac{a_1 - a_0\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

тобто, числа A_1 і A_2 задовольняють рівності (9). Звідси, використовуючи (22), індуктивно можна визначити рекурентний вигляд послідовності $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, а саме

$$a_{n+2} = (\lambda_1 + \lambda_2)a_{n+1} - \lambda_1\lambda_2 a_n \ \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{25}$$

Зауважимо, що $\lambda_1\lambda_2 = 1$ і $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$ для деякого $0 < k < N$ згідно з теоремою 2. З теореми Вієта випливає, що $\lambda_1 + \lambda_2 = u_2 - u_0$. Отже,

$$u_2 = 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) + u_0.$$

Дал, за теоремою Вієта $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = u_0$, звідки $\lambda_3 = u_0$. Крім того,

$$u_1 = -(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) = -1 - \lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2) = -1 - 2u_0\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right).$$

Залишилося знайти вигляд коефіцієнтів u_0, u_1 та u_2 у випадку, коли $|I_N| = 3$.

4.3.1 Випадок $D < 0$

В цьому випадку α буде мати один дійсний корінь, позначимо його через α_1, і два комплексні спряжені корені. Позначимо через β_1 відповідний дійсний корінь β, такий, що

$$\alpha_1\beta_1 = -\tfrac{p}{3}. \tag{26}$$

Тоді рівняння (18) має один дійсний корінь

$$y_1 = \alpha_1 + \beta_1 \in \mathbb{R}$$

і два комплексні

$$y_{2,3} = -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} \pm i\sqrt{3}\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}.$$

При цьому розв'язками рівняння (17) будуть попарно різні числа $\lambda_i = y_i + \frac{u_2}{3}$, $i = 1, 2, 3$.

Оскільки кожне λ_i є N-тим коренем з одиниці, а $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, то

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 + \frac{u_2}{3} = 1, \\ \alpha_1 + \beta_1 + \frac{u_2}{3} = -1 \text{ і } N - \text{ парне} \end{array} \right. \\ \frac{u_2}{3} - \frac{\alpha_1+\beta_1}{2} + i\sqrt{3}\frac{\alpha_1-\beta_1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi \cdot n}{N}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi \cdot n}{N}\right), \\ \frac{u_2}{3} - \frac{\alpha_1+\beta_1}{2} - i\sqrt{3}\frac{\alpha_1-\beta_1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi \cdot r}{N}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi \cdot r}{N}\right) \end{cases}$$

для деяких $n, r \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Тоді з другого і третього рівнянь системи маємо, що $\cos\left(\frac{2\pi \cdot n}{N}\right) = \cos\left(\frac{2\pi \cdot r}{N}\right)$, а $\sin\left(\frac{2\pi \cdot n}{N}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi \cdot r}{N}\right)$. Позначимо $\varphi = \frac{2\pi \cdot n}{N}$.

Якщо $\alpha_1 + \beta_1 + \frac{u_2}{3} = \pm 1$, то $\frac{u_2}{3} - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1) = \frac{u_2}{2} \mp \frac{1}{2}$. Підставивши в друге рівняння системи, отримаємо можливі вирази для u_2:

$$u_2 = 2\cos\varphi + 1 \text{ або } u_2 = 2\cos\varphi - 1 \text{ при парному } N. \tag{27}$$

З другого та третього рівнянь системи маємо

$$\alpha_1 = \frac{u_2}{3} - \cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}}, \;\; \beta_1 = \frac{u_2}{3} - \cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}}.$$

Тоді

$$\alpha_1\beta_1 = \left(\frac{u_2}{3} - \cos\varphi\right)^2 - \frac{\sin^2\varphi}{3} = \frac{{u_2}^2}{9} - \frac{2u_2}{3}\cos\varphi + \frac{4\cos^2\varphi - 1}{3},$$

а з іншого боку, з (26)

$$\alpha_1\beta_1 = \frac{{u_2}^2}{9} + \frac{u_1}{3}.$$

З цих співвідношень випливає, що

$$u_1 = 4\cos^2\varphi - 2u_2\cos\varphi - 1.$$

Звідси, $u_1 = -2\cos\varphi - 1$ при $u_2 = 2\cos\varphi + 1$ і $u_1 = 2\cos\varphi - 1 = u_2$ при $u_2 = 2\cos\varphi - 1$. Далі, якщо $u_2 = 2\cos\varphi + 1$, то коренем рівняння (17) є $\lambda_1 = 1$, тому в цьому випадку $u_2 + u_1 + u_0 = 1$, а тоді $u_0 = 1$. Якщо ж $u_2 = 2\cos\varphi - 1$, то коренем рівняння (17) є $\lambda_1 = -1$, тому $u_1 - u_0 - u_2 = 1$, звідки $u_0 = -1$.

4.3.2 Випадок $D > 0$

В цій ситуації всі корені рівняння (17) дійсні та різні. З іншого боку, $|\lambda_i| = 1$ для кожного $i = 1, 2, 3$. Тому хоча б два значення λ_i повинні збігатися, отримуємо суперечність.

4.4 Характеристичне рівняння має кратні корені

Якщо $D = 0$, то рівняння (17) має три дійсні корені, два з яких між собою рівні.

Розглянемо спочатку випадок, коли характеристичне рівняння (17) має три корені, два з яких, скажімо, λ_2 і λ_3 рівні, причому $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді згідно з [2, с. 39], загальний член послідовності (15) має вигляд

$$a_n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n + A_3 n\lambda_2^n$$

для деяких $A_i \in \mathbb{R}$ і кожного $n = 0, 1, \ldots$. Для знаходження A_i розв'яжемо відповідне матричне рівняння $M_0 A = x_0$, де

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 2\lambda_2^2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $\det M = \lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \neq 0$, тоді

$$M_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} & -\frac{2\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} & \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} \\ \frac{\lambda_1(\lambda_1-2\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} & \frac{2\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} & \frac{-1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} \\ -\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} & \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)} & \frac{-1}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}, \end{pmatrix}$$

звідки

$$A_1 = \frac{\lambda_2^2 a_0 - 2\lambda_2 a_1 + a_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2},$$
$$A_2 = \frac{\lambda_1^2 a_0 - 2\lambda_1\lambda_2 a_0 + 2\lambda_2 a_1 - a_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2},$$
$$A_3 = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_1 - \lambda_1\lambda_2 a_0 - a_2}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}. \quad (28)$$

Для $n \in \mathbb{N}_0$ позначимо

$$M_n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n & n\lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} & (n+1)\lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} & (n+2)\lambda_2^{n+2} \end{pmatrix}.$$

Тоді $x_n = M_n A$ для кожного $n \in \mathbb{N}_0$. Перевіримо умову періодичності $x_N = x_0$. Маємо

$$M_N A = M_0 A \;\Leftrightarrow\; (M_N - M_0)A = 0 \;\Leftrightarrow\; M_0 \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^N - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^N - 1 & N\lambda_2^N \\ 0 & 0 & \lambda_2^N - 1 \end{pmatrix} \cdot A = 0.$$

Остання рівність вірна тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^N - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^N - 1 & N\lambda_2^N \\ 0 & 0 & \lambda_2^N - 1 \end{pmatrix} \cdot A = 0,$$

що рівносильно умовам

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} \lambda_1^N = \lambda_2^N = 1, \\ A_3 = 0; \end{cases} \qquad (\mathrm{II}) \begin{cases} \lambda_1^N = 1, \\ A_2 = A_3 = 0; \end{cases} \qquad (\mathrm{III}) \begin{cases} \lambda_2^N = 1, \\ A_1 = A_3 = 0. \end{cases}$$

Оскільки у всіх трьох випадках $A_3 = 0$, то $a_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)a_1 - \lambda_1\lambda_2 a_0$ з рівностей (28). Підставивши це значення у вирази для A_1 та A_2, ми одержимо рівності (9). Таким чином, випадки (I)–(III) рівносильні розглянутим вище випадкам $|I_N| = 1$ та $|I_N| = 2$.

Наприкінці розглянемо випадок, коли рівняння (17) має три однакові корені $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. Тоді згідно з [2, с. 39] загальний член послідовності $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ має вигляд

$$a_n = \lambda^n(A_1 + A_2 n + A_3 n^2)$$

для деяких $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$. Аналогічно як у підпункті 3.2.2, ми отримаємо, що така послідовність є періодичною тоді і тільки тоді, коли вона нульова.

4.5 Підсумкова теорема для послідовностей третього порядку

Теорема 5. *Рекурентна ненульова послідовність третього порядку $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, що визначається співвідношенням $a_{n+3} = u_2 a_{n+2} + u_1 a_{n+1} + u_0 a_n$ з дійсними коефіцієнтами $u_0, u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, є періодичною з періодом*

- $N = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 1, \\ x_0 = (a_0, a_0, a_0); \end{cases}$

- $N = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_0 - u_2 = 1, \\ x_0 = (a_0, -a_0, a_0); \end{cases}$ *або* $\begin{cases} u_0 + u_2 = 0, u_1 = 1, \\ x_0 = (a_0, a_1, a_0), a_1 \neq \pm a_0; \end{cases}$

- $N = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = u_1 = u_0 - 1, \\ x_0 = (a_0, a_1, -a_0 - a_1); \end{cases}$ *або* $\begin{cases} u_1 = u_2 = 0, u_0 = 1, \\ x_0 - \text{довільний вектор}; \end{cases}$

- $N > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -2u_0 \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right), \ u_2 = u_0 + 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right), \\ x_0 = (a_0, a_1, 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) a_1 - a_0), \\ 0 < k < N, \ (k, N) = 1; \end{cases}$ *або*

  $\begin{cases} u_2 = -u_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) + 1, \ u_0 = 1, \\ 0 < k < N, \ (k, N) = 1; \end{cases}$ *або*

  $\begin{cases} u_2 = u_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) - 1, \ u_0 = -1, \\ N - \text{парне}. \end{cases}$

Приклад 3. Побудуємо послідовність третього порядку з періодом $N = 12$. Скористаємося другою умовою на коефіцієнти u_0, u_1, u_2 для випадку $N > 3$. Нехай $k = 1$, тоді $u_0 = 1$, $u_2 = -u_1 = 2\cos\frac{\pi}{6} + 1 = \sqrt{3} + 1$,

$$a_{n+3} = (\sqrt{3} + 1)a_{n+2} - (\sqrt{3} + 1)a_{n+1} + a_n$$

та нехай $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ і $a_2 = 2$. Тоді послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ має вигляд

$$0, 1, 2, 1 + \sqrt{3}, 3, 1 + \sqrt{3}, 2, 1, 0, 1 - \sqrt{3}, -1, 1 - \sqrt{3}, 0, 1, 2, \ldots$$

причому $x_{12} = x_0$.

Приклад 4. Нехай $N = 10$ і $\varphi = 72^\circ = \frac{4\pi}{10}$. Скористаємося третьою умовою на коефіцієнти u_0, u_1, u_2 для випадку $N > 3$. Зауважимо, що $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Далі, $u_2 = u_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $u_0 = -1$ і

$$a_{n+3} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a_{n+2} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a_{n+1} - a_n.$$

Покладемо $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_0 = 0$. Тоді отримуємо послідовність

$$1, 1, 0, \frac{\sqrt{5}-2}{2}, 1-\sqrt{5}, -1, -1, 0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \sqrt{5}-1, 1, 1, 0, \dots.$$

Таким чином, $x_{10} = x_0$, і послідовність має період $N = 10$.

Список літератури

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры, 1965
2. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности, 1950
3. Kalman D., Mena R. (2003) *The Fibonacci Numbers—Exposed*, Mathematics Magazine, 76:3, 167-181
4. Koshy T., *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley, New York, 2001.
5. Lehmer D.H. *A Note on Trigonometric Algebraic Numbers*, Amer. Math. Monthly **40** (3), 1933, 165-166.
6. Niven I. *Irrational numbers*, Mathematical Association of America; distributed by J. Wiley, New York, 1956.
7. The Fibonacci Quarterly: https://www.fq.math.ca/
8. International Fibonacci Conference: http://195.130.32.39/fibonacci20/index.php
9. Pisano period of Fibonacci sequence: https://en.wikipedia.org/wiki/Pisano_period

Список літератури

1. Kurosh A. *Higher algebra*, Mir publishers, 1965
2. Markushevich A. *Recursion sequences*, Mir publishers, 1950

3. Kalman D., Mena R. (2003) *The Fibonacci Numbers—Exposed*, Mathematics Magazine, 76:3, 167-181
4. Koshy T., *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley, New York, 2001.
5. Lehmer D.H. *A Note on Trigonometric Algebraic Numbers*, Amer. Math. Monthly **40** (3), 1933, 165-166.
6. Niven I. *Irrational numbers*, Mathematical Association of America; distributed by J. Wiley, New York, 1956.
7. The Fibonacci Quarterly: https://www.fq.math.ca/
8. International Fibonacci Conference: http://195.130.32.39/fibonacci20/index.php
9. Pisano period of Fibonacci sequence: https://en.wikipedia.org/wiki/Pisano_period

Надійшло 07.10.2022

Karlova O.O., Katyrynchuk K.M., Protsenko V.I. *On periodicity of recurrent sequences of the second and the third order*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 111–136.

Among other sequences of integers Fibonacci numbers and Lucas numbers are cituated in the central place. In spite of great amount of literature dedicated to Fibonacci and Lucas sequences, there are still a lot of intriguing questions and open problems in this direction, see, for instance, the "The Fibonacci Quarterly" journal or materials of the Biannual International Conference organized by Fibonacci Association.

We are motivated by the following simple observatoin. Consider the classical Fibonacci sequence defined by the rule

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n = 0, 1, 2, \dots$$

with the initial values $F_0 = 0$, $F_1 = 1$:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

If we consider a little bit another sequence

$$G_{n+2} = G_{n+1} - G_n, n = 0, 1, 2, \dots,$$

then for $G_0 = 0$, $G_1 = 1$ the sequence $(G_n)_{n=0}^{\infty}$ is of the form

$$0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, \dots.$$

In other words, this sequence is periodic with period of the length 6.

Therefore, the next questions follow naturally from the previous observation: (i) under which conditions on its coefficients the reccurent sequence is periodic? (ii) How long may be a period of the reccurent sequence and how it depends on coefficients? (iii) Does the length of a period depends on initial values of the reccurent sequence?

In the given paper we answer to these questions for the reccurent sequences of the second and the third order. We obtain necessary and sufficient conditions on coefficients u_i for the periodicity of a recurrent sequence defined by the rule $a_{n+k} = u_{k-1}a_{n+k-1} + \dots + u_0 a_0$ for $n = 0, 1, \dots$ and $u_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, k-1$, in the case of $k = 2, 3$.