

МАЦЕНКО В.Г.

## МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЗБОРУ УРОЖАЮ ДЛЯ ПОПУЛЯЦІЙ ІЗ НЕПЕРЕКРИВНИМИ ПОКОЛІННЯМИ

Розглянуто дискретну логістичну модель та модель Рікера зі збором урожаю. Для них знайдено стаціонарні та періодичні розв'язки, досліджено їх стійкості. З моделями проведено ряд числових експериментів.

*Ключові слова і фрази:* моделі збору врожаю, дискретна логістична модель, модель Рікера.

---

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

e-mail: [v.matsenko@chnu.edu.ua](mailto:v.matsenko@chnu.edu.ua)

### ВСТУП

Сучасні досягнення в екології стали можливими завдяки використанню методів математичного моделювання. Математичні моделі слугують основним інструментом розв'язання екологічних, еколого-економічних проблем. Вони дають можливість більш глибоко зрозуміти суть екологічних процесів, оцінити їх стійкість та здійснити прогноз розвитку екосистеми при різних зовнішніх впливах і способах управління. Найбільше математичні методи проникли в дослідження динаміки чисельності біологічних популяцій [1].

Більшість математичних моделей екологічних систем формулюється у вигляді диференціальних та різницевих рівнянь, які дозволяють вивчати динаміку процесів у режимі реального часу.

Підхід, що базується на апараті диференціальних рівнянь, застосовується для моделювання динаміки популяцій із перекривними поколіннями. Однак для багатьох біологічних популяцій послідовні покоління не перекриваються і ріст чисельності популяцій відбувається в дискретні моменти часу. Ця ситуація має місце для популяцій без довгих діапauз у життєвому циклі. До таких популяцій можна віднести багато видів комах. Їх дорослі особини живуть недовго, відкладають яйця і до моменту появи на світ нового покоління припиняють своє існування.

---

УДК 519.87:574.3

2010 *Mathematics Subject Classification:* 34D20, 34K06, 34K20.

Тому такі моделі пов'язують чисельність  $N_{t+1}$  у момент часу  $t+1$  із чисельністю в попередні моменти часу. Це приводить до розгляду різницевих рівнянь, які в простішому випадку мають вигляд

$$N_{t+1} = F(N_t), \quad N_t \in R^+, \quad F : R^+ \rightarrow R^+, \quad R^+ = [0, \infty), \quad (1)$$

де  $F$  – гладка дійсна функція дійсного аргументу.

Математична задача полягає в побудові відображення і знаходженні траєкторії нелінійних відображень при заданому  $N_0 > 0$ . З практичної точки зору, якщо відомий вигляд функції  $F(N_t)$ , то визначення чисельності наступних поколінь полягає в послідовному використанні формули (1), тобто шляхом ітерування.

В аналітичному вигляді, як правило, рівняння (1) не вдається розв'язати, проте можна знайти стаціонарні та періодичні розв'язки і дослідити їх на стійкість.

Стаціонарні розв'язки  $N^* = const$  є нерухомими точками відображення  $F$  і знаходяться з рівняння

$$N^* = F(N^*). \quad (2)$$

Лінеаризація рівняння (1) в околі рівноваги  $N^*$  має вигляд

$$x_{t+1} = \left. \frac{dF}{dN} \right|_{N^*} x_t.$$

Величину  $\lambda = \left. \frac{dF}{dN} \right|_{N^*}$  називають мультиплікатором нерухомої точки динамічної системи з дискретним часом. Він визначає характер стійкості розв'язку  $N^*$ . Якщо  $|\lambda| < 1$ , то  $N^*$  стійкий (асимптотично), якщо  $|\lambda| > 1$ , то – нестійкий. Окрім стаціонарних розв'язків, важливі ще періодичні розв'язки рівняння (1).

**Означення 1.** Розв'язок  $N_t$  називається періодичним із періодом  $T$  (із довжиною  $T$  або  $T$ -циклом), якщо  $N_{t+T} = N_t$  для всіх  $t = 0, 1, 2, \dots$  і  $N_{t+j} \neq N_t$  для  $j = 1, 2, \dots, T-1$ .

Особливу роль серед періодичних розв'язків відіграють розв'язки з періодами  $T = 2$  та  $T = 3$ , оскільки, за теоремою Шарковського, з їх існування можна одержати інформацію про існування періодичних розв'язків інших періодів [7]

Цикли довжиною  $T = 2$  існують, якщо система

$$N_2 = F(N_1), \quad N_1 = F(N_2),$$

має два різних додатних розв'язки:  $N_1^*$  і  $N_2^*$ .

Умова стійкості періодичного розв'язку з періодом  $T = 2$  має вигляд

$$\left| \left. \frac{dF}{dN} \right|_{N_1^*} \cdot \left. \frac{dF}{dN} \right|_{N_2^*} \right| < 1.$$

Для знаходження циклів довжиною 3 (для них виконується умова  $N_{t+3} = N_t$ ) маємо систему

$$N_3 = F(N_2), \quad N_2 = F(N_1), \quad N_1 = F(N_3).$$

Стійкість періодичного розв'язку  $N_1^*$ ,  $N_2^*$ ,  $N_3^*$  з періодом 3 визначається умовою

$$\left| \frac{dF}{dN} \Big|_{N_1^*} \cdot \frac{dF}{dN} \Big|_{N_2^*} \cdot \frac{dF}{dN} \Big|_{N_3^*} \right| < 1.$$

У цій роботі розглядаються дискретні моделі популяцій зі збором урожаю, оскільки у своїй діяльності людина використовує різні природні ресурси. При цьому важливо не знищити біологічну популяцію. Тому надзвичайно важливий екологічно обґрунтований підхід до раціонального використання відновлювального ресурсу.

Нехай з деякої популяції відловлюється певна кількість особин, при цьому вважаємо, що інтенсивність промислу не залежить від часу. В цьому випадку рівняння, яке описує зміну чисельності популяції, має вигляд

$$N_{t+1} = F(N_t) - C(N_t, \alpha),$$

де  $C(N_t, \alpha)$  – інтенсивність відлову особин із популяції, параметр  $\alpha$  характеризує цю інтенсивність.

Задача моделювання полягає в тому, щоб установити таку швидкість збору урожаю, яка буде підтримувати популяцію в стані приросту.

Розглянемо моделі збору урожаю в популяціях, динаміка чисельності яких описується дискретним логістичним рівнянням та рівнянням Рікера. Ці два приклади динамічних систем найчастіше використовуються на практиці [1].

Модель логістичного росту демонструє складну динаміку чисельності популяції і дозволяє добре апроксимувати динаміку багатьох біологічних процесів. Дослідженню дискретної логістичної моделі присвячено багато праць, наприклад, [2], [3], [4]. В них вивчаються питання існування стаціонарних станів, періодичних розв'язків та їх стійкість, а також виникнення хаотичних поведінок розв'язку.

Модель Рікера (представлена в 1954 році) вивчалась, зокрема, в працях [5], [6].

## 1 АНАЛІЗ ЛОГІСТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗІ ЗБОРОМ УРОЖАЮ

Дискретне логістичне рівняння постійного збору урожаю має вигляд

$$N_{t+1} = rN_t(1 - N_t) - c. \tag{3}$$

Для (3) точка рівноваги  $N = N^* = const$  шукається з рівняння

$$N = rN(1 - N) - c,$$

або

$$rN^2 - (r - 1)N + c = 0.$$

Звідки знаходимо

$$N_{1,2}^* = \frac{r - 1 \pm \sqrt{(r - 1)^2 - 4rc}}{2r}.$$

Для існування додатних точок спокою ставимо умови  $r > 1$  і  $(r - 1)^2 - 4rc > 0$ . Це те саме, що  $c < (r - 1)^2/4r$ .

Зі співвідношення  $\left| \frac{dF}{dN} \Big|_{N_{1,2}^*} \right| < 1$  знаходимо умови стійкості стаціонарних станів.

Маємо

$$\frac{dF}{dN} \Big|_{N_1^*} = r(1 - 2N_1^*) = 1 + \sqrt{(r - 1)^2 - 4rc} > 1,$$

тобто розв'язок  $N = N_1^*$  - нестійкий.

Для  $N = N_2^*$

$$\frac{dF}{dN} \Big|_{N_2^*} = r(1 - 2N_2^*) = 1 - \sqrt{(r - 1)^2 - 4rc}.$$

З умови стійкості  $\left| 1 - \sqrt{(r - 1)^2 - 4rc} \right| < 1$  одержуємо співвідношення  $r^2 - 2r - 4rc < 3$ .

Знайдемо значення  $N_1^*$ ,  $N_2^*$ , що складають цикл довжиною 2. Вони визначаються з умови  $N_{t+2} = N_t$ , тобто з рівняння

$$N = r [(rN - rN^2 - c) - (rN - rN^2 - c)^2] - c,$$

або те саме, що з рівняння

$$r^3 N^4 - 2r^3 N^3 + (r^3 + r^2 + 2r^2 c) N^2 + (1 - r^2 - 2r^2 c) N + rc + rc^2 + c = 0. \quad (4)$$

Оскільки знайдені значення для стаціонарних розв'язків задовольняють рівняння (4), вираз  $rN^2 - (r - 1)N + c$  є дільником лівої частини (4). Виконавши це ділення, одержуємо рівняння для знаходження  $N_1^*$ ,  $N_2^*$ , що складають цикл довжиною 2.

Маємо

$$r^2 N^2 - r(r + 1)N + (r + rc + 1) = 0.$$

Звідси

$$N_{1,2}^* = \frac{r + 1 \pm \sqrt{(r + 1)^2 - 4(r + rc + 1)}}{2r}.$$

Додатні  $N_{1,2}^*$  існують, якщо

$$(r + 1)^2 - 4(r + rc + 1) > 0,$$

або

$$r > 1 + 2c + \sqrt{(1 + 2c)^2 + 3}.$$

Стійкість періодичного розв'язку при  $T = 2$  досліджуємо шляхом перевірки нерівності

$$\left| \frac{dF}{dN} \Big|_{N_1^*} \cdot \frac{dF}{dN} \Big|_{N_2^*} \right| = r^2 |(1 - 2N_1^*)(1 - 2N_2^*)| < 1,$$

звідки одержуємо умову стійкості в параметрах  $r$ ,  $c$  у вигляді

$$|4 + 2r + 4rc - r^2| < 1$$

або

$$1 + 2c + \sqrt{(1 + 2c)^2 + 3} < r < 1 + 2c + \sqrt{(1 + 2c)^2 + 5}.$$

При  $c = 0$  маємо  $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ , що збігається з умовою стійкості періодичного розв'язку моделі без збору врожаю.

Для знаходження циклів довжиною 3 (умова  $N_{t+3} = N_t$ ) необхідно знайти розв'язки системи

$$N_t = rN_{t+2}(1 - N_{t+2}) - c,$$

$$N_{t+2} = rN_{t+1}(1 - N_{t+1}) - c,$$

$$N_{t+1} = rN_t(1 - N_t) - c.$$

Це аналогічне обчисленню коренів рівняння

$$N = r(-r(c + r(N - 1)N)(c + r(N - 1)N + 1) - c) \times \\ \times (r(c + r(N - 1)N)(c + r(N - 1)N + 1) + c + 1) - c.$$

Два корені цього рівняння

$$N_1^* = \frac{r - 1 + \sqrt{r^2 - 2r + 1 - 4rc}}{2r},$$

$$N_2^* = \frac{r - 1 - \sqrt{r^2 - 2r + 1 - 4rc}}{2r}$$

відомі і задають два стаціонарні стани рівняння (3).

Інші корені вдається знайти лише на комп'ютері.

З моделлю (3) були проведені числові експерименти.

При  $r = 2, c = 0, 1$  одержуються стаціонарні значення  $N_1^* = 0, 361803, N_2^* = 0, 138197$ , причому  $N_1^*$  стійкий,  $N_2^*$  нестійкий (рис. 1).

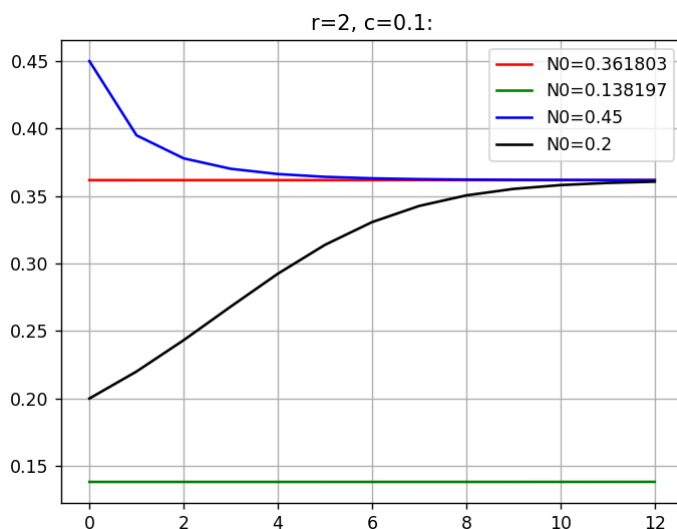


Рис. 1. Графіки стаціонарних станів при  $r = 2, c = 0, 1, N^* = 0, 361803$

При  $r = 3, 4, c = 0, 1$  існують два нестійких стаціонарних стани  $N_1^* = 0, 661414, N_2^* = 0, 044468$  і з'являється періодичний розв'язок із періодом 2 (рис. 2). Його складають числа  $N_1^* = 0, 740067$  та  $N_2^* = 0, 5540501$ . Причому цей розв'язок стійкий, оскільки  $r^2 |(1 - 2N_1^*)(1 - 2N_2^*)| = 0, 6 < 1$ .

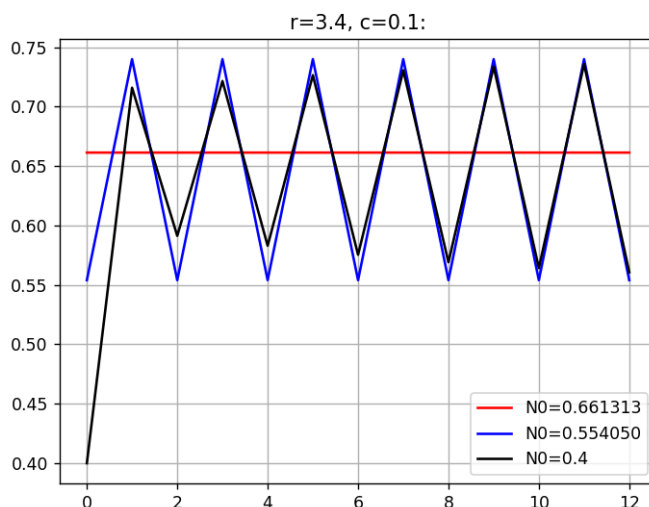


Рис. 2. Графік стійкого періодичного розв'язку з періодом  $T = 2$  при  $r = 3, 4, c = 0, 1$

При  $r = 4, c = 0, 0625$  існують два стаціонарних розв'язки:  $N_1^* = 0, 0214466, N_2^* = 0, 728554$ , причому і  $N_1^*$ , і  $N_2^*$  нестійкі. У цьому випадку, крім стаціонарних станів, існує ще періодичний розв'язок із періодом  $T = 3$ . Його складають три числа:  $N_1^* = 0, 174516, N_2^* = 0, 51374, N_3^* = 0, 936744$ .

Цей розв'язок нестійкий (рис. 3), оскільки

$$\left| \frac{dF}{dN} \Big|_{N_1^*} \cdot \frac{dF}{dN} \Big|_{N_2^*} \cdot \frac{dF}{dN} \Big|_{N_3^*} \right| = 1, 00003 > 1.$$

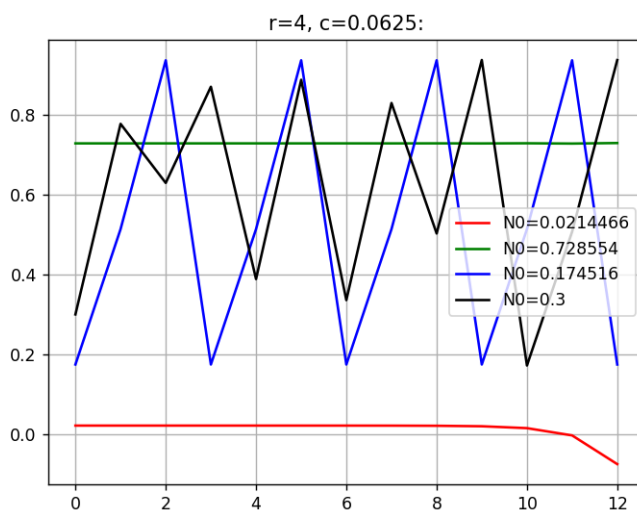


Рис. 3. Графік нестійкого періодичного розв'язку із періодом  $T = 3$  при  $r = 4, c = 0, 0625$

За теоремою Шарковського [7], для рівняння (3) з умови існування  $T$ -циклів при  $T = 3$  впливає існування періодичних розв'язків будь-якого періоду.

Зокрема, при  $r = 3,8$ ,  $c = 0,1$  знаходимо два нестійких стаціонарних стани  $N_1^* = 0,0376367$ ,  $N_2^* = 0,6992059$ , один нестійкий періодичний розв'язок із періодом 2 ( $N_1^* = 0,431164$ ,  $N_2^* = 0,831994$ ) і періодичний розв'язок з періодом  $T = 4$ , що визначається числами  $N_1^* = 0,385182$ ,  $N_2^* = 0,799904$ ,  $N_3^* = 0,508219$ ,  $N_4^* = 0,849745$  (рис. 4).

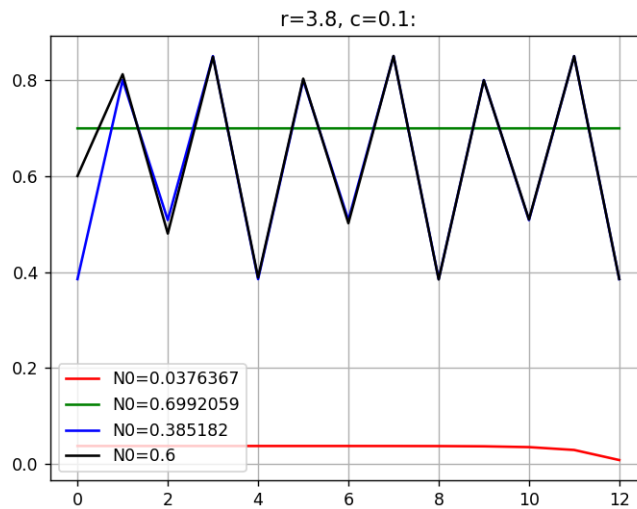


Рис. 4. Графік стійкого періодичного розв'язку з періодом  $T = 4$  при  $r = 3,8$ ,  $c = 0,1$

Цей розв'язок стійкий, оскільки

$$\left| \frac{dF}{dN} \Big|_{N_1^*} \cdot \frac{dF}{dN} \Big|_{N_2^*} \cdot \frac{dF}{dN} \Big|_{N_3^*} \cdot \frac{dF}{dN} \Big|_{N_4^*} \right| = 0,3302 < 1.$$

А при  $r = 4$ ,  $c = 0,1$ , крім двох нестійких стаціонарних розв'язків, одного нестійкого розв'язку з періодом  $T = 2$ , одержуємо ще нестійкий розв'язок із періодом  $T = 4$ . Його задають такі числові значення:  $N_1^* = 0,330399$ ,  $N_2^* = 0,784942$ ,  $N_3^* = 0,575233$ ,  $N_4^* = 0,87736$ .

## 2 МОДЕЛЬ РІКЕРА ЗІ ЗБОРОМ УРОЖАЮ

Модель Рікера зі збором постійного врожаю має вигляд

$$N_{t+1} = N_t \exp \left( r \left( 1 - \frac{N_t}{K} \right) \right) - c, \tag{5}$$

де  $N_t$  – чисельність особин у момент часу  $t$ ;  $r$  – коефіцієнт природного приросту;  $K$  – параметр ємності середовища;  $c$  – інтенсивність збору врожаю.

Стани рівноваги чисельності  $N^*$  в моделі (5) знаходяться з рівняння

$$\exp \left( r \left( 1 - \frac{N^*}{K} \right) \right) = 1 + \frac{c}{N^*},$$

яке можна розв'язати лише чисельно. Зокрема, при  $K = 10$ ,  $r = 1$  і різних значеннях  $c$  знайдено корені, наведені в табл. 1.

$c$	0,1	0,2	0,3	0,4
$N_1^*$	9,89949	9,79793	9,69526	9,59142
$N_2^*$	0,058742	0,118608	0,179653	0,24194

Причому стаціонарний розв'язок  $N_1^*$  – стійкий, а  $N_2^*$  – нестійкий, оскільки

$$\left| \frac{dF}{dN} \Big|_{N_1^*} \right| < 1, \quad \text{а} \quad \left| \frac{dF}{dN} \Big|_{N_2^*} \right| > 1,$$

де  $F(N) = N \exp \left( r \left( 1 - \frac{N}{K} \right) \right) - c$ .

Графіки розв'язків  $N_t$  рівняння (5) при  $K = 10$ ,  $r = 1$ ,  $c = 0,3$  подані на рис. 5.

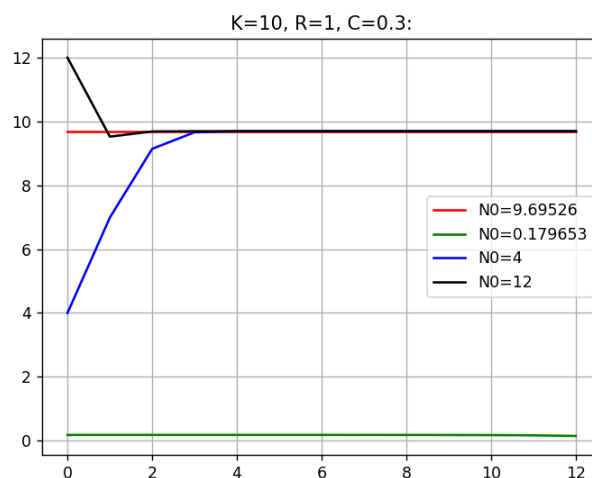


Рис. 5. Графіки стійкого та нестійкого стаціонарних станів рівняння (5)

Знайдемо періодичні розв'язки рівняння (5) із періодом  $T = 2$ .

З умови  $N_{t+2} = N_t$  і (5) маємо

$$N_t = N_t \exp \left[ r \left( 2 - \frac{N_t}{K} \left( 1 + \exp \left( r \left( 1 - \frac{N_t}{K} \right) \right) + \frac{c}{K} \right) \right) \right] - c \exp \left( r \left( 1 - \frac{N_t \exp \left( r \left( 1 - \frac{N_t}{K} \right) \right) - c}{K} \right) \right) - c. \quad (6)$$

Якщо це рівняння допускає два різних розв'язки  $N_1^*$  і  $N_2^*$ , відмінні від стаціонарних значень, то існує стаціонарний розв'язок із періодом 2.

Комп'ютерний аналіз рівняння (6) при  $K = 10$ ,  $r = 2,2$ ,  $c = 0,5$  показав існування такого періодичного розв'язку:  $N_1^* = 4,838006$ ,  $N_2^* = 14,561492$ .

Цей періодичний розв'язок стійкий, оскільки

$$\left| \frac{dF}{dN} \Big|_{N_1^*} \right| \cdot \left| \frac{dF}{dN} \Big|_{N_2^*} \right| < 1.$$

Крім періодичного розв'язку з  $T = 2$  існують і два стаціонарних стани  $N^* = 0,0632894$ ,  $N^* = 9,77321$ , але обидва вони нестійкі.

Графіки розв'язків (5) при  $K = 10$ ,  $r = 2,2$ ,  $c = 0,5$  зображені на рис. 6.



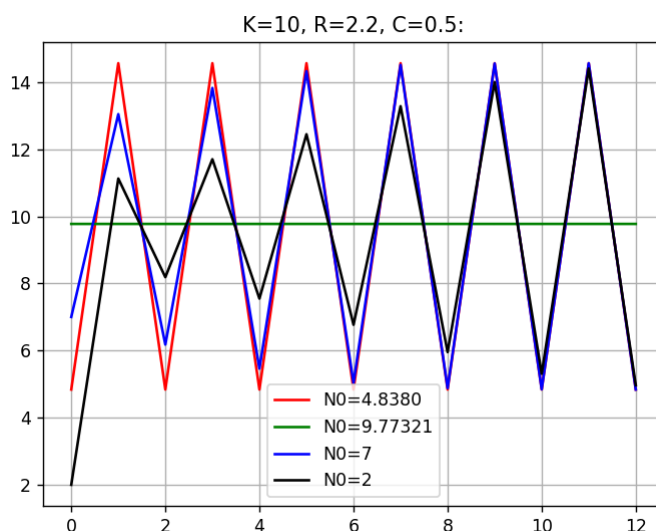


Рис. 6. Графік стійкого періодичного розв'язку з періодом  $T = 2$  для рівняння (5)

Натомість при  $r = 3$ ,  $K = 10$ ,  $c = 0,5$  існуючий періодичний розв'язок з періодом  $T = 2$  ( $N_1^* = 1,34045$ ,  $N_2^* = 17,50897$ ) нестійкий, оскільки

$$\left| \frac{dF}{dN} \Big|_{N_1^*} \cdot \frac{dF}{dN} \Big|_{N_2^*} \right| = 3,59 > 1.$$

Так же само нестійкі й стаціонарні розв'язки  $N^* = 0,0264173$  і  $N^* = 9,8346$ .  
Періодичні розв'язки з періодом  $T = 3$  знаходяться із системи

$$\begin{aligned} N_t &= N_{t+2} \exp \left( r \left( 1 - \frac{N_{t+2}}{K} \right) \right) - c, \\ N_{t+2} &= N_{t+1} \exp \left( r \left( 1 - \frac{N_{t+1}}{K} \right) \right) - c, \\ N_{t+1} &= N_t \exp \left( r \left( 1 - \frac{N_t}{K} \right) \right) - c. \end{aligned} \quad (7)$$

Якщо система допускає три різні розв'язки  $N_1^* = N_t$ ,  $N_2^* = N_{t+1}$ ,  $N_3^* = N_{t+2}$ , відмінні від стаціонарних станів, то існує періодичний розв'язок із періодом  $T = 3$ .

Числовий аналіз системи (7) при  $K = 10$ ,  $r = 3,2$ ,  $c = 0,4$  показав, що рівняння (5) має два періодичних розв'язки з періодом  $T = 3$ . Ці розв'язки задаються числами:  $N_1^* = 6,177487$ ,  $N_2^* = 20,591458$ ,  $N_3^* = 0,294620$  і  $N_1^* = 1,449938$ ,  $N_2^* = 21,965970$ ,  $N_3^* = 0,0773078$ .

Знаходячи добуток похідних правої частини (5) в цих точках, встановлюємо, що ці розв'язки з періодом 3 нестійкі.

При існуванні періодичних розв'язків з періодом  $T = 3$  згідно з теоремою Li Yorke [8] існують хаотичні розв'язки.

Стаціонарні розв'язки, які існують при цьому, теж нестійкі. Графіки розв'язків рівняння (5) при  $K = 10$ ,  $r = 3,2$ ,  $c = 0,4$  наведені на рис. 7, а хаотичний розв'язок при  $r = 3$  — на рис. 8.

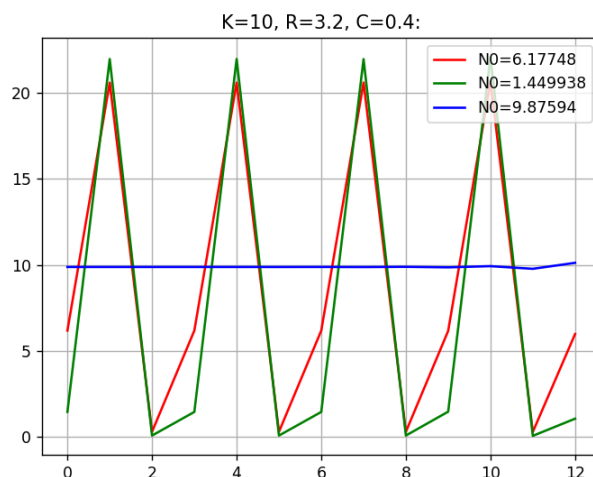


Рис. 7. Періодичні розв'язки рівняння (5) з періодом  $T = 3$  і стаціонарний розв'язок

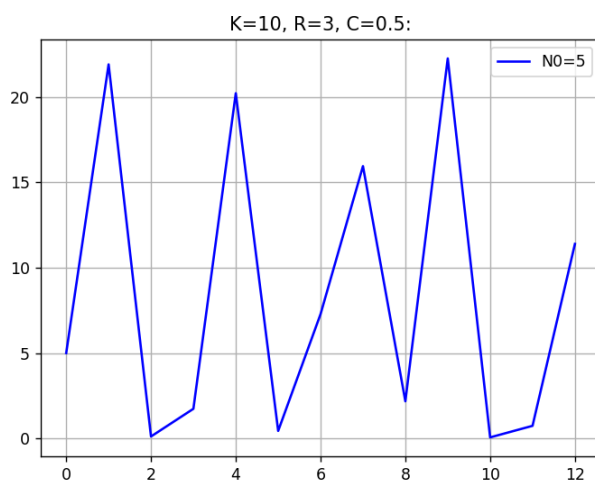


Рис. 8. Хаотичний розв'язок рівняння (5)

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Маценко В. Г. Математичне моделювання екологічних процесів : навч. посібник. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т імені Юрія Федьковича, 2019. 376 с.
- [2] Шарковський А. Н., Майстренко Ю. Н., Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и их применения. Киев : Наук. думка, 1986. 280 с.
- [3] Ben G. Yu., Sleeman B.D. *On the discrete logistic model in biology*. *Applicate Analysis*, 1989. **33** (3-4). Pp. 215-231.
- [4] Radwan G. R. *On some generalized discrete logistic maps*. *Journal of Advanced Research*, 2013. **4**. Pp. 163-171.
- [5] Greenwell R. *The Ricker salmon model*. *UMAP J*. 1984. **5**. Pp. 337-359.
- [6] Sacker R. G. *A note on periodic Ricker maps*. *J. Difference equation Appl.* 2007. **13**. Pp. 89-92.
- [7] Шарковський А. Н. *Существование циклов непрерывного преобразования прямой в себя*. *Украинский математический журнал*, 1964. **XVI** (1). С. 61-71.
- [8] Li T., Yorke I. *Period three implies chaos*. *The American Mathematical Monthly*, 1975. **82** (10). Pp. 985-992.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Matsenko V. G. *Mathematical modeling of ecological processes : study guide*. Chernivtsi : Yury Fedkovich Chernivtsi National University, 2019. 376 p. (in Ukrainian)
- [2] Sharkovskii A. N., Maistrenko Y. N., Romanenko E. Yu. *Difference equations and their applications*. Kyiv : Nauk. dumka, 1986. 280 p. (in Russian)
- [3] Ben G. Yu., Sleeman B.D. *On the discrete logistic model in biology*. *Applicate Analysis*, 1989. **33** (3-4). Pp. 215-231.
- [4] Radwan G. R. *On some generalized discrete logistic maps*. *Journal of Advanced Research*, 2013. **4**. Pp. 163-171.
- [5] Greenwell R. *The Ricker salmon model*. *UMAP J*. 1984. **5**. Pp. 337-359.
- [6] Sacker R. G. *A note on periodic Ricker maps*. *J. Difference equation Appl.* 2007. **13**. Pp. 89-92.
- [7] Sharkovskii A. N. *Coexistence of cycles of continuous transformation straight into itself*. *Ukrainian Mathematical Journal*, 1964. **XVI** (1). P. 61-71. (in Russian)
- [8] Li T., Yorke I. *Period three implies chaos*. *The American Mathematical Monthly*, 1975. **82** (10). Pp. 985-992.

*Надійшло 15.11.2022*

---

Matsenko V.G. *Modeling harvesting processes for populations with non-overlapping generations*, *Bukovinian Math. Journal*. **10**, 2 (2022), 165–175.

Difference equations are used in order to model the dynamics of populations with non-overlapping generations, since the growth of such populations occurs only at discrete points in time.

In the simplest case such equations have the form  $N_{t+1} = F(N_t)$ , where  $N_t > 0$  is the population size at a moment of time  $t$ , and  $F$  is a smooth function.

Among such equations the discrete logistic equation and Ricker's equation are most often used in practice.

In the given paper, these equations are considered with taking into account an effect of harvesting, that is, the equations of the form below are studied  $N_{t+1} = rN_t(1 - N_t) - c$  and  $N_{t+1} = N_t \exp(r(1 - N_t/K)) - c$ , where the parameters  $r, K > 0, c > 0$  are harvesting intensity.

Positive equilibrium points and conditions for their stability for these equations were found. These kinds of states are often realized in nature.

For practice, periodic solutions are also important, especially with periods  $T = 2(N_{t+2} = N_t)$  and  $T = 3(N_{t+3} = N_t)$ , since, with their existence, by Sharkovskii's theorem, one can do conclusions about the existence of periodic solutions of other periods.

For the discrete logistic equation in analytical form, the values that make up the periodic solution with period  $T = 2$  were found. We used numerical methods in order to find solutions with period  $T = 3$ . For Ricker's model, the question of the existence of periodic solutions can be investigated by computer analysis only.

In the paper, a number of computer experiments were conducted in which periodic solutions were found and their stability was studied. For Ricker's model with harvesting, chaotic solutions were also found.

As we can see, the study of difference equations gives many unexpected results.