Михайлюк В.В. [1,2]

# Залежність від зліченної кількості координат нарізно неперервних функцій трьох компактних змінних

Одержано необхідні і достатні умови залежності від зліченної кількості координат для функцій трьох змінних, кожна з яких є добутком компактних просторів Кемпістого.

*Ключові слова і фрази:* нарізно неперервні функції, залежність від зліченної кількості координат, простори Кемпістого, компактні простори.

[1] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна;
[2] Університет Яна Кохановського в Кельцах, Польща
e-mail: *v.mykhaylyuk@chnu.edu.ua*

## 1 Вступ

Залежність неперервних відображень на добутках від певної кількості координат інтенсивно вивчались математиками середини XX століття (І. Мібу, С. Мазур, Г. Корсон і Дж. Ізбелл, К. Росс і А. Стоун, Р. Енґелькінґ, А. Міщенко, Н. Нобл і М. Ульмер) і стала зручним інструментом для досліджень властивостей неперервних відображень. Найбільш загальні результати у цьому напрямку були отримані у роботі [5], де, зокрема, були одержані необхідні і достатні умови залежності нарізно неперервних функцій на добутках від певної кількості координат.

Аналогічні питання залежності для нарізно неперервних відображень впродовж кількох десятиліть залишались поза увагою дослідників питань теорії нарізно неперервних відображень. Починаючи з роботи [8] залежність нарізно неперервних функцій від певної кількості координат стала предметом досліджень у Чернівецькому університеті і для функцій двох змінних найзагальніші результати були одержані в [10]. Слід зауважити, що, зазвичай у багатьох задачах теорії нарізно неперервних відображень перехід від двох змінних до трьох змінних містить значні труднощі. Залежність від певної кількості координат нарізно неперервних функцій трьох і більше змінних вивчалась в роботі [7], де були отримані необхідні і достатні умови лише у випадку метризовності всіх множників, що залишає великий простір для подальших досліджень.

УДК 517.51
2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C08, 54C30, 54D30.

У даній роботі ми вивчатимемо залежність від зліченної кількості координат нарізно неперервних функцій багатьох змінних, які є добутками компактних просторів, і одержимо необхідні і достатні умови такої залежності для функцій трьох змінних, кожна з яких є добутком компактних просторів Кемпістого.

## 2 Необхідні умови залежності

Спочатку означимо деякі поняття і введемо позначення.

Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я множин, $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$, $Y$ – множина і $f : X \to Y$ – відображення. Казатимемо, що відображення $f$ *зосереджене на множині* $T \subseteq S$, якщо $f(x') = f(x'')$, як тільки $x', x'' \in X$ і $x'|_T = x''|_T$. Якщо множина $T$ – не більш, ніж зліченна, то кажуть, що $f$ *залежить від зліченної кількості координат*.

Нехай $X_1, \dots, X_{n-1}, Y$ – множини, $(P_s)_{s\in S}$ – сім'я множин, $X_n = \prod\limits_{s\in S} P_s$ і $f : X_1 \times \dots \times X_n \to Y$ – відображення. Кажемо, що відображення $f$ *зосереджене на множині* $T \subseteq S$ *відносно $n$-тої змінної*, якщо

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x'_n) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, x''_n)$$

для довільних $x_1 \in X_1, \dots, x_{n-1} \in X_{n-1}$ і $x'_n, x''_n \in X_n$ з $x'_n|_T = x''_n|_T$. Якщо множина $T$ – не більш, ніж зліченна, то кажемо, що $f$ *залежить від зліченної кількості координат відносно $n$-тої змінної*. Аналогічно вводиться поняття залежності від зліченної кількості координат відносно $i$-тої змінної, де $1 \le i \le n-1$.

Сім'ю множин $(A_s : s \in S)$ називатимемо *скінченною*, якщо множина

$$\{s \in S : A_s \neq \varnothing\}$$

є скінченною.

Для довільних підмножини $A$ добутку $\prod\limits_{k=1}^{n} X_k$, індекса $i \in \{1, \dots, n\}$ і точки

$$p = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^{i-1} X_k \times \prod_{k=i+1}^{n} X_k$$

покладемо

$$A_p^{(i)} = \{x \in X_i : (x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \in A\}.$$

Сім'ю множин $(A_s : s \in S)$ в добутку $\prod\limits_{k=1}^{n} X_k$ топологічних просторів $X_k$ називатимемо *(локально) скінченною відносно $i$-тої змінної*, якщо для довільної точки

$$p = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^{i-1} X_k \times \prod_{k=i+1}^{n} X_k$$

сім'я $(B_s : s \in S)$ множин $B_s = (A_s)_p^{(i)}$ є (локально) скінченною в просторі $X_i$. Сім'ю $(A_s : s \in S)$ в добутку $\prod\limits_{k=1}^{n} X_k$, яка є (локально) скінченною відносно кожної змінної називатимемо *нарізно (локально) скінченною*. Зрозуміло, що кожна нарізно скінченна сім'я множин є нарізно локально скінченною.

Для топологічного простору $X$ і функції $f : X \to \mathbb{R}$ через $\operatorname{supp} f$ ми позначаємо множину

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\},$$

яка називається *носієм* функції $f$.

Для базисної відкритої множини $U = \prod\limits_{s\in S} U_s$ в топологічному добутку $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ через $R(U)$ ми позначаємо скінченну множину $\{s \in S : U_s \neq X_s\}$. Далі, якщо $B \subseteq S$, то через $U|_B$ позначатимемо множину $\prod\limits_{s\in B} U_s$ в добутку $\prod\limits_{s\in B} X_s$.

Топологічний простір $X$ називатимемо *нетривіальним*, якщо $|X| \geq 2$.

**Твердження 1.** *Нехай $X$ – добуток сім'ї $(X_s : s \in S)$ цілком регулярних просторів $X_s$, $t \in S$, простір $X_t$ – нетривіальний і $U$ – непорожня базисна відкрита множина в просторі $X$. Тоді і снує неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$ така, що $\operatorname{supp} f \subseteq U$, функція $f$ зосереджена на множині $R(U) \cup \{t\}$ і $f$ не зосереджена на множині $S \setminus \{t\}$.*

*Доведення.* Візьмемо довільну неперервну функцію $g : X \to \mathbb{R}$ таку, що $\varnothing \neq \operatorname{supp} g \subseteq U$ і $f$ зосереджена на множині $R(U)$. Якщо $g$ не зосереджена на множині $S \setminus \{t\}$, то покладемо $f = g$.

Нехай функція $g$ зосереджена на множині $S \setminus \{t\}$. Візьмемо довільну неперервну несталу функцію $\varphi : X_t \to \mathbb{R}$ і розглянемо неперервну функцію $f : X \to \mathbb{R}$,

$$f((x_s)_{s\in S}) = g((x_s)_{s\in S}) \cdot \varphi(x_t).$$

Зрозуміло, що $f$ зосереджена на множині $R(U) \cup \{t\}$. Покажемо, що $f$ не зосереджена на множині $S \setminus \{t\}$. Візьмемо довільну точку $x = (x_s)_{s\in S} \in X$ таку, що $g(x) \neq 0$, а також виберемо точки $a, b \in X_t$ такі, що $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Розглянемо точки $y, z \in X$, які означаються наступним чином:

$$y(s) = \begin{cases} x(s), \text{ якщо } & s \neq t; \\ a, \text{ якщо } & s = t, \end{cases} \qquad \text{і} \qquad z(s) = \begin{cases} x(s), \text{ якщо } & s \neq t; \\ b, \text{ якщо } & s = t. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $y|_{S\setminus\{t\}} = x|_{S\setminus\{t\}} = z|_{S\setminus\{t\}}$ і, зокрема, $g(y) = g(z) = g(x) \neq 0$. Крім того,

$$f(y) - f(z) = g(x)(\varphi(a) - \varphi(b)) \neq 0.$$

□

На завершальному етапі побудов ми будемо використовувати наступний допоміжний факт.

**Твердження 2.** *Нехай $(X_k)_{k=1}^n$ – сім'я топологічних просторів $X_k$,*

$$(f_{1,s} : s \in S),\ \ldots\ , (f_{n,s} : s \in S)$$

*– сім'ї неперервних функцій $f_{k,s} : X_k \to \mathbb{R}$ такі, що сім'я $(U_s : s \in S)$ множин*

$$U_s = \operatorname{supp} f_{1,s} \times \cdots \times \operatorname{supp} f_{n,s}$$

*є нарізно локально скінченною в просторі $X = \prod\limits_{k=1}^{n} X_k$. Тоді функція $f : \prod\limits_{k=1}^{n} X_k \to \mathbb{R}$, означена формулою*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s\in S} \prod_{k=1}^{n} f_{k,s}(x_k),$$

*є нарізно неперервною.*

*Доведення.* Зафіксуємо індекс $i \in \{1, \ldots, n\}$ і точку

$$p = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \prod_{k=1}^{i-1} X_k \times \prod_{k=i+1}^{n} X_k.$$

Оскільки сім'я $(V_s : s \in S)$ множин $V_s = (U_s)_p^{(i)}$ є локально скінченною в просторі $X_i$, то функція $g : X_i \to \mathbb{R}$,

$$g(t) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

є непереорвною. Отже, функція $f$ є неперервною відносно $i$-тої змінної. □

Нам буде потрібний наступний допоміжний результат, який традиційно використовується при дослідженні залежності відображень від зліченної кількості координат (дивись [1, с. 185], [2, лема VII] і [8, лема 10]).

**Твердження 3** (Лема Шаніна)**.** *Нехай $I$ – незліченна множина і $(A_i : i \in I)$ – сім'я скінченних множин. Тоді існують скінченна множина $B$ і незліченна множина $J \subseteq I$ такі, що $A_i \cap A_j = B$ для довільних різних $i, j \in J$.*

Необхідні умови залежності нарізно неперервних функцій від зліченної кількості координат дає наступний результат.

**Теорема 1.** *Нехай $X_1, \ldots, X_{n-1}$ – цілком регулярні простори, $X_n$ – добуток сім'ї $(Y_t : t \in T)$ цілком регулярних нетривіальних просторів $Y_t$, множина $T$ – незліченна і $(G_i : i \in I)$ – незліченна нарізно локально скінченна сім'я відкритих непорожніх множин $G_i \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$. Тоді існує нарізно неперервна функція $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R}$, яка не залежить від зліченної кількості координат відносно $n$-тої змінної.*

*Доведення.* Для кожного $i \in I$ виберемо функціонально відкриті непорожні множини $U_{1,i}, \ldots, U_{n-1,i}$ в цілком регулярних просторах $X_1, \ldots, X_{n-1}$ відповідно, а також базисну відкриту множину $U_{n,i}$ в просторі $X_n$ так, що

$$U_{1,i} \times \cdots \times U_{n,i} \subseteq G_i.$$

До сім'ї $(A_i : i \in I)$ скінченних множин $A_i = R(U_{n,i})$ застосуємо твердження 3 і знайдемо номер $n \in \mathbb{N}$, скінченну множину $B \subseteq T$ і множину $J \subseteq I$ потужності $\aleph_1$ такі, що всі множини $A_i$ є $n$-елементними і $A_i \cap A_j = B$ для довільних різних $i, j \in J$.

Зауважимо, що існує сім'я $(t_j : j \in J)$ різних індексів $t_j \in T \setminus B$ така, що

$$(A_i \cup \{t_i\}) \cap (A_j \cup \{t_j\}) = B$$

для довільних різних $i, j \in J$. Справді, якщо $|B| < n$, то $A_j \setminus B \neq \varnothing$ і достатньо взяти довільну точку $t_j \in A_j \setminus B$ для кожного $j \in J$. Якщо ж $|B| = n$, тобто $A_j = B$ для кожного $j \in J$, то достатньо вибрати довільну сім'ю $(t_j : j \in J)$ різних індексів $t_j \in T \setminus B$.

Покладемо $S = \{t_j : j \in J\}$. Крім того, для кожного $s \in S$ позначимо через $j_s$ індекс $j \in J$ такий, що $s = t_j$, і покладемо $B_s = A_{j_s} \cup \{s\}$ і $V_{k,s} = U_{k,j_s}$ для всіх $k = 1, \dots, n$.

Нехай

$$(f_{1,s} : s \in S),\ \dots\ , (f_{n-1,s} : s \in S)$$

– сім'ї неперервних функцій $f_{k,s} : X_k \to \mathbb{R}$ такі, що $\operatorname{supp} f_{k,s} = V_{k,s}$ для довільних $k \leq n-1$ і $s \in S$. Крім того, з допомогою твердження 1 виберемо сім'ю $(f_{n,s} : s \in S)$ неперервних функцій $f_{n,s} : X_n \to \mathbb{R}$ такі, що $\operatorname{supp} f_{n,s} = V_{n,s}$, функція $f_{n,s}$ зосереджена на множині $B_s$ і не зосереджена на множині $T \setminus \{s\}$ для кожного $s \in S$.

Розглянемо функцію $f : \prod\limits_{k=1}^{n} X_k \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{s \in S} \prod_{k=1}^{n} f_{k,s}(x_k),$$

яка за твердженням 2 є нарізно неперервною.

Залишилось довести, що функція $f$ не залежить від зліченної кількості координат відносно $n$-тої змінної. Нехай $\tilde{T}$ – довільна множина, на якій зосереджена функція $f$ відносно $n$-тої змінної. Достатньо показати, що $S \subseteq \tilde{T}$. Зафіксуємо $s \in S$ і візьмемо довільні точки

$$x_1 \in V_{1,s},\ \dots\ , x_{n-1} \in V_{n-1,s}.$$

Крім того, виберемо точки $y, z \in X_n$ такі, що $y|_{T \setminus \{s\}} = z|_{T \setminus \{s\}}$ і $f_{n,s}(y) \neq f_{n,s}(z)$. Зауважимо, що $f_{n,t}(y) = f_{n,t}(z)$ для кожного $t \in S \setminus \{s\}$, адже кожна функція $f_{n,t}$ зосереджена на множині $B_t$, яка не містить $s$. Тепер маємо

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, y) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, z) = \sum_{t \in S} \left( \prod_{k=1}^{n-1} f_{k,t}(x_k) \times (f_{n,t}(y) - f_{n,t}(z)) \right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n-1} f_{k,s}(x_k) \times (f_{n,s}(y) - f_{n,s}(z)) \neq 0.$$

Отже, $\tilde{T} \not\subseteq S \setminus \{s\}$, тобто $s \in \tilde{T}$. $\square$

## 3 Достатні умови залежності

Наступний факт легко випливає з теореми Тихонова про компактність добутку компактних просторів.

**Твердження 4.** *Нехай* $(X_s)_{s\in S}$ *– сім'я компактних просторів,* $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$, $f : X \to \mathbb{R}$ *і* $\varepsilon > 0$. *Тоді існує скінченна множина* $T \subseteq S$ *така, що* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ *для довільних* $x, y \in X$ *з* $x|_T = y|_T$.

Наступне твердження відіграє важливу роль при переході від відображень трьох змінних до відображень двох змінних.

**Твердження 5.** *Нехай* $X, Y$ *– компактні простори,* $A \subseteq X\times Y$ *– всюди щільна множина,* $Z$ *– добуток сім'ї* $(Z_t : t \in T)$ *топологічних просторів* $Z_t$ *і* $f : X \times Y \times Z \to \mathbb{R}$ *– нарізно неперервна функція така, що звуження* $g = f|_{A\times Z}$ *зосереджене на множині* $S \subseteq T$ *відносно змінної* $z$. *Тоді функція* $f$ *також зосереджена на множині* $S$ *відносно змінної* $z$.

*Доведення.* Нехай $u, v \in Z$ – такі, що $u|_S = v|_S$. Оскільки функція $g$ зосереджена на множині $S$, то $g(a, u) = g(a, v)$ для кожного $a \in A$, тобто нарізно неперервні функції $f_u : X \times Y \to \mathbb{R}$, $f_u(x, y) = f(x, y, u)$, і $f_v : X \times Y \to \mathbb{R}$, $f_v(x, y) = f(x, y, v)$, збігаються на всюди щільній множині $A$. Тому згідно з [6, наслідок 4], $f_u = f_v$, тобто $f(x, y, u) = f(x, y, v)$ для всіх $x \in X$ і $y \in Y$. □

Топологічний простір $Y$ називається *простором Кемпістого*, якщо для довільного берівського простору $X$ і кожної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, яка квазінеперервна відносно першої змінної і неперервна відносно другої змінної, існує всюди щільна $G_\delta$-множина $A$ в просторі $X$ така, що функція $f$ сукупно неперервна в кожній точці множини $A \times Y$. Зауважимо, в [3] було показано, що довільний компакт Валдівіа є простором Кемпістого, і що добуток довільної сім'ї компактних просторів Кемпістого також є простором Кемпістого.

Наступна теорема займає центральне місце у даному пункті і дає достатні умови залежності для нарізно неперервних функцій трьох змінних.

**Теорема 2.** *Нехай* $X, Y$ *– компактні простори,* $Z$ *– добуток сім'ї* $(Z_t : t \in T)$ *компактних просторів Кемпістого* $Z_t$ *такі, що кожна нарізно скінченна сім'я відкритих непорожніх множин в добутку* $X \times Y \times Z$ *є не більш, ніж зліченною. Тоді кожна нарізно неперервна функція* $f : X \times Y \times Z \to \mathbb{R}$ *залежить від зліченної кількості координат відносно змінної* $z$.

*Доведення.* Нехай $f : X \times Y \times Z \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Зауважимо, що з теореми Наміоки [4] випливає, що кожна нарізно неперервна функція на добутку $X\times Y$ є квазінеперервною на $P = X\times Y$. Тому функція $g : P\times Z \to \mathbb{R}$, $g((x, y), z) = f(x, y, z)$, є квазінеперервною відносно першої змінної і неперервною відносно другої змінної. Крім того, згідно з [3, теорема 4.6], простір $Z$ є простором Кемпістого. Тому існує всюди щільна $G_\delta$-множина $A$ в просторі $P$ така, що функція $g$, а отже, і функція $f$, є сукупно неперервними в кожній точці множини $A \times Z$. Тепер з твердження 5 випливає, що достатньо показати, що функція $h = g|_{A\times Z}$ залежить від зліченної кількості координат відносно змінної $z$.

Міркуватимемо від супротивного. Припустимо, що неперервна функція $h$ не залежить від зліченної кількості координат відносно змінної $z$. Тоді згідно з [9, наслідок], множина

$$\tilde{T} = \{t \in T : (\exists a_t \in A)(\exists u_t, v_t \in Z)(u_t|_{T\setminus\{t\}} = v_t|_{T\setminus\{t\}} \text{ і } h(a_t, u_t) \neq h(a_t, v_t)\}$$

є незліченною. Тому існує $\varepsilon > 0$ таке, що множина

$$S = \{t \in \tilde{T} : |h(a_t, u_t) - (a_t, v_t)| > 4\varepsilon\}$$

є незліченною. Для кожного $s \in S$, використовуючи сукупну неперервність функції $f$ в точках $(x_s, y_s, u_s)$ і $(x_s, y_s, v_s)$, де $(x_s, y_s) = a_s$, виберемо відкриті околи $G_s$ і $H_s$ точок $x_s$ і $y_s$ в просторах $X$ і $Y$ відповідно, а також базисні відкриті околи

$$U_s = \prod_{t \in T} U_t^{(s)} \qquad \text{і} \qquad V_s = \prod_{t \in T} V_t^{(s)}$$

точок $u_s$ і $v_s$ відповідно такі, що

$$R(U_s) = R(V_s), \qquad U_t^{(s)} = V_t^{(s)}$$

для кожного $t \neq s$,

$$|f(x, y, u) - f(x, y, v)| > 2\varepsilon$$

для довільних $x \in G_s$, $y \in H_s$, $u \in U_s$ і $v \in V_s$.

До сім'ї $(R_s : s \in S)$ скінченних множин $R_s = R(U_s)$ застосуємо твердження 3 і знайдемо скінченну множину $B \subseteq T$ і незліченну множину $S_0 \subseteq S$ такі, що $R_s \cap R_t = B$ для довільних різних $s, t \in S_0$. Для одержання потрібної нам суперечності залишилось показати, що сім'я $(W_s : s \in S_0)$ відкритих непорожніх множин $W_s = G_s \times H_s \times U_s$ є нарізно скінченною в $X \times Y \times Z$.

Спочатку покажемо, що сім'я $(W_s : s \in S_0)$ є скінченною відносно змінної $z$. Зафіксуємо точку $p = (x, y) \in X \times Y$ і покладемо

$$S_p = \{s \in S_0 : p \in G_s \times H_s\}.$$

До неперервної функції $f_p : Z \to \mathbb{R}$, $f_p(z) = f(x, y, z)$, застосуємо твердження 4 і знайдемо скінченну множину $T_p \subseteq T$ таку, що

$$|f_p(u) - f_p(v)| < \varepsilon$$

для довільних $u, v \in Z$ з $u|_{T_p} = v|_{T_p}$. Оскільки

$$|f(x, y, u_s) - f(x, y, v_s)| > 2\varepsilon$$

і $u_s|_{T\setminus\{s\}} = v_s|_{T\setminus\{s\}}$ для кожного $s \in S_p$, то $S_p \subseteq T_p$, і тому, множина $S_p$ – скінченна.

Тепер покажемо, що сім'я $(W_s : s \in S_0)$ є скінченною відносно змінної $x$. Зафіксуємо точку $q = (y, u) \in Y \times Z$ і покладемо

$$S_q = \{s \in S_0 : q \in H_s \times U_s\}.$$

Припустимо, що множина $S_q$ нескінченна. Тоді сім'я $(x_s : s \in S_q)$ у компактному просторі $X$ має хоча б одну точку накопичення $\tilde{x}$, тобто точку, кожний окіл якої, містить нескінченну кількість елементів цієї сім'ї. Покладемо $\tilde{p} = (\tilde{x}, y)$ і до неперервної функції $f_{\tilde{p}} : Z \to \mathbb{R}$, $f_{\tilde{p}}(z) = f(\tilde{x}, y, z)$, застосуємо твердження 4 і знайдемо скінченну множину $T_{\tilde{p}} \subseteq T$ таку, що

$$|f_{\tilde{p}}(u) - f_{\tilde{p}}(v)| < \varepsilon$$

для довільного $v \in Z$ з $u|_{T_{\tilde{p}}} = v|_{T_{\tilde{p}}}$. Позначимо $T_0 = S_q \setminus (B \cup T_{\tilde{p}})$ і зауважимо, що $\tilde{x}$ є точкою накопичення сім'ї $(x_s : s \in T_0)$, адже множина $B \cup T_{\tilde{p}}$ – скінченна.

Розглянемо точку $\tilde{v} \in Z$, яка означається наступним чином:

$$\tilde{v}(t) = \begin{cases} v_t(t), \text{ якщо } & t \in T_0; \\ u(t), \text{ якщо } & t \in T \setminus T_0. \end{cases}$$

Зауважимо, що $u|_{T_{\tilde{p}}} = \tilde{v}|_{T_{\tilde{p}}}$ і тому,

$$|f(\tilde{x}, y, u) - f(\tilde{x}, y, \tilde{v})| = |f_{\tilde{p}}(u) - f_{\tilde{p}}(\tilde{v})| < \varepsilon.$$

Зафіксуємо $s \in T_0$ і переконаймося, що $\tilde{v} \in V_s$. Для цього достатньо перевірити, що $\tilde{v}(t) \in V_t^{(s)}$ для кожного $t \in R(V_s) = R(U_s) = R_s$. Нехай $t \in R(V_s) \setminus T_0$. Оскільки $u \in U_s$ і $U_t^{(s)} = V_t^{(s)}$, адже $t \neq s$, то

$$\tilde{v}(t) = u(t) \in U_t^{(s)} = V_t^{(s)}.$$

Тепер нехай $t \in R(V_s) \cap T_0$. Зауважимо, що $U_t^{(t)} \neq V_t^{(t)}$ і тому, $t \in R(V_t)$. Отже,

$$t \in R(V_s) \cap R(V_t) \cap T_0.$$

Тоді $t = s$, адже інакше при $t \neq s$ маємо, що

$$R(V_s) \cap R(V_t) \cap T_0 = B \cap T_0 = \varnothing.$$

Таким чином,

$$\tilde{v}(t) = \tilde{v}(s) = v_s(s) \in V_s^{(s)} = V_t^{(s)}.$$

Отже, $\tilde{v} \in V_s$ для кожного $s \in T_0$. Крім того, $y \in H_s$ і $u \in U_s$, і тому,

$$|f(x_s, y, u) - f(x_s, y, \tilde{v})| > 2\varepsilon$$

для кожного $s \in T_0$. Оскільки точка $\tilde{x}$ є точкою накопичення сім'ї $(x_s : s \in T_0)$ і функція $f$ є неперервною відносно змінної $x$, то

$$|f(\tilde{x}, y, u) - f(\tilde{x}, y, \tilde{v})| \geq 2\varepsilon,$$

що дає нам суперечність.

Аналогічно доводиться, що сім'я $(W_s : s \in S_0)$ є скінченною відносно змінної $y$. $\square$

Тепер з теорем 1 і 2 негайно випливає наступний результат.

**Теорема 3.** *Нехай $X$, $Y$ і $Z$ – добутки сімей $(X_s : s \in S)$, $(Y_t : t \in T)$ і $(Z_r : r \in R)$ нетривіальних гаусдорфових компактних просторів Кемпістого $X_s$, $Y_t$ і $Z_r$ такі, що множина $S \cup T \cup R$ є незліченною. Тоді наступні умови є рівносильними:*

$(i)$ *кожна нарізно скінченна сім'я відкритих непорожніх множин в добутку $X \times Y \times Z$ є не більш, ніж зліченною;*

$(ii)$ *кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \times Z \to \mathbb{R}$ залежить від зліченної кількості координат.*

У зв'язку з цією теоремою природно виникає наступне питання.

**Питання 1.** *Нехай $X$, $Y$ і $Z$ – добутки сімей $(X_s : s \in S)$, $(Y_t : t \in T)$ і $(Z_r : r \in R)$ нетривіальних гаусдорфових компактних просторів $X_s$, $Y_t$ і $Z_r$ такі, що кожна нарізно скінченна сім'я відкритих непорожніх множин в добутку $X \times Y \times Z$ є не більш, ніж зліченною. Чи обов'язково кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \times Z \to \mathbb{R}$ залежить від зліченної кількості координат?*

## Список літератури


1. Engelking R. *General Topology*, Revised and completed edition, Heldermann Verlag, Berlin (1989).

2. Mazur S. *On continuous mappings on Cartesian products*, Fund. Math. **39** (1952) 229-238.

3. Mykhaylyuk V.V. *Namioka spaces and topological games*, Bull. Austral. Math. Soc. **73** (2006) 263-272.

4. Namioka I. *Separate continuity and joint continuity*, Pacif. J. Math. **51** (2) (1974) 515-531.

5. Noble N., Ulmer M. *Factoring functions on Cartesian products*, Trans. Amer. Math. Soc. **163** (1972) 329–339.

6. Karlova O., Mykhaylyuk V. *A generalization of Sierpiński theorem on unique determining of a separately continuous function*, Bukoviniam Math. Journal **9** (1) (2021) 250-263.

7. Maslyuchenko V., Mykhaylyuk V. *Separately continuous functions of many variables on product spaces which are products of metrizable multipliers*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **1** (2004) 77-84 (in Ukrainian).

8. Maslyuchenko V., Mykhaylyuk V., Sobchuk O. *Inverse problem of theory of separately continuous functions,* Ukr. Math. Journ. **44** (9) (1992) 1209-1220 (in Ukrainian).

9. Mykhaylyuk V.V. *Dependence on* **n** *coordinates of separately continuous functions on products of compacts,* Ukr. Math. Journ. **50** (6) (1998) 822-829 (in Ukrainian).

10. Mykhaylyuk V.V. *Separately continuous functions on products and its dependence on* $\aleph$ *coordinates,* Ukr. Math. Journ. **56** (10) (2004) 1357-1368 (in Ukrainian).


*Надійшло 28.10.2022*

Mykhaylyuk V.V. *Dependence on countable many of coordinates of separately continuous functions of three variables*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 185–194.

The dependence of continuous mappings on a certain number of coordinates was intensively studied in the works of many mathematicians in the middle of the 20th century. It has become a convenient tool in the study of properties of continuous mappings. The most general results in this direction were obtained in [5], where the necessary and sufficient conditions for the dependence of continuous functions on products from a certain number of coordinates were obtained.

Starting with [8] the dependence of separately continuous mappings on a certain number of coordinates became the subject of research at the Chernivtsi University. For functions of two variables the most general results were obtained in [10]. The dependence on a certain number of coordinates of separately continuous functions of three or more variables was studied in [7], where the necessary and sufficient conditions were established only in the case of metrizability of all factors, which leaves a lot of room for further research.

We obtain necessary and sufficient conditions of dependence on countable many of coordinates of functions on the product of three spaces each of which is the product of a family of compact Kempisty spaces.