Шевчук Р.В., Савка І.Я.

Нелокальна задача спряження для лінійного параболічного рівняння другого порядку типу Колмогорова з розривними коефіцієнтами

У статті доведено теореми про існування і єдиність класичного розв'язку однієї нелокальної задачі спряження для одновимірного (за просторовою змінною) оберненого рівняння Колмогорова з розривними коефіцієнтами. Використовуючи розв'язок цієї задачі, визначено двопараметричну напівгрупу операторів, яка описує на прямій дійсних чисел деякий неоднорідний марковський процес.

Ключові слова і фрази: дифузійний процес, параболічне рівняння.

Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна (Шевчук Р.В.)
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача, Львів, Україна (Савка І.Я.)
e-mail: *r.v.shevchuk@gmail.com (Шевчук Р.В.), s-i@ukr.net (Савка І.Я.)*

Вступ

Метою статті є побудова та дослідження властивостей двопараметричної напівгрупи Феллера, якій відповідає неоднорідний марковський процес на прямій такий, що всередині інтервалів, розділених між собою точками, положення яких на прямій залежить від часової змінної, він збігається із заданими там звичайними дифузійними процесами, а його поведінка в межових точках цих інтервалів визначається заданими умовами спряження типу Феллера-Вентцеля (див. [1–3]). У розглядуваному нами випадку ці умови є нелокальними, кожна з них містить лише інтегральний член, який відповідає за стрибкоподібне повернення процесу з межі всередину області. Описану проблему ще називають задачею про склеювання дифузійних процесів на прямій або задачею про побудову математичної моделі фізичного явища дифузії в середовищі з мембранами (див. [4]). У нашому розумінні термін рухома мембрана означає, що її положення на числовій прямій може змінюватися, воно визначається деякою заданою функцією часової змінної.

Центральне місце в роботі займає дослідження сформульованої в п.1 нелокальної параболічної задачі спряження, до якої редукується вихідна проблема. Особливість цієї

УДК 519.21
2010 *Mathematics Subject Classification:* 60J60, 35K20.

задачі в тому, що рівняння, які розглядаються є оберненими рівняннями Колмогорова, області на площині, в яких задані рівняння є криволінійними, а функції часової змінної, які визначають межі цих областей задовольняють лише умову Гельдера з показником більшим, ніж $\frac{1}{2}$. Також відзначимо, що ті варіанти умов спряження Феллера-Вентцеля, які розглядаються у статті, не містять членів з похідними функції, а отже їх можна віднести до класу так званих нетрансверсальних нелокальних умов.

Розв'язок останньої задачі отримано методом граничних інтегральних рівнянь і доведено, що він володіє напівгруповою властивістю. Використовуючи інтегральне зображення знайденої напівгрупи, обгрунтовано твердження (див. п.2) про те, що ця напівгрупа породжує деякий неоднорідний марковський процес на прямій.

Зауважимо, що ця стаття узагальнює результати статті [5], у якій аналогічна задача вивчалася для випадку однієї рухомої мембрани (див. також [6,7], де розглядалися інші варіанти умов спряження Феллера-Вентцеля). Окрім вказаних статей, ми відзначаємо ще роботи [8] і [9], присвячені іншим підходам до побудови марковських процесів з нелокальними крайовими умовами Вентцеля, які спираються на використання методів функціонального і стохастичного аналізу відповідно, а також роботу [10], у якій наведено огляд праць, присвячених застосуванню методу граничних інтегральних рівнянь до дослідження початково-крайових задач для параболічних рівнянь.

1 Постановка задачі, допоміжні відомості і припущення

Розглянемо на площині (s, x) область

$$S_t = \{(s,x): \quad 0 \le s < t \le T,\ -\infty < x < \infty\}$$

(T — фіксоване додатне число) і позначимо через $\overline{S}_t$ її замикання. Припустимо, що $\overline{S}_T$ містить в собі неперервні криві $x = r_i(s)$, $0 \le s \le T$, $i = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbf{N}$, причому $r_1(s) < r_2(s) < \ldots < r_n(s)$ для всіх $s \in [0, T]$. Ці криві розділяють S_t на $n+1$ областей

$$S_t^{(i)} = \{(s,x): \quad 0 \le s < t \le T,\ x \in D_s^{(i)}\},$$

де $D_s^{(1)} = (-\infty, r_1(s))$, $D_s^{(2)} = (r_1(s), r_2(s)), \ldots,$ $D_s^{(n+1)} = (r_n(s), \infty)$.

Нехай в області $S_t^{(i)}$ задано параболічне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} b_i(s,x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_i(s,x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (s,x) \in S_t^{(i)},\ i = 1, \ldots, n+1. \tag{1}$$

Поставимо задачу про знаходження функції $u(s,x,t)$ ($(s,x) \in \overline{S}_t$), яка задовольняє рівняння (1), "початкову" умову

$$\lim_{s \uparrow t} u(s,x,t) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

і умови спряження

$$u(s, r_i(s) - 0, t) = u(s, r_i(s) + 0, t), \quad 0 \le s < t \le T,\ i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

$$\int\limits_{D_s^{(i)} \cup D_s^{(i+1)}} (u(s, r_i(s), t) - u(s, y, t)) \mu_i(s, dy) = 0, \quad 0 \le s < t \le T,\ i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Будемо вважати виконаними наступні умови.

I. Рівняння (1) параболічного типу в області $\overline{S}_T$, тобто існують додатні сталі b і B такі, що $b \le b_i(s,x) \le B$ при всіх $(s,x) \in \overline{S}_T$, $i = 1,\ldots,n+1$. Крім того, коефіцієнти $a_i(s,x)$ обмежені в $\overline{S}_T$, $i = 1,\ldots,n+1$.

II. Коефіцієнти $a_i(s,x)$ та $b_i(s,x)\,(i = 1,\ldots,n+1)$ належать до класу Гельдера $H^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\overline{S}_T)$, $0<\alpha<1$ (означення класів Гельдера див. у [11, с. 16]).

III. Функція φ з (2) належить до простору обмежених неперервних на $\mathbb{R}$ функцій, який позначатимемо через $C_b(\mathbb{R})$. Норма в цьому просторі визначається рівністю $\|\varphi\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|$.

IV. Виконані умови узгодження: $\int\limits_{D_t^{(i)}\cup D_t^{(i+1)}} (\varphi(r_i(t)) - \varphi(y))\mu_i(t,dy) = 0, \quad i = 1,\ldots,n.$

V. Криві $r_i(s)$ належать до класу Гельдера $H^{\frac{1+\alpha}{2}}([0,T])$, $i = 1,\ldots,n$.

VI. В умовах (4) $\mu_i(s,\cdot)$ — ймовірнісні міри на $D_s^{(i)} \cup D_s^{(i+1)}$, $s \in [0,T]$, $i = 1,\ldots,n$, які мають таку властивість: інтеграл від будь-якої функції $f \in C_b(\mathbb{R})$ по $D_s^j\,(j = i,\ i{+}1)$ відносно міри $\mu_i(s,\cdot)$, як функція змінної s, належать до класу $H^{\frac{1+\alpha}{2}}([0,T])$.

Зауважимо, що задачу (1)-(4) можна розглядати як задачу побудови двопараметричної напівгрупи Феллера $T_{s,t}$, $0 \le s \le t \le T$, яка породжує на прямій $\mathbb{R}$ деякий неоднорідний марковський процес. Виконання для функції $u(s,x,t) \equiv T_{s,t}\varphi(x)$ рівняння (1) вказує на те, що у внутрішніх точках області $D_s^{(i)}$ цей процес збігається із заданим там дифузійним процесом, керованим оператором $\frac{1}{2}b_i(s,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_i(s,x)\frac{\partial}{\partial x}$ $(i = 1,\ldots,n+1)$, а умова (2) узгоджується з рівністю $T_{t,t} = I$, де I — тотожний оператор. Умова спряження (3) відображає властивість феллеровості процесу, а умова спряження (4) є нелокальною умовою спряження Феллера-Вентцеля, яка відповідає за стрибкоподібний характер повернення процесу з спільної межі областей $D_s^{(i)}$ і $D_s^{(i+1)}$, де розташована мембрана, в середину однієї з цих областей.

Умови I, II забезпечують існування фундаментального розв'язку кожного з рівнянь в (1), який позначимо через $G_i(s,x,t,y)\,(0 \le s < t \le T,\ x,y \in \mathbb{R},\ i = 1,\ldots,n+1)$. Нагадаємо, що функція G_i при фіксованих $t \in (0,T]$, $y \in \mathbb{R}$, як функція аргументів $(s,x) \in [0,t) \times \mathbb{R}$ задовольняє рівняння (1) і допускає зображення

$$G_i(s,x,t,y) = Z_{i,0}(s,x,t,y) + Z_{i,1}(s,x,t,y), \quad i = 1,\ldots,n+1, \tag{5}$$

де

$$Z_{i,0}(s,x,t,y) = [2\pi b_i(t,y)(t-s)]^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2b_i(t,y)(t-s)}\right\},$$

$$Z_{i,1}(s,x,t,y) = \int\limits_s^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} Z_{i,0}(s,x,\tau,z)Q_i(\tau,z,t,y)dz,$$

а функція $Q_i(s,x,t,y)$ є розв'язком деякого сингулярного інтегрального рівняння Вольтерри другого роду.

Відзначимо оцінки

$$|D_s^r D_x^p Z_{i,0}(s,x,t,y)| \leq C(t-s)^{-\frac{1+2r+p}{2}} \exp\left\{-c\frac{(y-x)^2}{t-s}\right\}, \tag{6}$$

$$|D_s^r D_x^p Z_{i,1}(s,x,t,y)| \leq C(t-s)^{-\frac{1+2r+p-\alpha}{2}} \exp\left\{-c\frac{(y-x)^2}{t-s}\right\}, \tag{7}$$

де $0 \leq s < t \leq T$, $x, y \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n+1$, c і C — додатні сталі (тут і надалі через c і C будуть позначатися сталі, що залежать від даних задачі (1)-(4), без уточнення їх конкретного значення); r і p — цілі невід'ємні числа такі, що $2r + p \leq 2$, D_s^r — символ частинної похідної за змінною s порядку r, D_x^p — символ частинної похідної за змінною x порядку p.

2 Розв'язування задачі (1)-(4)

Розв'язок задачі (1)-(4) будемо шукати у вигляді

$$u(s,x,t) = u_i(s,x,t) = u_{i,0}(s,x,t) + \sum_{j=0}^{1} u_{i,1}^{(j)}(s,x,t), \quad (s,x) \in \overline{S}_t^{(i)},\ i = 1, \dots, n+1, \tag{8}$$

де $u_{i,0}$ — тепловий потенціал Пуассона, породжений фундаментальним розв'язком G_i рівняння (1),

$$u_{i,0}(s,x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_i(s,x,t,y)\varphi(y)dy, \tag{9}$$

а $u_{i,1}^{(j)}$ — потенціали простого шару

$$u_{i,1}^{(j)}(s,x,t) = \int\limits_s^t G_i(s,x,\tau,r_{i+j-1}(\tau))V_{2i+j-2}(\tau,t)d\tau. \tag{10}$$

В останній формулі $V_1, V_2, \dots, V_{2n}$ — невідомі функції; $V_0 \equiv V_{2n+1} \equiv 0$, $r_0 \equiv r_{n+1} \equiv 0$. Функції $u_{1,1}^{(0)}$ та $u_{n+1,1}^{(1)}$, які тотожно дорівнюють нулеві, потрібні нам лише для того, щоб мати змогу записати формулу для $u(s,x,t)$ у зручному для нас вигляді (8) і не розглядати при цьому окремо випадки, коли $i = 1$ та $i = n+1$.

Припустимо a priori, що невідомі функції $V_p(s,t)$, $p = 1, \dots, 2n$, є неперервними в області $0 \leq s < t \leq T$ і мають таку властивість:

(A) для будь-яких $t \in (0,T]$ і $\varepsilon > 0$ існує $s_0 \in [0,t)$ таке, що при всіх $s \in [s_0,t)$ виконується нерівність

$$|V_p(s,t)| \leq \varepsilon C(t-s)^{-\frac{1}{2}},$$

де C — додатна стала, яка не залежить від ε.

Ці припущення разом з умовою III дозволяють стверджувати (див. властивості теплових потенціалів, наведені, наприклад, у [4, 11]), що функція $u_i(s,x,t)$, задана рівністю (8), задовольняє в області $(s,x) \in S_t^{(i)}$ $(i = 1, \dots, n+1)$ рівняння (1) з "початковою" умовою (2). Отже, для того, щоб знайти розв'язок задачі (1)-(4), нам потрібно визначити функції $V_1, V_2, \dots, V_{2n}$ з умов спряження (3), (4).

Використовуючи умови (3), (4), а також властивість VI міри μ_i $(i = 1, \dots, n)$, отримуємо наступні співвідношення $(0 \le s < t \le T,\ i = 1, \dots, n,\ m = i,\ i+1)$:

$$u_m(s, r_i(s), t) = \sum_{k=i}^{i+1} \int\limits_{D_s^{(k)}} u_k(s,y,t)\mu_i(s,dy). \tag{11}$$

Підставивши праву частину виразу (8) в (11), отримуємо таку систему інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду для $V_1, V_2, \dots, V_{2n}$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{1}\Bigg(&\int\limits_s^t G_m(s, r_i(s), \tau, r_{m+j-1}(\tau))V_{2m+j-2}(\tau,t)d\tau \\ &-\sum_{k=i}^{i+1}\int\limits_s^t V_{2k+j-2}(\tau,t)d\tau \int\limits_{D_s^{(k)}} G_k(s,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(s,dy)\Bigg) = \Phi_{m,i}(s,t),\end{aligned} \tag{12}$$

де $0 \le s < t \le T$, $i = 1, \dots, n$, $m = i,\ i+1$,

$$\Phi_{m,i}(s,t) = \sum_{k=i}^{i+1}\int\limits_{D_s^{(k)}} u_{k,0}(s,y,t)\mu_i(s,dy) - u_{m,0}(s,r_i(s),t).$$

За допомогою прийому Гольмгрена зведемо систему рівнянь (12) до еквівалентної системи рівнянь Вольтерри другого роду. З цією метою введемо інтегро-диференціальний оператор $\mathcal{E}$, який діє за правилом

$$\mathcal{E}(s,t)\Phi_i = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\partial}{\partial s}\int\limits_s^t(\rho - s)^{-\frac{1}{2}} f(\rho,t)d\rho, \quad 0 \le s < t \le T.. \tag{13}$$

Розглянемо спочатку дію оператора $\mathcal{E}$ на праві частини рівнянь (12), тобто на функції $\Phi_{m,i}(s,t)$ $(0 \le s < t \le T,\ i = 1, \dots, n,\ m = i,\ i+1)$. Для цього нам знадобиться наступна лема.

Лема 1. *Для функцій* $\Phi_{m,i}(s,t)$ $(0 \le s < t \le T,\ i = 1, \dots, n,\ m = i,\ i+1)$ *виконуються співвідношення:*

1) $\lim\limits_{s \uparrow t}\Phi_{m,i}(s,t) = 0$;

2) $|\Phi_{m,i}(s,t) - \Phi_{m,i}(\widetilde{s},t)| \le C\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(s-\widetilde{s})^{\frac{1+\alpha}{2}}$ *при всіх* $0 \le \widetilde{s} < s < t \le T$.

Доведення. Для доведення твердження 1) використаємо оцінку (6), умову узгодження IV і властивість VI міри μ_i. Маємо

$$\lim_{s\uparrow t}\Phi_{m,i}(s,t)=\sum_{k=i}^{i+1}\int\limits_{D_t^{(k)}}\varphi(y)\mu_i(t,dy)-\varphi(r_i(t))$$
$$=\int\limits_{D_t^{(i)}\cup D_t^{(i+1)}}(\varphi(y)-\varphi(r_i(t)))\mu_i(t,dy)=0. \tag{14}$$

Перейдемо до доведення твердження 2). Запишемо

$$\Phi_{m,i}(s,t)-\Phi_{m,i}(\widetilde{s},t)=I_i^{(1)}(s,\widetilde{s},t)+I_i^{(2)}(s,\widetilde{s},t)+J_{m,i}(s,\widetilde{s},t), \tag{15}$$

де

$$I_i^{(1)}(s,\widetilde{s},t)=\sum_{k=i}^{i+1}\int\limits_{D_s^{(k)}}[u_{k,0}(s,y,t)-u_{k,0}(\widetilde{s},y,t)]\mu_i(s,dy),$$
$$I_i^{(2)}(s,\widetilde{s},t)=\sum_{k=i}^{i+1}\Bigg(\int\limits_{D_s^{(k)}}u_{k,0}(\widetilde{s},y,t)\mu_i(s,dy)-\int\limits_{D_{\widetilde{s}}^{(k)}}u_{k,0}(\widetilde{s},y,t)\mu_i(\widetilde{s},dy)\Bigg),$$
$$J_{m,i}(s,\widetilde{s},t)=u_{m,0}(\widetilde{s},r_i(\widetilde{s}),t)-u_{m,0}(s,r_i(s),t).$$

Покажемо, що кожен доданок в правій частині виразу (15) допускає нерівність 2). Оскільки при $\widetilde{s}<s$

$$\begin{aligned}
&|u_{k,0}(s,y,t)-u_{k,0}(\widetilde{s},y,t)|\\
&=|u_{k,0}(s,y,t)-u_{k,0}(\widetilde{s},y,t)|^{\frac{1+\alpha}{2}}|u_{k,0}(s,y,t)-u_{k,0}(\widetilde{s},y,t)|^{\frac{1-\alpha}{2}}\\
&\le\left|\frac{\partial u_{k,0}(\hat{s},y,t)}{\partial\hat{s}}\bigg|_{\hat{s}=\widetilde{s}+\theta(s-\widetilde{s})}\cdot(s-\widetilde{s})\right|^{\frac{1+\alpha}{2}}(|u_{k,0}(s,y,t)|+|u_{k,0}(\widetilde{s},y,t)|)^{\frac{1-\alpha}{2}}\\
&\le C\|\varphi\|\left[(t-\widetilde{s}-\theta(s-\widetilde{s}))^{-1}(s-\widetilde{s})\right]^{\frac{1+\alpha}{2}}\le C\|\varphi\|\big[((t-s)\\
&+(s-\widetilde{s})(1-\theta))^{-1}(s-\widetilde{s})\big]^{\frac{1+\alpha}{2}}\le C\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(s-\widetilde{s})^{\frac{1+\alpha}{2}}\quad(0<\theta<1),
\end{aligned}$$

то нерівність 2) виконується для доданка $I_i^{(1)}$. Для $I_i^{(2)}$ справедливість цієї нерівності забезпечує оцінка

$$|I_i^{(2)}|\le C\|\varphi\|(s-\widetilde{s})^{\frac{1+\alpha}{2}},$$

яка є очевидним наслідком припущення VI. Для $J_{m,i}$ нерівність 2) встановлюється за подібною схемою, що й для $I_i^{(1)}$, з урахуванням припущення V.

Отже,

$$|I_i^{(1)}+I_i^{(2)}+J_{m,i}|\le C\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(s-\widetilde{s})^{\frac{1+\alpha}{2}},\quad\widetilde{s}<s.$$

Лема доведена. □

Враховуючи обидва твердження леми 1, для функцій $\widehat{\Phi}_{m,i} \equiv \mathcal{E}(s,t)\Phi_{m,i}$ знаходимо зображення

$$\widehat{\Phi}_{m,i}(s,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_s^t (\rho - s)^{-\frac{3}{2}} [\Phi_{m,i}(\rho,t) - \Phi_{m,i}(s,t)] d\rho - \sqrt{\frac{2}{\pi}} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \Phi_{m,i}(s,t) \tag{16}$$

і наступну оцінку ($0 \le s < t \le T$, $i = 1, \ldots, n$, $m = i,\, i+1$):

$$|\widehat{\Phi}_{m,i}(s,t)| \le C\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

Застосуємо тепер оператор $\mathcal{E}$ до лівих частин рівнянь системи (12). Розглянемо інтеграл ($0 \le s < t \le T$, $i = 1, \ldots, n$, $m = i,\, i+1$)

$$L_{m,i}(s,t) = \int\limits_s^t Z_{m,0}(s, r_i(\tau), \tau, r_i(\tau)) V_{m+i-1}(\tau,t) d\tau.$$

Цей інтеграл виникає в лівій частині кожного з рівнянь в (12) при $m+j-1 = i$ відразу ж після того, як функцію $G_m(s, r_i(s), \tau, r_{m+j-1}(\tau)) = G_m(s, r_i(s), \tau, r_i(\tau))$ подати у вигляді

$$\begin{aligned} G_m(s, r_i(s), \tau, r_i(\tau)) &= Z_{m,0}(s, r_i(\tau), \tau, r_i(\tau)) + Z_{m,1}(s, r_i(\tau), \tau, r_i(\tau)) \\ &\quad + [G_m(s, r_i(s), \tau, r_i(\tau)) - G_m(s, r_i(\tau), \tau, r_i(\tau))]. \end{aligned}$$

Подіємо оператором $\mathcal{E}$ на $L_{m,i}(s,t)$ ($0 \le s < t \le T$, $i = 1, \ldots, n$, $m = i,\, i+1$). Маємо

$$\begin{aligned} \widehat{L}_{m,i}(s,t) &\equiv \mathcal{E}(s,t) L_{m,i} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\partial}{\partial s} \int\limits_s^t (\rho - s)^{-\frac{1}{2}} d\rho \int\limits_\rho^t Z_{m,0}(\rho, r_i(\tau), \tau, r_i(\tau)) V_{m+i-1}(\tau,t) d\tau \quad m = i,\, i+1. \end{aligned}$$

Змінюючи порядок інтегрування за ρ і τ, отримуємо

$$\begin{aligned} \widehat{L}_{m,i}(s,t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\partial}{\partial s} \int\limits_s^t V_{m+i-1}(\tau,t) d\tau \int\limits_s^\tau (\rho - s)^{-\frac{1}{2}} Z_{m,0}(\rho, r_i(\tau), \tau, r_i(\tau)) d\rho \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial s} \int\limits_s^t \frac{V_{m+i-1}(\tau,t)}{\sqrt{b_m(\tau, r_i(\tau))}} \int\limits_s^\tau (\rho - s)^{-\frac{1}{2}} (\tau - \rho)^{-\frac{1}{2}} d\rho, \quad m = i,\, i+1. \end{aligned}$$

Звідси, враховуючи співвідношення

$$\int\limits_s^\tau (\rho - s)^{-\frac{1}{2}} (\tau - \rho)^{-\frac{1}{2}} d\rho = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \pi,$$

знаходимо, що

$$\widehat{L}_{m,i}(s,t) = -\frac{V_{m+i-1}(s,t)}{\sqrt{b_m(s, r_i(s))}}, \quad 0 \le s < t \le T,\ i = 1, \ldots, n,\ m = i,\, i+1. \tag{18}$$

Коротко опишемо наші дії після застосування перетворення Гольмгрена до всіх інших складових у лівих частинах рівнянь системи (12). Подіявши оператором $\mathcal{E}$ на ці складові, в отриманих виразах ми спочатку змінюємо порядки інтегрування за ρ і τ, а потім спрощуємо похідні від інтегралів залежних від параметрів, використовуючи таке правило:

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_s^t f(s,\tau)d\tau = \int_s^t \frac{\partial}{\partial s} f(s,\tau)d\tau,$$

якщо $f(s,\tau)\to 0$ при $s\uparrow\tau$. Після виконання вказаних дій і використання співвідношення (18) бачимо, що в результаті застосування оператора $\mathcal{E}$ ліві частини рівнянь системи (12) зводяться до такого вигляду ($0\le s<t\le T$, $i=1,\ldots,n$, $m=i,\,i+1$):

$$\begin{aligned}
&-\frac{V_{m+i-1}(s,t)}{\sqrt{b_m(s,r_i(s))}}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_s^t V_{m+i-1}(\tau,t)d\tau\frac{\partial}{\partial s}\int_s^\tau(\rho-s)^{-\frac12}\Big(Z_{m,1}(\rho,r_i(\tau),\tau,r_i(\tau))\\
&+\big[G_m(\rho,r_i(\rho),\tau,r_i(\tau))-G_m(\rho,r_i(\tau),\tau,r_i(\tau))\big]\Big)d\rho+\\
&+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_s^t V_{3m-i-2}(\tau,t)d\tau\frac{\partial}{\partial s}\int_s^\tau(\rho-s)^{-\frac12}G_m(\rho,r_i(\rho),\tau,r_{2m-i-1}(\tau))d\rho\\
&-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=i}^{i+1}\int_s^t V_{2k+j-2}(\tau,t)d\tau\frac{\partial}{\partial s}\int_s^\tau(\rho-s)^{-\frac12}d\rho\int_{D_\rho^{(k)}}G_k(\rho,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(\rho,dy).
\end{aligned}\tag{19}$$

Прирівнявши (19) до правої частини виразу (16), отримуємо систему інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду. Кожне з рівнянь цієї системи перетворимо таким чином: спочатку обидві його частини помножимо на $-\sqrt{b_m(s,r_i(s))}$, а потім всі вирази з лівої частини отриманої рівності, крім $V_{m+i-1}(s,t)$, перенесемо у праву частину. Після виконання цих перетворень система рівнянь набуде вигляду ($0\le s<t\le T$, $i=1,\ldots,n$, $m=i,\,i+1$):

$$V_{m+i-1}(s,t)=\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=i}^{i+1}\int_s^t N_{2k+j-2}^{(m-i)}(s,\tau)V_{2k+j-2}(\tau,t)d\tau+\Psi_{m+i-1}(s,t),\tag{20}$$

де

$$N_{2k+j-2}^{(m-i)}(s,\tau)=-\sqrt{\frac{2b_m(s,r_i(s))}{\pi}}\frac{\partial}{\partial s}\int_s^\tau(\rho-s)^{-\frac12}d\rho\int_{D_\rho^{(k)}}G_k(\rho,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(\rho,dy),$$

якщо $m \neq k$,

$$N^{(k-i)}_{3k-i-2}(s,\tau) = \sqrt{\frac{2b_k(s,r_i(s))}{\pi}}\frac{\partial}{\partial s}\int\limits_s^\tau (\rho-s)^{-\frac{1}{2}}\bigg(G_k(\rho,r_i(\rho),\tau,r_{2k-i-1}(\tau))$$
$$-\int\limits_{D^{(k)}_\rho} G_k(\rho,y,\tau,r_{2k-i-1}(\tau))\mu_i(\rho,dy)\bigg)d\rho,$$
$$N^{(k-i)}_{k+i-1}(s,\tau) = \sqrt{\frac{2b_k(s,r_i(s))}{\pi}}\frac{\partial}{\partial s}\int\limits_s^\tau (\rho-s)^{-\frac{1}{2}}\bigg(Z_{k,1}(\rho,r_i(\tau),\tau,r_i(\tau)) + \big[G_k(\rho,r_i(\rho),\tau,r_i(\tau))$$
$$-G_k(\rho,r_i(\tau),\tau,r_i(\tau))\big] - \int\limits_{D^{(k)}_\rho} G_k(\rho,y,\tau,r_i(\tau))\mu_i(\rho,dy)\bigg)d\rho,$$
$$\Psi_{m+i-1}(s,t) = -\sqrt{b_m(s,r_i(s))}\widehat{\Phi}_{m,i}(s,t).$$

Відзначимо, що для функцій Ψ_{m+i-1} з (20) виконується нерівність (17), а ядра $N^{(m-i)}_{2k+j-2}$ не мають інтегровної особливості. Для $N^{(m-i)}_{2k+j-2}$ можна отримати лише таку оцінку:

$$|N^{(m-i)}_{2k+j-2}(s,\tau)| \le C(\tau-s)^{-1}, \quad 0 \le s < \tau < t \le T. \tag{21}$$

Оцінка (21) спричинена інтегралом

$$\int\limits_{U^{(k)}_\delta(r_{k+j-1}(s))} \frac{\partial}{\partial y} Z_{k,0}(s,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(s,dy)$$

($U^{(k)}_\delta(r_{k+j-1}(s)) = \{y \in D^{(k)}_s : |y - r_{k+j-1}(s)| < \delta\}$, δ — довільна додатна стала), який виникає у виразі

$$N^{(m-i)}_{2k+j-2}(s,\tau) = -\sqrt{\frac{2b_m(s,r_i(s))}{\pi}}\frac{\partial}{\partial s}\bigg[\int\limits_s^\tau (\rho-s)^{-\frac{1}{2}}d\rho \int\limits_{D^{(k)}_\rho} Z_{k,1}(\rho,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(\rho,dy)$$
$$+\int\limits_s^\tau (\rho-s)^{-\frac{1}{2}}d\rho\bigg(\int\limits_{D^{(k)}_\rho} Z_{k,0}(\rho,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(\rho,dy)$$
$$-\int\limits_{D^{(k)}_{s_0}} Z_{k,0}(\rho,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(s_0,dy)\bigg)$$
$$+\int\limits_s^\tau (\rho-s)^{-\frac{1}{2}}d\rho \int\limits_{D^{(k)}_{s_0}} Z_{k,0}(\rho,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(s_0,dy)\bigg]\bigg|_{s_0=s}$$

після спрощення похідної останнього доданка в квадратних дужках

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_s^\tau(\rho-s)^{-\frac12}d\rho\int_{D_{s_0}^{(k)}} Z_{k,0}(\rho,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(s_0,dy)\Big|_{s_0=s}=\frac{1}{\sqrt{2\pi b_k(\tau,r_{k+j-1}(\tau))}}$$

$$\times\frac{\partial}{\partial s}\int_{D_{s_0}^{(k)}}\exp\left\{-\frac{(y-r_{k+j-1}(\tau))^2}{2b_k(\tau,r_{k+j-1}(\tau))(\tau-s)}\right\}\mu_i(s_0,dy)\int_s^\tau(\rho-s)^{-\frac12}(\tau-\rho)^{-\frac12}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{(y-r_{k+j-1}(\tau))^2}{2b_k(\tau,r_{k+j-1}(\tau))(\tau-s)}\cdot\frac{\rho-s}{\tau-\rho}\right\}d\rho\Big|_{s_0=s}=\frac{1}{\sqrt{2\pi b_k(\tau,r_{k+j-1}(\tau))}}$$

$$\times\frac{\partial}{\partial s}\int_{D_{s_0}^{(k)}}\mu_i(s_0,dy)\int_0^\infty z^{-\frac12}(z+1)^{-1}\exp\left\{-\frac{(y-r_{k+j-1}(\tau))^2}{2b_k(\tau,r_{k+j-1}(\tau))(\tau-s)}\cdot(z+1)\right\}dz\Big|_{s_0=s}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi b_k(\tau,r_{k+j-1}(\tau))}{2}}\int_{D_s^{(k)}}\frac{\partial}{\partial y}Z_{k,0}(s,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(s,dy)$$

$$=\sqrt{\frac{\pi b_k(\tau,r_{k+j-1}(\tau))}{2}}\Bigg(\int_{U_\delta^{(k)}(r_{k+j-1}(s))}\frac{\partial}{\partial y}Z_{k,0}(s,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(s,dy)$$

$$+\int_{D_s^{(k)}\setminus U_\delta^{(k)}(r_{k+j-1}(s))}\frac{\partial}{\partial y}Z_{k,0}(s,y,\tau,r_{k+j-1}(\tau))\mu_i(s,dy)\Bigg).$$

Всі інші складові виразу для $N_{2k+j-2}^{(m-i)}(s,\tau)$ допускають нерівності, праві частини яких мають вигляд $C(\delta)(\tau-s)^{-1+\frac{\alpha}{2}}$, де $C(\delta)$ — додатна стала, що залежить від вибору δ.

Замінивши $m+i-1\,(i=1,\ldots,n,\ m=i,\ i+1)$ у кожному рівнянні системи (20) індексом p, який змінює свої значення від 1 до $2n$, бачимо, що цю систему рівнянь можна запистати у вигляді:

$$V_p(s,t)=\sum_{l=p+r-2}^{p+r+1}\int_s^t N_l^{(r)}(s,\tau)V_l(\tau,t)d\tau+\Psi_p(s,t), \tag{22}$$

де $0\le s<t\le T$, $p=1,\ldots,2n$, а індекс r дорівнює остачі від ділення p на 2.

Незважаючи на те, що ядра $N_l^{(r)}(s,\tau)$ не мають інтегровної особливості, розв'язок системи рівнянь (22) існує і його можна знайти за допомогою звичайного методу послідовних наближень:

$$V_p(s,t)=\sum_{m=0}^\infty V_p^{(m)}(s,t),\quad 0\le s<t\le T,\ p=1,\ldots,2n, \tag{23}$$

де

$$V_p^{(0)}(s,t)=\Psi_p(s,t),$$

$$V_p^{(m)}(s,t)=\sum_{l=p+r-2}^{p+r+1}\int_s^t N_l^{(r)}(s,\tau)V_l^{(m-1)}(\tau,t)d\tau\quad(V_0^{(m-1)}\equiv V_{2n+1}^{(m-1)}\equiv 0),\quad m=1,2,\ldots$$

Збіжність ряду (23) випливає з наступної нерівності, яка встановлюється методом математичної індукції:

$$\left|V_p^{(m)}(s,t)\right| \le C\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{(m-k)}(h(\delta))^k, \quad m = 0, 1, \ldots, \tag{24}$$

де

$$a^{(k)} = \frac{\left(4C(\delta_0)T^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^k \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+k\alpha}{2}\right)}, \quad k = 0, 1, \ldots, m,$$

$$h(\delta) = \frac{B}{b} \max_{s\in[0,T]} \sum_{i=1}^{n} \left(\mu_i(s, U_\delta^{(i)}(r_i(s)) \cup U_\delta^{(i+1)}(r_i(s))\right) < 1 \quad (\text{для достатньо малого } \delta).$$

З нерівності (24) також випливає, що функції $V_p \, (p = 1, \ldots, 2n)$ допускають оцінку

$$|V_p(s,t)| \le C\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}, \quad 0 \le s < t \le T. \tag{25}$$

Отже, формула (23) представляє єдиний розв'язок $(V_1, \ldots, V_{2n})$ системи інтегральних рівнянь (22), компоненти якого неперервні в області $0 \le s < t \le T$ і задовольняють нерівність (25).

З оцінкок (6) (при $r = p = 0$) і (25) випливає існування потенціалів простого шару в (8) і виконання для них наступної нерівності

$$|u_{i,1}^{(j)}(s,x,t)| \le C\|\varphi\|, \quad (s,x) \in \overline{S}_t^{(i)}, \, i = 1, \ldots, n+1, \, j = 0, \, 1. \tag{26}$$

Очевидно, що така ж сама нерівність виконується також для потенціалів Пуассона $u_{i,0}(s,x,t) \, ((s,x) \in \overline{S}_t^{(i)}, \, i = 1, \ldots, n+1)$ в (8), а отже, і для самої функції $u(s,x,t)$.

З допомогою співвідношень (5), (6) і (7) нескладно переконатися, в тому, що функції $V_p \, (p = 1, \ldots, 2n)$ мають властивісь (A). Ця властивість дозволяє стверджувати, що

$$\lim_{s\uparrow t} u_{i,1}^{(j)}(s,x,t) = 0, \quad i = 1, \ldots, n+1, \, j = 0, \, 1.$$

Враховуючи при цьому, що для функцій $u_{i,0}$ виконується умова (2), а також той факт, що функції $u_{i,0}$ і $u_{i,1}^{(j)} \, (i = 1, \ldots, n+1, \, j = 0, \, 1)$ задовольняють рівняння (1) в області $(s,x) \in S_t^{(i)} \, (i = 1, \ldots, n+1)$, робимо висновок, що $u(s,x,t)$ є шуканим розв'язком параболічної задачі спряження (1)-(4).

Отже, ми довели таке твердження:

Теорема 1. *Нехай виконуються умови I-VI. Тоді задача* (1)-(4) *має розв'язок, неперервний в* $\overline{S}_t$. *Крім того, цей розв'язок має вигляд* (8) *і для нього виконується нерівність* (26).

У теоремі 1 ми встановили існування класичного розв'язку задачі (1)-(4). Тепер доведемо теорему єдиності.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови I-VI. Тоді існує не більше ніж один розв'язок задачі* (1)-(4), *який є неперервний і обмежений в* $\overline{S}_t$.

Доведення. Припустимо, що задача (1)-(4) має два розв'язки

$$u^{(1)}(s,x,t)=u_i^{(1)}(s,x,t),\quad u^{(2)}(s,x,t)=u_i^{(2)}(s,x,t),\quad (s,x)\in\overline{S}_t^{(i)},\ i=1,\ldots,n+1,$$

які є неперервні та обмежені в $\overline{S}_t$. Тоді функція

$$\upsilon(s,x,t)=u^{(1)}(s,x,t)-u^{(2)}(s,x,t)=\upsilon_i(s,x,t)\quad (s,x)\in\overline{S}_t^{(i)},\ i=1,\ldots,n+1, \tag{27}$$

де $\upsilon_i(s,x,t)=u_i^{(1)}(s,x,t)-u_i^{(2)}(s,x,t)$, є розв'язком однорідної задачі спряження (1)-(4) (при $\varphi\equiv 0$), який є неперервний і обмежений в $\overline{S}_t$. Зауважимо при цьому, що кожну з функцій $\upsilon_i\,(i=1,\ldots,n+1)$ можна розглядати одночасно як розв'язок наступної параболічної першої крайової задачі:

$$\frac{\partial\upsilon_i}{\partial s}+\frac{1}{2}b_i(s,x)\frac{\partial^2\upsilon_i}{\partial x^2}+a_i(s,x)\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x}=0,\quad (s,x)\in S_t^{(i)},\quad i=1,\ldots,n+1, \tag{28}$$

$$\lim_{s\uparrow t}\upsilon_i(s,x,t)=0,\quad x\in\overline{D}_t^{(i)},\ i=1,\ldots,n+1, \tag{29}$$

$$\upsilon_i(s,r_i(s),t)=f_i(s,t),\quad 0\le s<t\le T,\ i=1,\ldots,n, \tag{30}$$

де

$$f_i(s,t)=\int\limits_{D_s^{(i)}\cup D_s^{(i+1)}}\upsilon(s,y,t)\mu_i(s,dy).$$

Оскільки функція $f_i(s,t)$ неперервна і обмежена на $[0,T]$, перша крайова задача (28)-(30) має єдиний класичний розв'язок, неперервний і обмежений в $\overline{S}_t^{(i)}$ $(i=1,\ldots,n+1)$, який до того ж може бути визначений за допомогою формули (8), де слід покласти $u_{i,0}\equiv 0$.

Отже, $\upsilon_i(s,x,t)\,(i=1,\ldots,n)$ в єдиний спосіб можуть бути представлені у вигляді (8), де відсутні потенціали Пуассона, а $V_p(s,t)\,(p=1,\ldots,2n)$ — неперервні в області $s\in[0,t)$ функції, які визначаються за допомогою $f_i(s,t)$. Далі, беручи до уваги міркування, наведені при доведенні теореми 1, легко зауважити, що $V_p(s,t)\,(p=1,\ldots,2n)$, одночасно є розв'язком однорідної системи інтегральних рівнянь (22) при $\Psi_p\equiv 0\,(p=1,\ldots,2n)$. Внаслідок єдиності розв'язку системи (22) в розглядуваному класі неперервних функцій маємо, що $V_p\equiv 0\,(p=1,\ldots,2n)$, звідки отримуємо $\upsilon_i\equiv 0\,(i=1,\ldots,n+1)$ і $u^{(1)}(s,x,t)\equiv u^{(2)}(s,x,t)$. □

3 Напівгрупа Феллера

Нехай $C_0(\mathbb{R})$ — підпростір $C_b(\mathbb{R})$, що складається з усіх функцій $\varphi\in C_b(\mathbb{R})$ для яких виконується умова IV. Оскільки підпростір $C_0(\mathbb{R})$ є замкнутим у $C_b(\mathbb{R})$, він є банаховим простором.

З теореми 1 випливає, що за допомогою розв'язку задачі (1)-(4) можна визначити двопараметричну сім'ю лінійних операторів $T_{s,t}:\ C_0(\mathbb{R})\to C_0(\mathbb{R})$, $0\le s\le t\le T$. Для $0\le s<t\le T$, $x\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in C_0(\mathbb{R})$ покладемо

$$T_{s,t}\varphi(x)=T_{s,t}^{(i,0)}\varphi(x)+T_{s,t}^{(i,1)}\varphi(x),\quad 0\le s<t\le T,\ x\in\overline{D}_s^{(i)},\ i=1,\ldots,n+1, \tag{31}$$

де

$$T_{s,t}^{(i,0)}\varphi(x) \equiv u_{i,0}(s,x,t), \quad T_{s,t}^{(i,1)}\varphi(x) \equiv \sum_{j=0}^{1} u_{i,1}^{(j)}(s,x,t),$$

функції $u_{i,0}$ та $u_{i,1}^{(j)}$ $(j = 0,\, 1)$ визначаються за формулами (9) та (10) відповідно, а щільності $V_p(s,t) \equiv V_p(s,t,\varphi)\,(p = 1, \dots,\, 2n)$, які входять до потенціалів простого шару $u_{i,1}^{(j)}$ представляють розв'язок системи сингулярних інтегральних рівнянь (22), до якої редукується задача (1)-(4). При цьому $T_{t,t} = I$, де I — тотожний оператор і для $T_{s,t}\varphi(x)$ в області $(s,x) \in \overline{S}_t$ виконується нерівність

$$|T_{s,t}\varphi(x)| \leq C\|\varphi\|. \tag{32}$$

Наявність інтегрального зображення для сім'ї операторів $T_{st}\,(0 \leq s \leq t \leq T)$ дає змогу достатньо легко перевірити виконання для них таких властивостей:

а) якщо $\varphi_n \in C_0(\mathbb{R})$, $n \in \mathbf{N}$, $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} \|\varphi_n\| < \infty$, і для всіх $x \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$, де $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$, то для всіх $(s,x) \in \overline{S}_t$ виконується співвідношення $\lim\limits_{n\to\infty} T_{s,t}\varphi_n(x) = T_{s,t}\varphi(x)$;

б) $T_{s,t} = T_{s,\tau}T_{\tau,t},\ 0 \leq s < \tau < t \leq T$ (напівгрупова властивість);

в) оператори $T_{s,t}\,(0 \leq s \leq t \leq T)$ — невід'ємні $(0 \leq s \leq t \leq T)$, тобто $T_{s,t}\varphi \geq 0$ для будь якої $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ такої, що $\varphi \geq 0$;

г) оператори $T_{s,t}\,(0 \leq s \leq t \leq T)$ — стискуючі, тобто вони не збільшують норму елемента;

Властивість а) є наслідком виконання для розв'язку системи інтегральних рівнянь (22) очевидного співвідношення $\lim\limits_{n\to\infty} V_p(s,t,\varphi_n) = V_p(s,t,\varphi)\,(s \in [0,t),\, p = 1, \dots,\, 2n)$ і теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла.

Напівгрупова властивість операторів $T_{s,t}$ є наслідком теореми 2 про єдиність розв'язку задачі (1)-(4). Справді, для того, щоб знайти $u(s,x,t) = T_{s,t}\varphi(x)$, коли дано, що $\lim_{s\uparrow t} u(s,x,t) = \varphi(x)$, можна спочатку розв'язати задачу у часовому проміжку $[\tau,t]$, а потім розв'язати її у часовому проміжку $[s,\tau]$ з тією "початковою" функцією $u(\tau,x,t) = T_{\tau,t}\varphi(x)$, яку було отримано; інакше кажучи, $T_{s,t}\varphi(x) = T_{s,\tau}(T_{\tau,t}\varphi)(x)$, $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$, або $T_{s,t} = T_{s,\tau}T_{\tau,t}$.

Доведемо властивість в). Нехай функція $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ невід'ємна при всіх $x \in \mathbb{R}$. Беручи до уваги властивість а), для доведення в) достатньо обмежитися випадком, коли функція φ є фінітною. З теореми 1 випливає, що для такої функції φ функція $T_{s,t}\varphi(x)$, яка представляє розв'язок задачі (1)-(4), є обмеженою та неперервною в області $(s,x) \in [0,t) \times \mathbb{R}$ і для всіх $0 \leq s \leq t \leq T$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} T_{s,t}\varphi(x) = 0$. Далі, якщо $\varphi \equiv 0$, то твердження леми є очевидним. Розглянемо випадок, коли функція φ не скрізь дорівнює нулеві. Позначимо через γ мінімум $T_{s,t}\varphi(x)$ в області $(s,x) \in \overline{S}_t$ і припустимо, що $\gamma < 0$. Згідно з принципом максимуму для параболічних рівнянь [12] маємо, що в умовах наших припущень значення γ досягається лише при $s \in (0,t)$ і $x = r_i(s)\,(i = 1, \ldots, n)$. Нехай $s = s_0$, $x_0 = r_{i_0}(s_0)\,(i = i_0)$ для яких $T_{s_0,t}\varphi(x_0) = \gamma$. Тоді

$$\int\limits_{D_{s_0}^{(i_0)} \cup D_{s_0}^{(i_0+1)}} [T_{s_0,t}\varphi(x_0) - T_{s_0,t}\varphi(y)]\mu(s_0, dy) < 0,$$

що суперечить умові (4). Отримана суперечність вказує на те, що $\gamma \geq 0$, що й потрібно було довести.

Нарешті, виконання для операторів $T_{s,t}$ властивості г) є простим наслідком властивості в) і того факту, що $T_{s,t}1 \equiv 1$ при $0 \leq s \leq t \leq T$.

З властивостей а)-г) випливає, що двопараметрична сім'я операторів $T_{s,t}$, визначена формулою (31), є напівгрупою Феллера, яка описує на прямій $\mathbb{R}$ деякий неоднорідний марковський процес (див. [13, с. 79, теор. 2.1]).

Отже, ми довели таке твердження:

Теорема 3. *Нехай виконуються умови I-VI. Тоді двопараметрична сім'я операторів $T_{s,t}\,(0 \leq s \leq t \leq T)$, визначена формулою (31), є напівгрупою Феллера, яка породжує на прямій $\mathbb{R}$ такий неоднорідний марковський просес, що в кожній з областей $D_s^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ він збігається із заданим там дифузійним процесом, керованим оператором $\frac{1}{2}b_i(s,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_i(s,x)\frac{\partial}{\partial x}$, а його поведінка при потраплянні на спільну межу цих областей $x = r_i(s)\,(i = 1, \ldots, n)$ описується умовами спряження (4).*

Список літератури

[**1**] Feller W. *The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations.* Ann. of Math. 1952, **55** (3), 468–519. doi:10.2307/1969644

[**2**] Вентцель А.Д. *Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка.* Докл. АН СССР 1956, **111** (2), 269–272.

[**3**] Langer H., Schenk W. *Knotting of onedimentional Feller processes.* Math. Nachr. 1983, **113** (1), 151–161. doi:10.1002/mana.19831130115

[**4**] Портенко М.І. Процеси дифузії в середовищах з мембранами. Інститут математики НАН України, Київ, 1999.

[**5**] Kopytko B.I., Shevchuk R.V. *On Feller semigroup generated by solution of nonlocal parabolic conjugation problem.* Carpathian Math. Publ. 2018, **10** (2), 333–345. doi:10.15330/cmp.10.2.333-345

[**6**] Kopytko B.I., Shevchuk R.V. *One-dimensional diffusion processes with moving membrane: partial reflection in combination with jump-like exit of process from membrane.* Electron. J. Probab. 2020, **25** (41), 1–21. doi:10.1214/20-EJP443

[**7**] Kopytko B.I., Shevchuk R.V. *One-dimensional Wiener process with the properties of partial reflection and delay.* Carpathian Math. Publ. 2021, **13** (2), 534–544. doi:10.15330/cmp.13.2.534-544

[**8**] Скубачевский А.Л. *О полугруппах Феллера для многомерных диффузионных процессов.* Докл. АН 1995, **341** (2), 173–176.

[**9**] Пилипенко А.Ю. *Об отображении Скорохода для уравнений с отражением с возможностью скачкообразного выхода из границы.* Укр. мат. журн. 2011, **63** (9), 1241–1256.

[**10**] Бадерко Е.А. *Краевые задачи для параболического уравнения и граничные интегральные уравнения.* Дифференц. уравнения 1992, **28** (1), 17–23.

[**11**] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Наука, Москва, 1967.

[**12**] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. Мир, Москва, 1968.

[**13**] Дынкин Е.Б. Марковские процессы. Физматгиз, Москва, 1963.

Список літератури

[**1**] Feller W. *The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations.* Ann. of Math. 1952, **55** (3), 468–519. doi:10.2307/1969644

[**2**] Wentzell A.D. *Semigroups of operators that correspond to a generalized differential operator of second order.* Dokl. AN SSSR 1956, **111** (2), 269–272. (in Russian)

[**3**] Langer H., Schenk W. *Knotting of onedimentional Feller processes.* Math. Nachr. 1983, **113** (1), 151–161. doi:10.1002/mana.19831130115

[**4**] Portenko M.I. Diffusion processes in media with membranes. Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 1999. (in Ukrainian)

[**5**] Kopytko B.I., Shevchuk R.V. *On Feller semigroup generated by solution of nonlocal parabolic conjugation problem.* Carpathian Math. Publ. 2018, **10** (2), 333–345. doi:10.15330/cmp.10.2.333-345

[**6**] Kopytko B.I., Shevchuk R.V. *One-dimensional diffusion processes with moving membrane: partial reflection in combination with jump-like exit of process from membrane.* Electron. J. Probab. 2020, **25** (41), 1–21. doi:10.1214/20-EJP443

[**7**] Kopytko B.I., Shevchuk R.V. *One-dimensional Wiener process with the properties of partial reflection and delay.* Carpathian Math. Publ. 2021, **13** (2), 534–544. doi:10.15330/cmp.13.2.534-544

[**8**] Skubachevskii A.L. *On Feller semigroups for multidimensional diffusion processes.* Dokl. AN 1995, **341** (2), 173–176. (in Russian)

[**9**] Pilipenko A.Yu. *On the Skorokhod mapping for equations with reflection and possible jump-like exit from a boundary.* Ukr. Mat. Zhurn. 2011, **63** (9), 1241–1256. (in Russian)

[**10**] Baderko E.A. *Boundary value problems for a parabolic equation and boundary integral equations.* Differents. Uravneniya 1992, **28** (1), 17–23. (in Russian)

[**11**] Ladyzhenskaja O.A., Solonnikov V.A., Ural'ceva N.N. Linear and quasilinear equations of parabolic type. Nauka, Moscow, 1967. (in Russian)

[**12**] Friedman A. Partial differential equations of parabolic type. Mir, Moscow, 1968. (in Russian)

[**13**] Dynkin E.B. Markov processes. Fizmatgiz, Moscow, 1963. (in Russian)

Надійшло 28.03.2022

Shevchuk R.V., Savka I.Ya. *The nonlocal conjugation problem for a linear second order parabolic equation of Kolmogorov's type with discontinuous coefficients*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 249–264.

In this paper, we construct the two-parameter Feller semigroup associated with a certain one-dimensional inhomogeneous Markov process. This process may be described as follows. At

the interior points of the finite number of intervals $(-\infty, r_1(s))$, $(r_1(s), r_2(s)), \dots$, $(r_n(s), \infty)$ separated by points $r_i(s)\,(i = 1, \dots, n)$, the positions of which depend on the time variable, this process coincides with the ordinary diffusions given there by their generating differential operators, and its behavior on the common boundaries of these intervals is determined by the Feller-Wentzell conjugation conditions of the integral type, each of which corresponds to the inward jump phenomenon from the boundary.

The study of the problem is done using analytical methods. With such an approach, the problem of existence of the desired semigroup leads to the corresponding nonlocal conjugation problem for a second order linear parabolic equation of Kolmogorov's type with discontinuous coefficients. The main part of the paper consists in the investigation of this parabolic conjugation problem, the peculiarity of which is that the domains on the plane, where the equations are given, are curvilinear and have non-smooth boundaries: the functions $r_i(s)\,(i = 1, \dots, n)$, which determine the boundaries of these domains satisfy only the Hölder condition with exponent greater than $\frac{1}{2}$. Its classical solvability in the space of continuous functions is established by the boundary integral equations method with the use of the fundamental solutions of the uniformly parabolic equations and the associated potentials. It is also proved that the solution of this problem has a semigroup property. The availability of the integral representation for the constructed semigroup allows us to prove relatively easily that this semigroup yields the Markov process.