Лопушанська Г. П.

Обернена задача з невідомою правою частиною у півлінійному дифузійно-хвильовому рівнянні з дробовою похідною при інтегральній за часом умові

Вивчаємо обернену крайову задачу визначення залежної від просторових змінних компоненти правої частини півлінійного дифузійно-хвильового рівняння з дробовою похідною за часом. Знаходимо достатні умови локальної за часом єдиності розв'язку при інтегральній за часом додатковій умові

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\eta_1(t)dt = \Phi_1(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

де u – невідомий розв'язок першої крайової задачі для такого рівняння, η_1 і Φ_1 – задані функції. Використовуємо метод функції Гріна.

Ключові слова і фрази: півлінійне рівняння дифузії, похідна дробового порядку, обернена задача, інтегральна за часом умова.

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
e-mail: *lhp@ukr.net*

Вступ

Обернені задачі для рівнянь із дробовими похідними виникають у різних галузях науки і техніки. Найбільше робіт по обернених задачах для рівнянь із дробовими похідними за часом, як і для рівнянь із частинними похідними цілих порядків присвячено задачам із невідомими правими частинами у рівняннях (див., наприклад, [1,4,6,15,16,19–21] і бібліографію). Використовують різні додаткові умови (умови перевизначення). У цій праці, використовуючи інтегральну за часом умову перевизначення, вивчаємо обернену задачу знаходження залежної від просторових змінних функції у правій частині півлінійного дифузійно-хвильового рівняння з дробовою похідною Капуто-Джрбашяна-Нерсесяна (регуляризованою похідною дробового порядку).

Зауважимо, що з використанням інтегральної за часом умови перевизначення у різних функційних просторах одержані достатні умови однозначної розв'язності деяких

УДК 517.95
2010 *Mathematics Subject Classification:* 80A23,35S10.

обернених задач для лінійного рівняння дробової дифузії: у [8, 9] з невідомим, залежним від часу, множником у правій частині рівняння, у [3] – з невідомим молодшим коефіцієнтом, у [10] – з невідомими початковими даними розв'язку.

Достатні умови єдиності розв'язку оберненої крайової задачі для півлінійного рівняння дробової дифузії з невідомим множником, що залежить від часу, знайдено в [11] при інтегральній за просторовими змінними умові перевизначення. Також при такого вигляду додатковій умові в [12] одержано достатні умови однозначної розв'язності оберненої задачі з невідомим молодшим, залежним від часу, коефіцієнтом для півлінійного телеграфного рівняння.

У цій праці знаходимо достатні умови єдиності розв'язку (u, g) оберненої задачі

$$D_t^\alpha u - \Delta u = g(x)F_0(x,t,u), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T] := Q, \tag{1}$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T] := \partial Q, \tag{2}$$

$$u(x,0) = F_1(x), \;\; u_t(x,0) = F_2(x), \; x \in \bar{\Omega}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\eta_1(t)dt = \Phi_1(x), \quad x \in \bar{\Omega} \tag{4}$$

де $D_t^\alpha u$ – регуляризована похідна порядку $\alpha \in (1,2)$, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ з межею $\partial\Omega$ класу $C^{1+\gamma}$, $\gamma \in (0,1)$, F_0, F_1, F_2, Φ_1, η_1 – задані функції.

Використовуємо метод функції Гріна [2, 13, 17, 18, 20].

1 Основні позначення, означення і допоміжні результати

Через $f * g$ позначаємо згортку функцій f і g, використовуємо функцію

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}, & \lambda > 0 \\ f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t), & \lambda \le 0 \end{cases},$$

де $\Gamma(t)$ – гама-функція, $\theta(t)$ – одинична функція Хевісайда. Зауважимо, що

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu},$$

похідна Рімана-Ліувіля $v^{(\alpha)}(t)$ порядку $\alpha > 0$ визначається формулою

$$v^{(\alpha)}(t) = f_{-\alpha}(t) * v(t),$$

регуляризована похідна дробового порядку α при $m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}$ визначається формулою

$$D^\alpha v(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}v^{(m)}(\tau)d\tau,$$

і тоді

$$D^\alpha v(t) = v^{(\alpha)}(t) - \sum_{j=0}^{m-1} f_{j+1-\alpha}(t)v^{(j)}(0).$$

Нехай $C^{m+\gamma}(\Omega)$ $(C^{m+\gamma}(Q), C^{m+\gamma}(Q\times\mathbb{R}))$ – простір функцій із $C^m(\Omega)$ (відповідно з $C^m(Q), C^m(Q\times\mathbb{R})$), похідні порядків m яких задовольняють умову Гельдера з показником $\gamma\in(0,1)$ (відповідно, за просторовими змінними для кожного $t\in(0,T]$),

$C_{2,\alpha}(Q)=\{v\in C(Q):\ \Delta u,\ D^\alpha_t v\in C(Q)\}$, $C_{2,\alpha}(\bar Q)=C_{2,\alpha}(Q)\cap C(\bar Q)$.

Означення 1. *Пара функцій $(u,g)\in C_{2,\alpha}(\bar Q)\times C(\bar\Omega)$, що задовольняє рівняння (1) в Q і умови (2)-(4), називається класичним розв'язком задачі (1)-(4).*

З означення одержуємо необхідність умов погодження даних задачі

$$F_j|_{\partial\Omega}=0,\ j=1,2,\ \ \Phi_1|_{\partial\Omega}=0.$$

Позначаємо $(L^{reg}v)(x,t)=D^\alpha_t v(x,t)-\Delta v(x,t),\quad (x,t)\in Q,\ v\in C_{2,\alpha}(Q)$.

Означення 2. *Вектор-функція $(G_0(x,t,y,\tau), G_1(x,t,y), G_2(x,t,y))$ називається вектор-функцією Гріна задачі*

$$(L^{reg}u)(x,t)=g_0(x,t),\quad (x,t)\in Q, \tag{5}$$

$$u|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0,\quad u(x,0)=g_1(x),\ u_t(x,0)=g_2(x),\ \ x\in\Omega, \tag{6}$$

якщо при достатньо регулярних g_0, g_1, g_2 функція

$$u(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega G_0(x,t,y,\tau)g_0(y,\tau)dy+\sum_{j=1}^2\int\limits_\Omega G_j(x,t,y)g_j(y)dy,\quad (x,t)\in\overline{Q} \tag{7}$$

є класичним (із $C_{2,\alpha}(\bar Q)$) розв'язком задачі (5), (6).

Відомо (наприклад [7, 13, 14, 17, 18]), що вектор-функція Гріна задачі (5)–(6) існує. Згідно з [7],

$$|D^\kappa_x G_0(x,t,y,\tau)|\le Ct^{-\alpha\frac{n+|\kappa|}{2}+\alpha-1}e^{-c(|x|t^{-\frac{\alpha}{2}})^{\frac{2}{2-\alpha}}}\Psi_{n+|\kappa|-2}(|x|t^{-\frac{\alpha}{2}}),$$

де $\Psi_k(z)=\begin{cases}1, & k<0\\ 1+|ln|z||, & k=0\\ |z|^{-k}, & k>0\end{cases}$ при $|z|<1$, $\quad\Psi_k(z)=\Psi_k(1)$ при $|z|>1$, і подібні оцінки правильні для інших компонент вектор-функції Гріна.

Тут і далі c_0, C_i $(i\in\mathbb{Z}_+)$ – додатні сталі.

Також згідно з [2, 7], функції G_j задовольняють умову Гельдера

$$|G_0(x+\Delta x,t+\Delta t,y,\tau)-G_0(x,t,y,\tau)|\le A_0(x,t,y,\tau)[|\Delta x|+|\Delta t|^{\alpha/2}]^\gamma,$$
$$|G_j(x+\Delta x,t+\Delta t,y)-G_j(x,t,y,\tau)|\le A_j(x,t,y)[|\Delta x|+|\Delta t|^{\alpha/2}]^\gamma,\ \ j=1,2$$

$$\forall(x,t),(x+\Delta x,t+\Delta t)\in\bar Q,(y,\tau)\in\bar Q,$$

де невід'ємні функції A_j мають такого ж вигляду оцінки, як G_j, $j=0,1,2$. Подібні оцінки правильні і для похідних вектор-функції Гріна.

З результатів [2, 7, 13] випливає, що при обмежених $g_0 \in C^\gamma(Q)$, $g_j \in C^\gamma(\Omega)$, $j = 1, 2$ існує єдиний розв'язок $u \in C_{2,\alpha}(\bar{Q})$ задачі (5)–(6). Він визначений формулою (7).

У [5] при $n = 2$ та $n = 3$ знайдено достатні умови розв'язності першої крайової задачі для півлінійного рівняння дробової дифузії з правою частиною $f(u)$ при $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ і $|f'(u)| \leq C|u|^{b-1}$ для деяких $b > 1$.

Переходимо до оберненої задачі (1)–(4).

2 Єдиність розв'язку оберненої задачі

Теорема 1. *Нехай* $\alpha \in (1, 2)$, $\eta_1 \in C^2[0, T]$, $\eta_1(T) = \eta_1'(T) = 0$, $F_0 \in C^{1+\gamma}(Q \times \mathbb{R})$ *і обмежена,*

$$P_v(x, T) := \frac{1}{T} \int_0^T F_0(x, t, v)\eta_1(t)dt \neq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega},\ T > 0,\ v \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

$$\left|\frac{F_0(x, t, v)}{P_v(x, T)}\right| \leq B(T) \ \ \forall (x, t) \in Q,\ v \in \mathbb{R} \tag{9}$$

і $B(T)$ *обмежена або функція* $T^\alpha B(T)$ *монотонно неспадна. Тоді розв'язок* $(u, g) \in C_{2,\alpha}(\bar{Q}) \times C(\bar{\Omega})$ *задачі (1)-(4) єдиний при деякому* $T > 0$.

Доведення. Нехай $(u_1, g_1), (u_2, g_2) \in C_{2,\alpha}(\bar{Q}) \times C(\bar{\Omega})$ – два розв'язки задачі (1)-(4). Позначаючи $u = u_1 - u_2$, $g = g_1 - g_2$, одержимо рівняння

$$D_t^\alpha u - \Delta u = g_1(x)F_0(x, t, u_1) - g_2(x)F_0(x, t, u_2).$$

За лемою Адамара

$$F_0(x, t, u_1) - F_0(x, t, u_2) = F_{01}(x, t)u$$

з відомою, залежною від u_1, u_2, функцією $F_{01} \in C^\gamma(Q)$ і обмеженою.

Попереднє рівняння набуває вигляду

$$D_t^\alpha u - \Delta u = g_2(x)F_{01}(x, t)u + g(x)F_0(x, t, u_1(x, t)), \quad (x, t) \in Q. \tag{10}$$

З умов (2) і (3) одержуємо

$$u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \ \ u(x, 0) = 0, \ u_t(x, 0) = 0 \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{11}$$

а з умови (4)

$$\int_0^T u(x, t)\eta_1(t)dt = 0, \ x \in \bar{\Omega}. \tag{12}$$

Зауважимо, що за умови (12)

$$\int_0^T \Delta u(x, t)\eta_1(t)dt = \Delta \int_0^T u(x, t)\eta_1(t)dt = 0,$$

а за припущень щодо η_1, враховуючи (11), для всіх $x \in \bar{\Omega}$ матимемо

$$\int_0^T D_t^\alpha u(x,t)\eta_1(t)dt = \int_0^T [f_{2-\alpha}(t) * u_{tt}(x,t)]\eta_1(t)dt = \int_0^T \Big(\int_0^t f_{2-\alpha}(t-s)u_{ss}(x,s)ds\Big)\eta_1(t)dt$$

$$= \int_0^T u_{ss}(x,s)\Big(\int_s^T f_{2-\alpha}(t-s)\eta_1(t)dt\Big)ds = \int_0^T u_{ss}(x,s)\Big(\int_0^{T-s} f_{2-\alpha}(\tau)\eta_1(\tau+s)d\tau\Big)ds$$

$$= -\int_0^T u_s(x,s)\Big(\int_0^{T-s} f_{2-\alpha}(\tau)\eta_1'(\tau+s)d\tau\Big)ds = -\int_0^T u_s(x,s)\Big(\int_s^T f_{2-\alpha}(t-s)\eta_1'(t)dt\Big)ds$$

$$= \int_0^T u(x,t)(f_{2-\alpha}\widehat{*}\eta_1^{''})(t)dt.$$

Тут позначено $\quad (f_{2-\alpha}\widehat{*}\eta_1^{''})(t) = \int_t^T f_{2-\alpha}(s-t)\eta_1^{''}(s)ds.$

За припущень теореми, враховуючи властивості функції G_0 і результати [2], одержуємо, що u є розв'язком крайової задачі (10), (11) тоді й тільки тоді, коли вона задовольняє у $C(\bar{Q})$ інтегральне рівняння

$$\begin{aligned} u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_\Omega G_0(x,t,y,\tau)\big[g_2(y)F_{01}(y,\tau)u(y,\tau) \\ +g(y)F_0(y,\tau,u_1(y,\tau))\big]dy, \quad (x,t) \in \bar{\Omega}. \end{aligned} \tag{13}$$

Застосовуючи до обох частин рівняння (10) умову перевизначення (12), одержуємо

$$\int_0^T u(x,t)(f_{2-\alpha}\widehat{*}\eta_1^{''})(t)dt$$

$$= g(x)\int_0^T F_0(x,t,u_1(x,t))\eta_1(t)dt + g_2(x)\int_0^T F_{01}(x,t)u(x,t)\eta_1(t)dt, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Звідси, враховуючи припущення (8) і позначаючи $P_{u_1}(x,T) = P_1(x,T)$, знаходимо невідому функцію

$$g(x) = \frac{1}{TP_1(x,T)}\int_0^T u(x,t)\big[f_{2-\alpha}(t)\widehat{*}\eta_1^{''}(t) - g_2(x)F_{01}(x,t)\eta_1(t)\big]dt, \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{14}$$

Підставляючи знайдений вираз для $g(x)$ (через u) в (13), одержуємо

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega G_0(x,t,y,\tau) g_2(y) F_{01}(y,\tau) u(y,\tau) dy$$
$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega G_0(x,t,y,\tau) \frac{F_0(y,\tau,u_1(y,\tau))}{TP_1(y,T)} dy \int\limits_0^T \big[(f_{2-\alpha} \widehat{*} \eta_1^{''})(s)$$
$$- g_2(y) F_{01}(y,s) \eta_1(s)\big] u(y,s) ds, \quad (x,t) \in \bar{Q},$$

що еквівалентно рівнянню

$$u(x,t) = \int\limits_0^T ds \int\limits_\Omega \Big\{ \theta(t-s) G_0(x,t,y,s) g_2(y) F_{01}(y,s)$$
$$+ \int\limits_0^t G_0(x,t,y,\tau) \big[(f_{2-\alpha} \widehat{*} \eta_1^{''})(s)$$
$$- g_2(y) F_{01}(y,s) \eta_1(s)\big] \frac{F_0(y,\tau,u_1(y,\tau))}{TP_1(y,T)} d\tau \Big\} u(y,s) dy, \quad (x,t) \in Q.$$

Це лінійне однорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$u(x,t) = \int\limits_0^T ds \int\limits_\Omega K_1(x,t,y,s) u(y,s) dy, \quad (x,t) \in \bar{Q} \tag{15}$$

з ядром

$$K_1(x,t,y,s) = \theta(t-s) G_0(x,t,y,s) g_2(y) F_{01}(y,s)$$
$$+ \int\limits_0^t G_0(x,t,y,\tau) \big[(f_{2-\alpha} \widehat{*} \eta_1^{''})(s) - g_2(y) F_{01}(y,s) \eta_1(s)\big] \frac{F_0(y,\tau,u_1(y,\tau))}{TP_1(y,T)} d\tau.$$

Тут $g_2(y) F_{01}(y,s)$ і $(f_{2-\alpha} \widehat{*} \eta_1^{''})(s) - g_2(y) F_{01}(y,s) \eta_1(s)$ – відомі неперервні й обмежені в $\bar{Q}$ певною сталою $M > 0$ функції.

Знайдемо оцінку ядра $K_1(x,t,y,s)$, використовуючи наведені вище оцінки функції

$G_0(x,t,y,\tau)$. При $n\ge 3$ маємо

$$|K_1(x,t,y,s)|\le M\ \big[|G_0(x,t,y,s)|+\frac{B(T)}{T}\int\limits_0^t|G_0(x,t,y,\tau)|d\tau\big],$$

$$\int\limits_\Omega|K_1(x,t,y,s)|dy\le MC_0\Big\{\theta(t-s)\Big[\int\limits_{y\in\Omega:\ |y-x|^2<(t-s)^\alpha}\frac{|x-y|^{2-n}}{t-s}e^{-c_0\left(\frac{|x-y|^2}{(t-s)^\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}}dy$$
$$+\int\limits_{y\in\Omega:\ |y-x|^2>(t-s)^\alpha}(t-\tau)^{\frac{\alpha(2-n)}{2}-1}e^{-c_0\left(\frac{|x-y|^2}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}}dy\Big]$$
$$+\frac{B(T)}{T}\int\limits_0^t\Big[\int\limits_{y\in\Omega:\ |y-x|^2<(t-\tau)^\alpha}\frac{|x-y|^{2-n}}{t-\tau}e^{-c_0\left(\frac{|x-y|^2}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}}dy$$
$$+\int\limits_{y\in\Omega:\ |y-x|^2>(t-\tau)^\alpha}(t-\tau)^{\frac{\alpha(2-n)}{2}-1}e^{-c_0\left(\frac{|x-y|^2}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}}dy\Big]d\tau\Big\}$$

$$\le C_1\ \Big\{\theta(t-s)\Big[(t-s)^{\alpha-1}\int\limits_0^1 ze^{-c_0z^{\frac{2}{2-\alpha}}}dz+(t-s)^{\alpha-1}\int\limits_1^\infty z^{n-1}e^{-c_0z^{\frac{2}{2-\alpha}}}dz\Big]$$
$$+\frac{B(T)}{T}\int\limits_0^t\Big[(t-\tau)^{\alpha-1}\int\limits_0^1 ze^{-c_0z^{\frac{2}{2-\alpha}}}dz+(t-\tau)^{\alpha-1}\int\limits_1^\infty z^{n-1}e^{-c_0z^{\frac{2}{2-\alpha}}}dz\Big]\frac{d\tau}{T}\Big\}$$
$$\le C_2\big[\theta(t-s)(t-s)^{\alpha-1}+B(T)\frac{t^\alpha}{T}\big],$$

$$\int\limits_0^T ds\int\limits_\Omega|K_1(x,t,y,s)|dy\le C_3\Big[\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}ds+B(T)t^\alpha\Big]\le C_3\max\{\frac{1}{\alpha},B(T)\}T^\alpha,$$

і подібно у випадку $n=1,2$.

Отож, ядро $K_1(x,t,y,s)$ лінійного однорідного інтегрального рівняння Фредгольма (15) інтегровне, і при достатньо малих $T>0$ існує єдиний його розв'язок $u(x,t)=0$, $(x,t)\in\bar{Q}$ у просторі $C(\bar{Q})$. Тоді з (14) одержуємо $g(t)=0$, $t\in[0,T]$.

Також

$$|K_1(x+\Delta x,t+\Delta t,y,\tau)-K_1(x,t,y,\tau)|\le M\ |G_0(x+\Delta x,t+\Delta t,y,\tau)-G_0(x,t,y,\tau)|$$
$$+\frac{MB(T)}{T}\int\limits_0^t|G_0(x+\Delta x,t+\Delta t,y,\tau)-G_0(x,t,y,\tau)|d\tau$$

$$\le MA_0(x,t,y,\tau)[|\Delta x|+|\Delta t|^{\alpha/2}]^\gamma+\frac{MB(T)}{T}\int\limits_0^t A_0(x,t,y,\tau)d\tau[|\Delta x|+|\Delta t|^{\alpha/2}]^\gamma$$
$$\le MA_{01}(x,t,y,\tau)[|\Delta x|+|\Delta t|^{\alpha/2}]^\gamma,$$

де $A_{01}(x,t,y,\tau) = A_0(x,t,y,\tau) + \frac{B(T)}{T}\int\limits_0^t A_0(x,t,y,\tau)d\tau$, а тому має такого ж вигляду оцінки, як $G_0(x,t,y,\tau)$. Подібно одержуємо, що й похідні ядра $K_1(x,t,y,\tau)$ задовольняють умову Гельдера.

Враховуючи результати [2], одержуємо, що кожний неперервний в $\bar{Q}$ розв'язок інтегрального рівняння (15) (у нашому випадку тривіальний) є розв'язком із $C_{2,\alpha}(\bar{Q})$ задачі (10), (11). Очевидно, він задовольняє умову перевизначення (12).

□

Висновки

Знайдено достатні умови локальної за часом єдиності класичного розв'язку оберненої крайової задачі відновлення залежного від просторових змінних неперервного множника у правій частині півлінійного дифузійно-хвильового рівняння з дробовою похідною за часом при інтегральній за часом умові перевизначення.

Одержаний результат поширюється на випадок загальнішого рівняння з еліптичним диференціальним виразом, що має достатньо гладкі, залежні від просторових змінних коефіцієнти.

Список літератури

[**1**] Aleroev T.S., Kirane M., Malik S.A. *Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determination condition.* EJDE. 2013, **2013** (270), 1-16.

[**2**] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004.

[**3**] Janno J., Kasemets K. *Uniqueness for an inverse problem for a semilinear time-fractional diffusion equation.* Inverse Probl. Imaging. 2017, **11** (1), 125-149. doi: 10.3934/ipi.2017007

[**4**] Jin B., Rundell W. *A turorial on inverse problems for anomalous diffusion processes.* Inverse Problems. 2015, **31**, 035003. –doi:10.1088/0266-5611/31/3/035003.

[**5**] Kian Y., Yamamoto M. *On existence and uniqueness of solutions for semilinear fractional wave equations.* Fract. Calculus Appl. Anal. 2017. **20** 117-138.

[**6**] Kinash N., Janno Ja. *An Inverse Problem for a Generalized Fractional Derivative with an Application in Reconstruction of Time- and Space-Dependent Sources in Fractional Diffusion and Wave Equations.* Mathematics. 2019, **7** (19). ARTN 1138.10.3390/math7121138.

[**7**] Kochubei A.N. *Fractional Hyperbolic Systems.* Fract. Calc. Appl. Anal. 2013. **16** (4) 860-873. DOI: 10.2478/s13540-013-0053-4

[**8**] Lopushanska H., Lopushansky A. *Inverse problem with a time-integral condition for a fractional diffusion equation.* Math. Meth. Appl. Sci. 2019, **42** (6), 3327-3340. https://doi.org/10.1002/mma.5587

[**9**] Lopushansky A., Lopushanska H., Myaus O. *An inverse fractional source problem in a space of periodic spatial distributions.* Fractional differ. calc. 2016, **6** (2), 267-274. http://dx.doi.org/10.7153/fdc-06-17.

[**10**] Lopushanska H., Lopushansky A., Myaus O. *Inverse problem in a space of periodic spatial distributions for a time fractional diffusion equation.* EJDE. 2016, **2016** (14), 1-9. http://ejde.math.txstate.edu or http://ejde.math.unt.edu

[**11**] Lopushanska H., Rapita V. *Inverse problem to fractional diffusion equation with unknown young coefficient.* Visnyk Lviv. Un-ty. – Ser. Mech.-Mat. – 2015, Issue 80.–P. 88-99.

[**12**] Lopushanska H., Rapita V. *Inverse coefficient problem for semi-linear fractional telegraph equation.* EJDE. – 2015. – V. 2015, №153. – P. 1-13. http://ejde.math.txstate.edu/2015/153.

[**13**] Mainardi F. *The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation.* Appl. Math. Lett. 1996, **9** (6), 23-28.

[**14**] Povstenko Y. Linear fractional diffusion-wave equation for scientists and engeneers. Birkhauser, New-York, 2015. ISBN: 978-3-319-17953-7.

[**15**] Prilepko A.I., Kostin A.B. *On some inverse problems for parabolic equations with finite and integral observation.* Mat. Sb. 1992, **183** (4), 49-68.

[**16**] Sakamoto K., Yamamoto M. *Initial value/boundary-value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems.* J. Math. Anal. Appl. 2011, **382** (1), 426-447.

[**17**] Schneider W.R., and Wyss W. *Fractional diffusion and wave equations.* J. Math. Phys. 1989, **30**, 134-144.

[**18**] Voroshylov A.A., Kilbas A.A. *Conditions of the existence of classical solution of the Cauchy problem for diffusion-wave equation with Caputo partial derivative.* Dokl. Ak. Nauk. 2007, **414** (4), 1-4.

[**19**] Wang Jun-Gang, Ran Yu-Hong. *An iterative method for an inverse source problem of time-fractional diffusion equation.* Inverse Problems in Science and Engineering. 2018, **26** (10).

[**20**] Wen J., Cheng J.-F. *The method of fundamental solution for the inverse source problem for the space-fractional diffusion equation.* Inverse Problems in Science and Engineering. 2018, **26** (7), 925-941.

[**21**] Zhang Y. and Xu X. *Inverse source problem for a fractional diffusion equation.* Inverse Problems. 2011, **27**, P. 1-12.

Надійшло 07.11.2022

Lopushanska H.P. *Inverse source problem for a semilinear fractional diffusion-wave equation under a time-integral condition*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 156–164.

We study the inverse boundary value problem on determining a space-dependent component in the right-hand side of semilinear time fractional diffusion-wave equation. We find sufficient conditions for a time-local uniqueness of the solution under the time-integral additional condition

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\eta_1(t)dt = \Phi_1(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

where u is the unknown solution of the first boundary value problem for such equation, η_1 and Φ_1 are the given functions. We use the method of the Green's function.