Бокало М. М.

Мішана задача для нелінійних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності в необмежених областях без умов на нескінченності

У даній роботі доведено однозначну розв'язність мішаної задачі для деяких анізотропних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності в необмежених областях без умов нескінченності. Також отримано апріорну оцінку узагальнених розв'язків цієї задачі.

Ключові слова і фрази: мішана задача, початково-крайова задача, параболічне рівняння вищого порядку, нелінійне параболічне рівняння, узагальнений розв'язок.

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна (Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine) (Бокало М. М.)
e-mail: *mm.bokalo@gmail.com (Бокало М.М.)*

Вступ

В даній роботі розглядаємо мішану або, іншими словами, початково-крайову задачу (зокрема, задачу Коші) для деяких параболічних рівнянь у необмежених областях відносно просторових змінних. Як відомо, у випадку лінійних рівнянь для забезпечення єдиності розв'язку такої задачі потрібно накладати певні обмеження на його поведінку при $|x| \to +\infty$. Вперше такий результат було отримано в [25] у випадку задачі Коші для рівняння теплопровідності

$$u_t - \Delta u = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T], \qquad u|_{t=0} = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Там було доведено, що задача (1) має єдиний класичний розв'язок в при додатковій умові на його поведінку на нескінченності:

$$|u(x,t)| \leqslant A\, e^{a|x|^2}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T], \tag{2}$$

де a, A — сталі (залежні від u). Також було показано, що ця умова є суттєвою, а точніше, було доведено, що задача (1) з $u_0 \equiv 0$ має нетривіальні розв'язки із зростанням

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35D30, 35K25, 35K30, 35K35, 35K55.

$Ae^{a|x|^{2+\varepsilon}}$ при $|x| \to +\infty$ для будь-якого $\varepsilon > 0$. Зауважимо, що обмеження (2) можна інтерпретувати як аналог крайової умови на нескінченності. Подібні результати для як для лінійних, так і нелінійних параболічних рівнянь з широких класів були отримані в [2, 9, 14, 20, 24] та інших. Також відмітимо, що для розв'язності мішаних задач для згаданих вище параболічних рівнянь потрібно накласти певні обмеження щодо поведінки вхідних даних при $|x| \to +\infty$. Зокрема, у статті [25] було показано, що класичний розв'язок задачі (1), (2) існує, якщо u_0 задовольняє умову:

$$|u_0(x)| \leqslant B\, e^{b|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

де b, B — які-небудь сталі.

Однак існують нелінійні параболічні рівняння, для яких відповідні мішані задачі однозначно розв'язні без будь-яких умов на нескінченності. Вперше такий результат було отримано в [10] для рівняння

$$u_t - \Delta u + |u|^{p-2}u = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T],$$

де Ω — необмежена область в $\mathbb{R}^n$, $p > 2$ — стала. Пізніше подібні результати були отримані для інших нелінійних параболічних рівнянь, зокрема, в роботах [**?**, 1, 3–5, 8, 10, 13, 19].

Нелінійні диференціальні рівняння зі змінними показниками нелінійності виникають при математичному моделюванні різних природних процесів. Зокрема, ці рівняння описують електрореологічні потоки речовин, процеси відновлення зображень, електричний струм у провідниках зі змінним полем температури (див. [22]). Такі рівняння інтенсивно вивчалися в [6, 7, 11, 16, 18, 21, 23] та багатьох інших роботах. При цьому використовувалися узагальнення просторів Лебега і Соболєва (див. [12, 15]).

У даній роботі доведено однозначну розв'язність мішаної задачі для анізотропних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності в необмежених областях без умов нескінченності. Як нам відомо, раніше мішані задачі для досліджуваних нами рівнянь не розглядалися.

Робота складається зі вступу і трьох розділів. В першому з них даємо постановку задачі і формулювання основного результату. В другому розділі наводимо допоміжні твердження, які використанні в третьому розділі для обґрунтування основного результату.

1 Постановка задачі і формулювання основного результату

Нехай n, m — натуральні числа, M — підмножина множини $\{0, 1, \ldots, m\}$ така, що $\{0, m\} \subset M$, і $M_0 := M \setminus \{0\}$. Позначимо через N кількість мультиіндексів $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ розмірності n (впорядкованих наборів з n цілих невід'ємних чисел), довжини яких $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ є елементами множини M. Нехай $\mathbb{R}^n$ — лінійний простір, елементами якого є впорядковані набори дійсних чисел $x = (x_1, \ldots, x_n)$ і на якому введена норма $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$. Через $\mathbb{R}^N$ позначаємо лінійний простір, складений з впорядкованих наборів з N дійсних чисел $\xi = (\xi_{\widehat{0}}, \ldots, \xi_\alpha, \ldots) \equiv (\xi_\alpha : |\alpha| \in M)$, компоненти яких пронумеровані мультиіндексами розмірності n, що мають довжини з M і впорядковані лексикографічно (це означає, що $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ передує $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, коли або $|\alpha| < |\beta|$, або $|\alpha| = |\beta|$ і $\alpha_k > \beta_k$, де $k := \min\{j \mid \alpha_j \neq \beta_j\}$). Тут і далі $\widehat{0} = (0, \dots, 0)$ — мультиіндекс, складений з нулів. Покладемо $|\xi| := \Big(\sum\limits_{|\alpha| \in M} |\xi_\alpha|^2\Big)^{1/2}$ для довільного $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Нехай Ω — необмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$. Припустимо, що межа $\Gamma := \partial\Omega$ області Ω є кусково-гладкою поверхнею і позначимо через ν одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ. Нехай $T > 0$ — яке-небудь фіксоване число. Приймемо

$$Q := \Omega \times (0, T), \quad \Sigma := \Gamma \times (0, T).$$

Розглянемо *задачу*: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$u_t + \sum_{|\alpha| \in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x, t, \delta u) = \sum_{|\alpha| \in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x, t), \quad (x, t) \in Q, \tag{3}$$

крайові умови

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_\Sigma = 0\,, \quad j = \overline{0, m-1}, \tag{4}$$

та початкову умову

$$u(x, 0) = u_0(x)\,, \quad x \in \Omega, \tag{5}$$

де $a_\alpha : Q \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $f_\alpha : Q \to \mathbb{R}$, $|\alpha| \in M$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ — задані функції, які задовольняють певні умови, про які буде сказано пізніше. Тут і далі для функції $v : \Omega \to \mathbb{R}$ позначаємо через δv впорядкований набір з похідних $D^\alpha v \equiv \dfrac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} v$ функції v порядків $|\alpha| \in M$ (правило впорядкування таке ж, як для компонентів векторів $\xi \in \mathbb{R}^N$).

Далі сформульовану вище *мішану задачу для рівняння* (3) *з крайовими умовами* (4) *і початковою умовою* (5) коротко називатимемо *задачею* (3) — (5).

Ми будемо розглядати узагальнені розв'язки задачі (3) — (5), а для цього введемо необхідні позначення і зробимо відповідні припущення щодо вхідних даних цієї задачі.

Спочатку введемо потрібні нам далі *функційні простори.* Нехай G — яка-небудь область в $\mathbb{R}^n$, $r : G \to \mathbb{R}$ — вимірна функція така, що $r(x) \geq 1$ для м.в. $x \in G$, причому, якщо $r(x) > 1$ для майже всіх $x \in G$, то $r'(x)$, $x \in G$, — функція, яка визначена рівністю $\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{r'(x)} = 1$ для майже всіх $x \in G$. Під $L_{r(\cdot)}(G)$ розуміємо лінійний простір (класів) вимірних функцій $v : G \to \mathbb{R}$, для яких функціонал $\rho_{G,r}(v) := \int\limits_G |v(x)|^{r(x)}\, dx$ приймає скінчені значення, з нормою $\|v\|_{L_{r(\cdot)}(G)} := \inf\{\lambda > 0 \mid \rho_{G,r}(v/\lambda) \leq 1\}$. Цей простір є банаховим і його називають *узагальненим простором Лебега* або *простором Лебега зі змінним показником* (див., наприклад, [12]). Зауважимо, що коли $r(x) = r_0 \equiv \mathrm{const} \geq 1$ для м.в. $x \in G$, то $\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(G)} = \|\cdot\|_{L_{r_0}(G)}$. Відомо, що якщо $1 < \operatorname*{ess\,inf}\limits_{x \in G} r(x) \leq \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in G} r(x) < \infty$, то спряжений до $L_{r(\cdot)}(G)$ можна ототожнити з $L_{r'(\cdot)}(G)$. Аналогічно як $L_{r(\cdot)}(G)$ визначаємо простір $L_{r(\cdot)}(D)$, де $D = G \times (0, T)$, використовуючи функціонал $\rho_{D,r}(w) := \iint\limits_D |w(x, t)|^{r(x)}\, dxdt$ замість $\rho_{G,r}(v)$.

Через $Bd(\Omega)$ позначимо множину всеможливих обмежених підобластей області Ω. Нехай $p:\Omega\to\mathbb{R}$ — вимірна функція така, що $p(x)\ge 1$ для м.в. $x\in\Omega$, причому, якщо $p(x)>1$ для майже всіх $x\in\Omega$, то $p'(x)$, $x\in\Omega$, — функція, яка визначена рівністю $\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{p'(x)}=1$ для майже всіх $x\in\Omega$. Через $L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ позначаємо лінійний простір (класів) вимірних функцій $v:\Omega\to\mathbb{R}$, звуження яких на довільну область $\Omega'\in Bd(\Omega)$ належать $L_{p(\cdot)}(\Omega')$, із системою півнорм $\{\|\cdot\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega')}\,|\,\Omega'\in Bd(\Omega')\}$. Цей простір є повним лінійним локально опуклим простором. Так само як $L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ вводимо повний лінійний локально опуклий простір $L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ із системою півнорм $\{\|\cdot\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega'\times(0,T))}\,|\,\Omega'\in Bd(\Omega')\}$. Зауважимо, що послідовність $\{v_l\}_{l=1}^{\infty}$ *слабко* збігається до v в $L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ (відповідно, в $L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$), якщо для будь-якої області $\Omega'\in Bd(\Omega)$ послідовність $\{v_l|_{\Omega'}\}_{l=1}^{\infty}$ (відповідно, $\{v_l|_{\Omega'\times(0,T)}\}_{l=1}^{\infty}$) збігається до $v|_{\Omega'}$ (відповідно, до $v|_{\Omega'\times(0,T)}$) слабко в $L_{p(\cdot)}(\Omega')$ (відповідно, в $L_{p(\cdot)}(\Omega'\times(0,T))$).

Також введемо простір $H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}):=\{v\in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\,\big|\,D^\alpha v\in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\ |\alpha|\le m\}$, який із системою півнорм: $\{\|\cdot\|_{H^m(\Omega')}\,\big|\,\Omega'\in Bd(\Omega)\}$ є повним лінійним локально опуклим простором. Тут і далі $H^m(\Omega'):=\{v\in L_2(\Omega')\,\big|\ D^\alpha v\in L_2(\Omega'),\ |\alpha|\le m\}$ — стандартний простір Соболєва з нормою $\|v\|_{H^m(\Omega')}:=\Big(\int_{\Omega'}\sum_{|\alpha|\le m}|D^\alpha v|^2\,dx\Big)^{1/2}$. Послідовність $\{v_j\}$ збігається до v в просторі $H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, якщо послідовність $\{v_j\big|_{\Omega'}\}$ збігається до $v\big|_{\Omega'}$ в просторі $H^m(\Omega')$ для будь-якої $\Omega'\in Bd(\Omega)$. Нехай $C^m_c(\Omega)$ — лінійний простір, складений з m раз неперервно диференційовних і фінітних на Ω функцій, а $C^m_c(\overline{\Omega})$ — лінійний простір, складений з m раз неперервно диференційовних на $\overline{\Omega}$ функцій, які мають обмежені носії, тобто їх носії є компактними множинами в $\overline{\Omega}$. Через $\overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ позначимо замикання простору $C^m_c(\Omega)$ в $H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, а через $\overset{\circ}{H}{}^m_c(\Omega)$ — підпростір простору $\overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, складений з функцій, які мають обмежений носій.

Будемо розглядати простір $H^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}):=\{w\in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\,\big|\,D^\alpha w\in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q}),\ |\alpha|\le m\}$, який із системою півнорм: $\{\|\cdot\|_{H^{m,0}(\Omega'\times(0,T))}\,\big|\,\Omega'\in Bd(\Omega)\}$ є повним лінійним локально опуклим простором. Тут і далі $H^{m,0}(\Omega'\times(0,T)):=\{w\in L_2(\Omega'\times(0,T))\,\big|\,D^\alpha w\in L_2(\Omega'\times(0,T)),\ |\alpha|\le m\}$ — стандартний простір Соболєва з нормою $\|v\|_{H^{m,0}(\Omega'\times(0,T))}:=\Big(\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega'}\sum\limits_{|\alpha|\le m}|D^\alpha v|^2\,dxdt\Big)^{1/2}$. Послідовність $\{w_j\}$ збігається до w в просторі $H^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, якщо послідовність $\{w_j\big|_{\Omega'\times(0,T)}\}$ збігається до $w\big|_{\Omega'\times(0,T)}$ в просторі $H^{m,0}(\Omega'\times(0,T))$ для будь-якої $\Omega'\in Bd(\Omega)$. Через $\overset{\circ}{H}{}^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ позначимо підпростір простору $H^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, складений з функцій w таких, що $w(\cdot,t)\in\overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ для майже всіх $t\in(0,T)$.

Під простором $C\big([0,T];L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big)$ розумітимемо простір функцій $w(x,t)$, $(x,t)\in Q$, таких, що для довільної обмеженої підобласті Ω' області Ω (тобто $\Omega'\in Bd(\Omega)$) їх звуження на множину $\Omega'\times(0,T)$ належить простору $C\big([0,T];L_2(\Omega')\big)$ з нормою $\|w\|_{C\left([0,T];L_2(\Omega')\right)}:=\max_{t\in[0,T]}\|w(t)\|_{L_2(\Omega')}$. Простір $C\big([0,T];L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big)$ є повним лінійним локально опуклим простором із системою півнорм $\{\|\cdot\|_{C\left([0,T];L_2(\Omega')\right)}\,|\,\Omega'\in Bd(\Omega)\}$.

Тепер перейдемо до умов на вхідні дані досліджуваної задачі.

Нехай

(**P**) $p : \Omega \to \mathbb{R}$ — вимірна функція така, що

$$p^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p(x) > 2\,, \qquad p^+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p(x) < \infty.$$

Під $\mathbb{A}_p$, де p — функція, що задовольняє умову (**P**), розумітимемо множину, елементами якої є впорядковані набори $(a_\alpha) := (a_{\widehat{0}}, \ldots, a_\alpha, \ldots)$ з N визначених на $Q \times \mathbb{R}^N$ дійснозначних функцій, які пронумеровані мультиіндексами розмірності n, що мають довжини з M та впорядковані лексикографічно, причому компоненти набору (a_α) задовольняють умови:

($\mathbf{A_1}$) для кожного $\alpha\,, |\alpha| \in M$, функція $a_\alpha(x,t,\xi)$, $(x,t,\xi) \in Q \times \mathbb{R}^N$, є каратеодорівською, тобто для майже всіх $(x,t) \in Q$ функція $a_\alpha(x,t,\cdot) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ є неперервною, а для всіх $\xi \in \mathbb{R}^N$ функція $a_\alpha(\cdot,\cdot,\xi) : Q \to \mathbb{R}$ є вимірною; крім того, $a_\alpha(x,t,0) = 0$, $|\alpha| \in M$, для майже всіх $(x,t) \in Q$;

($\mathbf{A_2}$) для майже всіх $(x,t) \in Q$ та будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^N$ виконуються нерівності

$$|a_{\widehat{0}}(x,t,\xi)| \le h_{\widehat{0}}(x,t)\left(|\xi|^{2/p'(x)} + |\xi_{\widehat{0}}|^{p(x)-1}\right) + g_{\widehat{0}}(x,t),$$

$$|a_\alpha(x,t,\xi)| \le h_\alpha(x,t)|\xi| + g_\alpha(x,t), \quad |\alpha| \in M_0,$$

де $h_\alpha \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $|\alpha| \in M$, $g_{\widehat{0}} \in L_{p'(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $g_\alpha \in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $|\alpha| \in M_0$;

($\mathbf{A_3}$) існують сталі $B_1 > 0$ і $B_2 \ge 0$ такі, що для кожного $\alpha, |\alpha| \in M_0$, майже всіх $(x,t) \in Q$ та будь-яких ξ і η з $\mathbb{R}^N$ виконується нерівність

$$|a_\alpha(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\eta)| \le \Big(B_1 \sum_{|\alpha|\in M_0} |\xi_\alpha - \eta_\alpha|^2 \,+\, B_2|\xi_{\widehat{0}} - \eta_{\widehat{0}}|^2\Big)^{1/2};$$

($\mathbf{A_4}$) існують сталі $K_1 > 0$, $K_2 \ge 0$, $K_3 > 0$ такі, що для майже всіх $(x,t) \in Q$ та будь-яких ξ і η з $\mathbb{R}^N$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha|\in M} (a_\alpha(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha)$$
$$\ge K_1 \sum_{|\alpha|\in M_0} |\xi_\alpha - \eta_\alpha|^2 \,+\, K_2\,|\xi_{\widehat{0}} - \eta_{\widehat{0}}|^2 + K_3\,|\xi_{\widehat{0}} - \eta_{\widehat{0}}|^{p(x)},$$

причому, якщо виконується одна з двох умов: $B_2 > 0$ або $p^+ \ge 2(n+1)/n$, то $K_2 > 0$.

Зауваження 1. *Якщо $M = \{0, m\}$, $p^+ \in (2; 2(n+1)/n)$, то, зокрема, елементами множини $\mathbb{A}_p$ є набори (a_α), компонентами яких є функції $a_{\widehat{0}}(x,t,\xi) := \widetilde{a}_{\widehat{0}}(x,t)|\xi_{\widehat{0}}|^{p(x)-2}\xi_{\widehat{0}}$, $a_\alpha(x,t,\xi) = \widetilde{a}_\alpha(x,t)\xi_\alpha$, $(x,t,\xi) \in Q \times \mathbb{R}^N$, для кожного α, $|\alpha| = m$, де $\widetilde{a}_\alpha$, $|\alpha| \in M$, — вимірні обмежені додатні і відділені від нуля функції. Одному з таких наборів буде відповідати рівняння*

$$u_t + (-\Delta)^m u + \widetilde{a}_{\widehat{0}}(x,t)|u|^{p(x)-2}u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q.$$

Нехай $\mathbb{F}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ — множина, елементами якої є впорядковані набори $(f_\alpha := (f_{\widehat{0}}, \ldots, f_\alpha, \ldots)$ з N визначених на Q дійснозначних функцій, які пронумеровані так само, як компоненти елементів множини $\mathbb{A}_p$, і функції з будь-якого такого набору задовольняють умову:
$(\mathbf{F})$ $f_{\widehat{0}} \in L_{p'(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q}),\ f_\alpha \in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q})\ \forall \alpha,\ |\alpha| \in M_0$.

Позначимо

$$\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q}) := \overset{\circ}{H}{}^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C\big([0,T]; L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big).$$

Скажемо, що послідовність $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ збігається до v в $\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, якщо для будь-якої області $\Omega' \in Bd(\Omega)$ послідовність $\{v_k\big|_{\Omega'\times(0,T)}\}_{k=1}^\infty$ збігається до $v|_{\Omega'\times(0,T)}$ в $H^{m,0}(\Omega' \times (0,T)) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega' \times (0,T)) \cap C\big([0,T]; L_2(\Omega')\big)$.

Означення 1. *Нехай $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p$, $(f_\alpha) \in \mathbb{F}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ і $u_0 \in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Узагальненим розв'язком задачі (3) — (5) називається функція $u \in \mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, яка задовольняє початкову умову (5) та інтегральну рівність*

$$\iint\limits_Q \Big[-u\,\psi\varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta u)\, D^\alpha\psi\varphi\Big]\, dxdt = \iint\limits_Q \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha\psi\varphi\, dxdt \tag{6}$$

для будь-яких $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^m_c(\Omega) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega)$, $\varphi \in C_c^1(0,T)$.

Нас буде цікавити існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі (3) — (5). Для формулювання відповідного результату і його обґрунтування будемо використовувати такі позначення: для довільного $R > 0$

$$\Omega_R \ \text{— зв'язна компонента множини}\ \ \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n \;\big|\; |x| < R\},$$

$$Q_R := \Omega_R \times (0,T), \quad \Sigma_R := \Gamma_R \times (0,T).$$

Теорема 1. *Нехай p задовольняє умову $(\mathbf{P})$, $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p$, $(f_\alpha) \in \mathbb{F}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ і $u_0 \in L_{2,loc}(\overline{\Omega})$. Тоді задача (3) — (5) має єдиний узагальнений розв'язок і він для будь-яких R, R_0 таких, що $0 < R_0 \le R/2$, $R \ge 1$, задовольняє оцінку*

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u(x,t)|^2\, dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[\sum_{|\alpha|\in M_0} |D^\alpha u(x,t)|^2 + K_2|u(x,t)|^2 + |u(x,t)|^{p(x)}\Big]\, dxdt$$

$$\le C_1\Big\{\, R^{n-\frac{2q}{q-2}} + \iint\limits_{Q_R} \Big[\sum_{|\alpha|\in M_0} \big|f_\alpha(x,t)\big|^2 + \big|f_{\widehat{0}}(x,t)\big|^{p'(x)}\Big]\, dxdt + \int\limits_{\Omega_R} \big|u_0(x)\big|^2\, dx\Big\}, \tag{7}$$

де $q = p^+$, якщо $K_2 = 0$, і $q \in (2; p^-] \cup \{p^+\}$ — яке-небудь, якщо $K_2 > 0$; C_1 — додатна стала, яка залежать тільки від $B_1, B_2, K_1, K_2, K_3,\ p^-, p^+, n, m, q$.

2 Допоміжні твердження

В цьому розділі наведемо твердження, які використовуються в наступному розділі для доведення основного результату.

Твердження 1 ([12, 15]). *Для довільного $R > 0$ і будь-якої функції $v \in L_{p(\cdot)}(Q_R)$ правильні нерівності*

$$\min\left\{\big(\rho_{p,R}(v)\big)^{1/p^-}, \big(\rho_{p,R}(v)\big)^{1/p^+}\right\} \le \|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q_R)} \le \max\left\{\big(\rho_{p,R}(v)\big)^{1/p^-}, \big(\rho_{p,R}(v)\big)^{1/p^+}\right\},$$

$$\min\left\{\big(\|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q_R)}\big)^{p^-}, \big(\|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q_R)}\big)^{p^+}\right\} \le \rho_{p,R}(v) \le \max\left\{\big(\|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q_R)}\big)^{p^-}, \big(\|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q_R)}\big)^{p^+}\right\},$$

де

$$\rho_{p,R}(v) := \iint\limits_{Q_R} |v(x,t)|^{p(x)}\,dxdt, \quad \|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q_R)} := \inf\{\lambda > 0 \,|\, \rho_{p,R}(v/\lambda) \le 1\}.$$

Лема 1 (лема 1, [6]). *Нехай $R_* \ge 1$, $v \in \overset{\circ}{H}{}^{m,0}_{\rm loc}(\overline{Q}) \cap L_{p(\cdot),{\rm loc}}(\overline{Q})$, $g_{\widehat{0}} \in L_{p'(\cdot),{\rm loc}}(\overline{Q})$, $g_\alpha \in L_{2,{\rm loc}}(\overline{Q})$, $|\alpha| \in M$, такі, що*

$$\iint\limits_{Q} \Big[-v\psi\varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} g_\alpha D^\alpha \psi\varphi\Big]\,dxdt = 0$$

для будь-яких $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^m_c(\Omega) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega)$, $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{\Omega_{R_*}}$, $\varphi \in C^1_c(0,T)$.

Тоді $v \in C\big([0,T]; L_2(\Omega_R)\big)$ $\forall\ R \in (0,R_*)$ і для довільних функцій $\theta \in C^1([0,T])$, $w \in C^m_{\rm c}(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} w \subset \overline{\Omega_{R_*}}$, та будь-яких чисел t_1, t_2, $0 \le t_1 < t_2 \le T$, правильна рівність

$$\theta(t_2)\int\limits_\Omega |v(x,t_2)|^2\,w(x)\,dx \,-\, \theta(t_1)\int\limits_\Omega |v(x,t_1)|^2\,w(x)\,dx\,-$$

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega |v(x,t)|^2\,w(x)\,\theta'(t)\,dxdt \,+\, 2\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} g_\alpha\,D^\alpha(v\,w)\,\theta\,dxdt \,= 0. \tag{8}$$

Зауваження 2. *Якщо $v\big|_{\Omega_{R_*}\times(0,T)} \in L_2\big(0,T; \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_{R_*}\big)$ і виконується умова леми 1, то $v \in C\big([0,T]; L_2(\Omega_{R_*}\big)$ і виконується рівність (8) з $w \equiv 1$. Це легко випливає з доведення леми 1.*

Лема 2. *Нехай $R_* \ge 1$, $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p$ і для кожного $l \in \{1,2\}$ функції $(f_{\alpha,l}) \in \mathbb{F}_{p,{\rm loc}}(\overline{Q})$, $u_{0,l} \in L_{2,loc}(\overline{\Omega})$ і $u_l \in \mathbb{U}_{p,{\rm loc}}(\overline{Q})$ такі, що виконується початкова умова*

$$u_l(x,0) = u_{0,l}(x)\,, \quad x \in \Omega_{R_*}, \tag{9}$$

та інтегральна рівність

$$\iint\limits_{Q_{R_*}} \Big[-u_l\psi\varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta u_l)D^\alpha\psi\varphi\Big]\,dxdt = \iint\limits_{Q_{R_*}} \sum_{|\alpha|\in M} f_{\alpha,l}D^\alpha\psi\varphi\,dxdt \tag{10}$$

для будь-яких $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^m_c(\Omega) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega)$, $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{\Omega_{R_*}}$, $\varphi \in C^1_c(0,T)$.

Тоді для будь-яких чисел R, R_0 *таких, що* $0 < 2R_0 \le R \le R_*, R \ge 1$, *правильна нерівність*

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} \big|u_1(x,t) - u_2(x,t)\big|^2\, dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[\sum_{|\alpha|\in M_0} \big|D^\alpha u_1(x,t) - D^\alpha u_2(x,t)\big|^2$$

$$+K_2\big|u_1(x,t) - u_2(x,t)\big|^2 + \big|u_1(x,t) - u_2(x,t)\big|^{p(x)}\Big]\, dxdt$$

$$\le C_1\Big\{ R^{n-\frac{2q}{q-2}} + \iint\limits_{Q_R} \Big[\sum_{|\alpha|\in M_0} \big|f_{\alpha,1}(x,t) - f_{\alpha,2}(x,t)\big|^2 + \big|f_{\widehat{0},1}(x,t) - f_{\widehat{0},2}(x,t)\big|^{p'(x)}\Big]\, dxdt$$

$$+ \int\limits_{\Omega_R} \big|u_{0,1}(x) - u_{0,2}(x)\big|^2\, dx\Big\}, \tag{11}$$

де q *і* C_1 *такі ж, як у теоремі 1.*

Доведення леми 2. Покладемо $v := u_1 - u_2$. З інтегральних тотожностей, отриманих з (10), відповідно, для $l = 1$ і $l = 2$, дістанемо

$$\iint\limits_{Q_{R_*}} \Big[-v\psi\varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} \big(a_\alpha(x,t,\delta u_1) - a_\alpha(x,t,\delta u_2)\big) D^\alpha\psi\varphi\Big]\, dxdt$$

$$= \iint\limits_{Q_{R_*}} \sum_{|\alpha|\in M} (f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2}) D^\alpha\psi\varphi\, dxdt$$

для будь-яких $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^m_c(\Omega) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega)$, $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{\Omega_{R_*}}$, $\varphi \in C^1_c(0,T)$. Звідси на підставі леми 1 дістанемо

$$\theta(t_2) \int\limits_{\Omega_{R_*}} |v(x,t_2)|^2\, w(x)\, dx \;-\; \theta(t_1) \int\limits_{\Omega_{R_*}} |v(x,t_1)|^2\, w(x)\, dx$$

$$- \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega_{R_*}} |v(x,t)|^2\, w(x)\, \theta'(t)\, dxdt$$

$$+\, 2 \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega_{R_*}} \sum_{|\alpha|\in M} \big(a_\alpha(x,t,\delta u_1) - a_\alpha(x,t,\delta u_2)\big)\, D^\alpha(v\, w)\, \theta\, dxdt$$

$$= 2 \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega_{R_*}} \sum_{|\alpha|\in M} (f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2})\, D^\alpha(vw)\, \theta\, dxdt, \tag{12}$$

де $\theta \in C^1\big([0,T]\big)$, $w \in C^m_{\rm c}(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} w \subset \overline{\Omega_{R_*}}$, $t_1, t_2 \in [0,T]$ — довільні.

Нехай R_0 і R — які-небудь числа такі, що $0 < 2R_0 < R \le R_*$, $R \ge 1$. Покладемо

$$\zeta(x) := \begin{cases} (R^2 - |x|^2)/R, & \text{якщо } |x| \le R, \\ 0, & \text{якщо } |x| > R. \end{cases}$$

Візьмемо в (12) $t_1 = 0$, $t_2 = \tau \in (0, T]$, $\theta(t) = 1$, $t \in [0, T]$, $w(x) = \zeta^s(x)$, $x \in \Omega$, де $s > m$ — достатньо велике число (очевидно, що при $s > m$ маємо $\zeta^s \in C_c^m(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} \zeta^s \subset \overline{\Omega_R}$). У результаті отримаємо рівність

$$\int\limits_{\Omega_R} |v(x,\tau)|^2 \zeta^s(x)\, dx + 2 \iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha| \in M} \big(a_\alpha(x,t,\delta u_1) - a_\alpha(x,t,\delta u_2)\big)\, D^\alpha(v\,\zeta^s)\, dxdt$$

$$= 2 \iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha| \in M} (f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2})\, D^\alpha(v\,\zeta^s)\ dxdt + \int\limits_{\Omega_R} \big|u_{0,1}(x) - u_{0,2}(x)\big|^2 \zeta^s(x)\, dx, \tag{13}$$

де $Q_R^\tau := \Omega_R \times (0,\tau)$.

Тепер зауважимо таке. Нехай $\widetilde{v} \in \overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| \in M_0$, $g_\alpha \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Очевидно, що

$$\int\limits_{\Omega} g_\alpha\, D^\alpha(\widetilde{v}\,\zeta^s)\, dx = \int\limits_{\Omega} g_\alpha\, D^\alpha \widetilde{v}\,\zeta^s\, dx + \int\limits_{\Omega} g_\alpha \big(D^\alpha(\widetilde{v}\,\zeta^s)\ -\ D^\alpha \widetilde{v}\,\zeta^s\big) dx. \tag{14}$$

З леми 3.1 роботи [1] випливає, що

$$\int\limits_{\Omega} g_\alpha \big(D^\alpha(\widetilde{v}\,\zeta^s)\ -\ D^\alpha \widetilde{v}\,\zeta^s\big) dx \le \varepsilon \int\limits_{\Omega} |g_\alpha|^2 \zeta^s\, dx + \varepsilon \int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{|\beta| = |\alpha|} \big|D^\beta \widetilde{v}\big|^2\Big)\, \zeta^s\, dx$$

$$+ C_\alpha(\varepsilon) \int\limits_{\Omega} |\widetilde{v}|^2\, \zeta^{s - 2|\alpha|}\, dx, \tag{15}$$

де $\varepsilon > 0$ — довільне число, $C_\alpha(\varepsilon) > 0$ — стала, яка від R не залежить.

Отож, з (13) на підставі (14), (15) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R} |v(x,\tau)|^2 \zeta^s(x)\, dx + 2 \iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha| \in M} \big(a_\alpha(x,t,\delta u_1) - a_\alpha(x,t,\delta u_2)\big)\, D^\alpha v\, \zeta^s\, dxdt$$

$$\le \varepsilon \iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha| \in M_0} \big|a_\alpha(x,t,\delta u_1) - a_\alpha(x,t,\delta u_2)\big|^2\, \zeta^s\, dxdt$$

$$+ \varepsilon \iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha| \in M_0} \big|f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2}\big|^2\ \zeta^s\ dxdt\ +\ \varepsilon \iint\limits_{Q_R^\tau} \Big(\sum_{|\alpha| \in M_0} |D^\alpha v|^2\Big)\, \zeta^s\, dxdt$$

$$+ C_7(\varepsilon) \iint\limits_{Q_R^\tau} |v|^2 \Big(\sum_{i \in M_0} \zeta^{s-2i}\Big)\, dxdt$$

$$+ 2 \iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha| \in M} |f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2}|\, |D^\alpha v|\, \zeta^s\ dxdt + \int\limits_{\Omega_R} \big|u_{0,1}(x) - u_{0,2}(x)\big|^2\, \zeta^s(x)\, dx, \tag{16}$$

де $\varepsilon > 0$ — довільне число, $C_7(\varepsilon) > 0$ — стала, яка від R не залежить.

Оцінимо члени нерівності (16). Використовуючи умову ($\mathbf{A_4}$) та пам'ятаючи, що $v := u_1 - u_2$, отримаємо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha|\in M} \big(a_\alpha(x,t,\delta u_1) - a_\alpha(x,t,\delta u_2)\big)\big(D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2\big)\, \zeta^s\, dxdt$$

$$\geq \iint\limits_{Q_R^\tau} \Big[K_1 \sum_{|\alpha|\in M_0} |D^\alpha v(x,t)|^2 + K_2 |v(x,t)|^2 + K_3 |v(x,t)|^{p(x)}\Big]\, \zeta^s\, dxdt. \tag{17}$$

Використавши умову ($\mathbf{A_3}$), здобудемо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha|\in M_0} \big|a_\alpha(x,t,\delta u_1) - a_\alpha(x,t,\delta u_2)\big|^2 \zeta^s\, dxdt$$

$$\leq (N-1) \iint\limits_{Q_R^\tau} \Big(B_1 \sum_{|\alpha|\in M_0} |D^\alpha v|^2 + B_2 |v|^2\Big) \zeta^s\, dxdt. \tag{18}$$

Застосовуючи узагальнену нерівність Коші, отримаємо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha|\in M} |f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2}|\, |D^\alpha v|\, \zeta^s\, dxdt \leq \iint\limits_{Q_R^\tau} |f_{\widehat{0},1} - f_{\widehat{0},2}|\, |v|\, \zeta^s\, dxdt$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} \iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha|\in M_0} |D^\alpha v|^2\, \zeta^s\, dxdt + \frac{1}{2\varepsilon} \iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha|\in M_0} |f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2}|^2\, \zeta^s\, dxdt, \tag{19}$$

де $\varepsilon > 0$ — довільне число.

Далі використовуватимемо нерівність Юнга

$$|a\, b| \leq \varepsilon |a|^\gamma + \varepsilon^{-\frac{1}{\gamma-1}} |b|^{\gamma'}, \tag{20}$$

де $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\gamma > 1$, $\gamma' = \frac{\gamma}{\gamma-1}$.

Оскільки $\varepsilon^{-\frac{1}{\gamma-1}} = (\varepsilon^{-1})^{\frac{1}{\gamma-1}}$ для $\gamma > 1$, то у випадку $0 < \varepsilon < 1$ функція $(1;+\infty) \ni \gamma \to \varepsilon^{-\frac{1}{\gamma-1}}$ є спадною.

Нехай $(x,t) \in Q_R$ — яка-небудь точка така, що $v(x,t)$, $p(x)$ визначені і $p^- \leq p(x) \leq p^+$. Покладемо в нерівності Юнга $a = |v(x,t)|^2 \zeta^{\frac{s}{\gamma}}(x)$, $\quad b = \zeta^{\frac{s}{\gamma'}-2i}(x)$, $\quad \gamma = \frac{p(x)}{2}$, $\gamma' = \frac{p(x)}{p(x)-2}$, $\varepsilon = \eta_1 \in (0,1)$, $i \in M_0$. У результаті одержимо нерівність

$$|v(x,t)|^2 \zeta^{s-2i}(x) \leq \eta_1 |v(x,t)|^{p(x)} \zeta^s(x) + \eta_1^{-\frac{2}{p(x)-2}} \zeta^{s-\frac{2i\,p(x)}{p(x)-2}}(x)$$

$$\leq \eta_1 |v(x,t)|^{p(x)} \zeta^s(x) + \eta_1^{-\frac{2}{p^--2}} \zeta^{s-\frac{2i\,p(x)}{p(x)-2}}(x)$$

для майже всіх $(x,t) \in Q_R$. Зінтегруємо її, припустивши, що $s > \frac{2m\,p(x)}{p(x)-2}$ для майже всіх $(x,t) \in Q_R$. У результаті отримаємо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^2 \zeta^{s-2i}(x)\, dxdt \leq \eta_1 \iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^{p(x)} \zeta^s(x)\, dxdt$$

$$+\eta_1^{-\frac{2}{p^- -2}} \iint\limits_{Q_R^\tau} \zeta^{\,s-\frac{2ip(x)}{p(x)-2}}(x)\,dxdt, \tag{21}$$

де $\eta_1 \in (0,1)$, $i \in M_0$.

Нехай $q \in (2, p^-]$. Очевидно, що $L_{p(\cdot)}(Q_R) \subset L_q(Q_R)$. Аналогічно попередньому здобудемо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^2\,\zeta^{s-2i}(x)\;dxdt \le \eta_1 \iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^q\,\zeta^s(x)\;dxdt$$

$$+\,\eta_1^{-\frac{2}{q-2}} \iint\limits_{Q_R^\tau} \zeta^{\,s-\frac{2i\,q}{q-2}}(x)\,dxdt, \tag{22}$$

де $\eta_1 > 0$, $i \in M_0$, $s > 2iq/(q-2)$.

Також використаємо таку оцінку

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} \bigl|f_{\widehat{0},1}(x,t) - f_{\widehat{0},2}(x,t)\bigr|\,|v(x,t)|\,\zeta^s(x)\,dxdt \le \eta_2 \iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^{p(x)}\,\zeta^s(x)\,dxdt$$

$$+\,\eta_2^{-\frac{1}{p^- -1}} \iint\limits_{Q_R^\tau} \bigl|f_{\widehat{0},1}(x,t) - f_{\widehat{0},2}(x,t)\bigr|^{p'(x)}\,\zeta^s(x)\,dxdt, \tag{23}$$

де $\eta_2 \in (0,1)$ — довільна стала.

З (16) на підставі (17) — (19), (21), (23) при достатньо малих значеннях $\varepsilon, \eta_1, \eta_2$ отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R} |v(x,\tau)|^2\,\zeta^s\,dx \,+ \iint\limits_{Q_R^\tau} \Bigl[K_1 \sum_{|\alpha|\in M_0} |D^\alpha v(x,t)|^2 + (2K_2-\sigma)|v(x,t)|^2$$

$$+\,K_3|v(x,t)|^{p(x)}\Bigr]\,\zeta^s(x)\;dxdt \le C_8 \sum_{i\in M_0} \iint\limits_{Q_R} \zeta^{s-\frac{2i\,p(x)}{p(x)-2}}(x)\;dxdt$$

$$+\,C_9 \iint\limits_{Q_R} \Bigl(\sum_{|\alpha|\in M_0} \bigl|f_{\alpha,1}(x,t) - f_{\alpha,2}(x,t)\bigr|^2 + \bigl|f_{\widehat{0},1}(x,t) - f_{\widehat{0},2}(x,t)\bigr|^{p'(x)}\Bigr)\zeta^s(x)\;dxdt$$

$$+\int\limits_{\Omega_R} \bigl|u_{0,1}(x) - u_{0,2}(x)\bigr|^2\,\zeta^s\,dx, \tag{24}$$

де $s > \frac{2m\,p^-}{p^- -2}$ — довільна стала; C_8, C_9 — додатні сталі, які залежать тільки від p^-, p^+, $m, n, B_1, B_2, K_1, K_2, K_3, s$; $\sigma = 0$, якщо $B_2 = 0$, і $\sigma = K_2$, якщо $B_2 > 0$, а отже, за нашим припущенням, $K_2 > 0$.

Зауважимо, що

$$\frac{2m\,p^-}{p^- -2} \ge \frac{2m\,p(x)}{p(x)-2} \ge \frac{2i\,p(x)}{p(x)-2} \ge \frac{2i\,p^+}{p^+ -2} \ge \frac{2p^+}{p^+ -2}$$

для майже всіх $(x,t)\in Q$, $i\in M_0$. Легко переконатися, що $0\le\zeta(x)\le R$, коли $x\in\mathbb{R}^n$ та $\zeta(x)\ge R-R_0$ при $|x|\le R_0$. Врахувавши сказане і, зокрема, те, що $0<2R_0\le R\le R_*, R\ge 1$, з (24) отримаємо

$$\max_{t\in[0,T]}\int\limits_{\Omega_{R_0}}|v(x,t)|^2\,dx+\iint\limits_{Q_{R_0}}\Big[K_1\sum_{|\alpha|\in M_0}|D^\alpha v(x,t)|^2+(2K_2-\sigma)\,|v(x,t)|^2$$
$$+K_3\,|v(x,t)|^{p(x)}\Big]\,dxdt\le C_{11}\,R^{n-\frac{2p^+}{p^+-2}}+$$
$$+C_{12}\iint\limits_{Q_R}\Big(\big|f_{\widehat{0},1}(x,t)-f_{\widehat{0},2}(x,t)\big|^{p'(x)}+\sum_{|\alpha|\in M_0}\big|f_{\alpha,1}(x,t)-f_{\alpha,2}(x,t)\big|^2\Big)\,dxdt$$
$$+\int\limits_{\Omega_R}\big|u_{0,1}(x)-u_{0,2}(x)\big|^2\,dx, \tag{25}$$

де C_{11}, C_{12} — додатні сталі, які залежать тільки від $p^-,p^+,m,n,K_1,K_2,K_3,B_1$ та B_2.

З (25) легко отримаємо нерівність (11) з $q=p^+$. Звернемо увагу на те, що до цього часу ми припускали, що $K_2\ge 0$.

Нехай $K_2>0$. Візьмемо яке-небудь $q\in(2,p^-]$. Безпосередньо переконуємося, що для довільної точки $(x,t)\in Q$ такої, що $v(x,t)$ і $p(x)$ визначені і $p^-\le p(x)\le p^+$, правильна нерівність

$$K_2\,|v(x,t)|^2\,+\,K_3\,|v(x,t)|^{p(x)}\ge\,K_4|v(x,t)|^q, \tag{26}$$

де $K_4=\min\{K_2,K_3\}$. Міркуючи аналогічно тому, як це робилося вище, з (16) на підставі (17) — (19), (22), (23) і (26) одержимо (11) з $q\in(2,p^-]$. $\square$

Наслідок 1. *Нехай $R_*\ge 1$, $(a_\alpha)\in\mathbb{A}_p$, $(f_\alpha)\in\mathbb{F}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $u_0\in L_{2,loc}(\overline{\Omega})$. Припустимо, що функція $w\in\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ задовольняє початкову умову*

$$u(x,0)=u_0(x)\,,\quad x\in\Omega_{R_*},$$

та інтегральну рівність

$$\iint\limits_{Q_{R_*}}\Big[-w\psi\varphi'+\sum_{|\alpha|\in M}a_\alpha(x,t,\delta w)D^\alpha\psi\varphi\Big]\,dxdt=\iint\limits_{Q_{R_*}}\sum_{|\alpha|\in M}f_\alpha D^\alpha\psi\varphi\,dxdt \tag{27}$$

для будь-яких $\psi\in\overset{\circ}{H}{}^{m,1}_c(\Omega)\cap L_{p(\cdot)}(\Omega)$, $\mathrm{supp}\,\psi\subset\Omega_{R_*}$, $\varphi\in C^1_c(0,T)$.

Тоді для будь-яких чисел R_0,R таких, що $0<2R_0\le R\le R_*,R\ge 1$, правильна нерівність, яка відрізняється від нерівності (7) тільки тим, що замість u стоїть w.

3 Обґрунтування основного результату

Доведення теореми 1. Нехай k — яке-небудь натуральне число. Нехай u_k — функція з простору $\overset{\circ}{H}{}^{m,0}(Q_k)\cap L_{p(\cdot)}(Q_k)\cap C\big([0,T];L_2(\Omega_k)\big)$, яка задовольняє початкову умову (5) та інтегральну рівність

$$\iint\limits_{Q_k}\Big[-u_k\psi\varphi'+\sum_{|\alpha|\in M}a_\alpha(x,t,\delta u_k)D^\alpha\psi\varphi\Big]\,dxdt=\iint\limits_{Q_k}\Big[\sum_{|\alpha|\in M}f_\alpha D^\alpha\psi\varphi\Big]\,dxdt \tag{28}$$

для будь-яких $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_k) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega_k)$, $\varphi \in C_c^1(0,T)$.

Доведення існування функції u_k проводиться методом Гальоркіна. Єдиність цієї функції легко довести, врахувавши зауваження 2 та використавши умову $(\mathbf{A_4})$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ продовжимо на $\overline{Q}$ функцію u_k нулем, залишивши за цим продовженням позначення u_k. Покажемо, що послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ містить підпослідовність, яка збігається до узагальненого розв'язку задачі (3) — (5).

Нехай k і l — довільні натуральні числа, причому $1 < k < l$; R_0, R — будь-які дійсні числа такі, що $0 < 2R_0 \le R \le k-1$, $R \ge 1$; q — дійсне число, яке задовольняє відповідні умови з формулювання теореми 1 та умову $n - 2q/(q-2) < 0$. Тоді з леми 2, вибравши $R_* = k-1$, отримаємо

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u_k(x,t) - u_l(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[\sum_{|\alpha|\in M_0} \big|D^\alpha u_k(x,t) - D^\alpha u_l(x,t)\big|^2 + |u_k(x,t) - u_l(x,t)|^{p(x)}\Big]\,dxdt \le C_1 R^{n-2q/(q-2)}, \tag{29}$$

де $C_1 > 0$ — стала, яка від $k,\ l,\ R_0$ та R не залежать.

Нехай $\varepsilon > 0$ — яке-небудь число. Зафіксуємо довільно вибране значення $R_0 > 0$ і виберемо значення $R \ge \max\{1; 2R_0\}$ настільки великим, щоби права частина нерівності (29) була меншою за ε. Тоді для будь-яких $k \ge R+1$ і $l > k$ ліва частина нерівності (29) менша за ε. Це означає, що послідовність $\big\{u_k\big|_{Q_{R_0}}\big\}_{k=1}^{\infty}$ є фундаментальною в $\overset{\circ}{H}{}^{m,0}(Q_{R_0}) \cap L_{p(\cdot)}(Q_{R_0}) \cap C\big([0,T]; L_2(\Omega_{R_0})\big)$. Оскільки $R_0 > 0$ — довільне число, то звідси випливає існування функції $u \in \mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ такої, що

$$u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в} \quad \mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q}). \tag{30}$$

Тепер відмітимо, що на підставі умови $(\mathbf{A_3})$ маємо

$$\iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[\sum_{|\alpha|\in M_0} \big|a_\alpha(x,t,\delta u_k) - a_\alpha(x,t,\delta u)\big|^2 \Big]\,dxdt \le (N-1) \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[B_1 \sum_{|\beta|\in M_0} \big|D^\beta(u_k - u)\big|^2 + B_2|u_k - u|^2\Big]\,dxdt, \quad R_0 > 0. \tag{31}$$

З (30) і (31), оскільки R_0 — довільне, випливає, що

$$a_\alpha\big(\circ,\diamond,\delta u_k(\circ,\diamond)\big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a_\alpha\big(\circ,\diamond,\delta u(\circ,\diamond)\big) \quad \text{в} \quad L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \quad |\alpha| \in M_0. \tag{32}$$

Тепер покажемо, що існує підпослідовність $\big\{u_{k_j}\big\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\big\{u_k\big\}_{k=1}^{\infty}$ така, що

$$a_{\widehat{0}}\big(\circ,\diamond,\delta u_{k_j}(\circ,\diamond)\big) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} a_{\widehat{0}}\big(\circ,\diamond,\delta u(\circ,\diamond)\big) \quad \text{слабко в} \quad L_{p'(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q}). \tag{33}$$

Нехай $R_0 > 0$ — яке-небудь число. З наслідку леми 2 для будь-якого $k > R_0 + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) маємо

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} \big|u_k(x,t)\big|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[\sum_{|\alpha|\in M_0} \big|D^\alpha u_k(x,t)\big|^2 + |u_k(x,t)|^{p(x)}\Big]\,dxdt \le C_{14}(R_0), \tag{34}$$

де $C_{14}(R_0) > 0$ — стала, яка від k не залежить.

На підставі умови ($\mathbf{A_2}$) і нерівності Гельдера, врахувавши (34), маємо

$$\iint\limits_{Q_{R_0}} \left|a_{\widehat{0}}\big(x,t,\delta u_k(x,t)\big)\right|^{p'(x)} dxdt \le$$

$$\le \iint\limits_{Q_{R_0}} \left|h_{\widehat{0}}(x,t)\big(|\delta u_k(x,t)|^{2/p'(x)} + |u_k(x,t)|^{p(x)-1}\big) + g_{\widehat{0}}(x,t)\right|^{p'(x)} dxdt$$

$$\le \iint\limits_{Q_{R_0}} \left(2\left|h_{\widehat{0}}(x,t)\right|^{p(x)} + 1\right)^{\frac{p'(x)}{p(x)}} \big(|\delta u_k(x,t)|^2 + |u_k(x,t)|^{p(x)} +$$

$$+ |g_{\widehat{0}}(x,t)|^{p'(x)}\big)\, dxdt \le C_{15}(R_0), \tag{35}$$

де $C_{15}(R_0) > 0$ — стала, яка від k не залежить, але може залежати від R_0.

На підставі (30), (35) і умови ($\mathbf{A_1}$), врахувавши рефлексивність простору $L_{p(\cdot)}(Q_{R_0})$, можна зробити висновок про існування підпослідовності $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ та функції $\chi_{\widehat{0}} \in L_{p'(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ таких, що

$$u_{k_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u, \quad a_{\widehat{0}}\big(\circ,\diamond,\delta u_{k_j}(\circ,\diamond,)\big) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} a_{\widehat{0}}\big(\circ,\diamond,\delta u(\circ,\diamond,)\big) \quad \text{майже всюди на} \quad Q, \tag{36}$$

$$a_{\widehat{0}}\big(\circ,\diamond,\delta u_{k_j}(\circ,\diamond)\big) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_{\widehat{0}}(\circ,\diamond) \quad \text{слабко в} \quad L_{p'(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q}). \tag{37}$$

З (36) та (37) отримаємо (див. [17]), що

$$\chi_{\widehat{0}}(\circ,\diamond) = a_{\widehat{0}}\big(\circ,\diamond,\delta u(\circ,\diamond)\big). \tag{38}$$

Нехай $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^{m,1}_{\mathrm{c}}(\Omega) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega)$. Для кожного $j \ge j_0$, де $j_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{\Omega_{k_{j_0}}}$, з означення u_{k_j} маємо

$$\iint\limits_{Q} \Big[-u_{k_j}\psi\varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta u_{k_j}) D^\alpha\psi\varphi\Big]\, dxdt = \iint\limits_{Q} \Big[\sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha\, D^\alpha\psi\varphi\Big]\, dxdt. \tag{39}$$

Перейдемо в (39) до границі при $j \to +\infty$, врахувавши (30), (32), (37), (38). У результаті отримаємо (6) для заданої функції ψ. Оскільки ψ — довільна функція, то ми довели, що u — узагальнений розв'язок задачі (3) — (5).

Доведемо *єдиність узагальненого розв'язку* досліджуваної задачі. Припустимо протилежне. Нехай u_1, u_2 — (різні) узагальнені розв'язки задачі (3) — (5). З леми 2 (R_* — будь-яке число) маємо

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u_1(x,t) - u_2(x,t)|^2\, dx \le C_1 R^{n-2q/(q-2)}, \tag{40}$$

де R_0, R — довільні сталі такі, що $0 < 2R_0 \le R$, $R \ge 1$, а $q > 0$ — таке, що $n - 2q/(q-2) < 0$ (стала $C_1 > 0$ від R_0 і R не залежать).

Зафіксуємо $R_0 > 0$ і перейдемо в (40) до границі при $R \to +\infty$. У результаті отримаємо, що $u_1 = u_2$ майже скрізь на Q_{R_0}. Оскільки $R_0 > 0$ — довільне число, то звідси маємо, що $u_1 = u_2$ майже всюди на Q. Отже, ми довели коректність задачі (3) — (5). $\square$

4 Висновки

Тут ми розглянули один клас анізотропних параболічних рівнянь вищих порядків, які задані в необмежених за просторовими змінними областях і мішані задачі для яких є однозначно розв'язними без будь-яких обмежень на поведінку розв'язків та зростання вхідних даних на нескінченності. Досліджувані тут рівняння мають змінні показники нелінійності і, відповідно, їх розв'язки беруться з узагальнених просторів Лебега та Соболєва. На наш погляд, вивчений тут клас рівнянь може бути розширеним зі збереженням його основних властивостей.

Список літератури

[**1**] Bernis F. *Elliptic and parabolic semilinear parabolic problems without conditions at infinity.* Arch. Rational Mech. Anal. 1989, **106** (3), 217–241.

[**2**] Benilan Ph., Grandall M.G., Pierre M. *Solutions of the porous medium equations in R^n under optimal conditions on initial values.* Indiana Univ. Math. J. 1984, **33** (1), 51–87.

[**3**] Boccardo L., Gallouët Th., Vazquez J.L. *Solutions of nonlinear parabolic equations without growth restrictions on the data*, Electronic J. Diff. Eq. 2001, **60**, 1–20.

[**4**] Bokalo M.M. *Boundary value problems for semilinear parabolic equations in unbounded domains without conditions at infinity.* Siberian Math. J. 1996, **37** (5), 860–867.

[**5**] Bokalo N.M. *The well-posedness of the first boundary value problem and the Cauchy problem for some quasilinear parabolic systems without conditions at infinity.* J. Math. Sci. 2006, **135** (1), 2625–2636.

[**6**] Бокало М. М., Паучок І.Б. *Коректність задачі Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності.* Математичні студії 2006, **24** (1), 25–48.

[**7**] Bokalo M.M., Buhrii O.M., Mashiyev R.A. *Unique solvability of initial-boundary-value problems for anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity.* J. Nonl. Evol. Eq. Appl. 2013, **6**, 67–87.

[**8**] Bokalo M., Buhrii O., Hryadil N. *Initial-boundary value problems for nonlinear elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity in unbounded domains without conditions at infinity.* Nonlinear Analysis. Elsevier. USA, 2020, **192**, 1–17.

[**9**] Bokalo M. *Initial-boundary value problems for anisotropic parabolic equations with variable exponents of the nonlinearity in unbounded domains with conditions at infinity.* Journal of optimization, differential equations and their applications (JODEA) 2022, **30** (1), 98-121. doi 10.15421/142205.

[**10**] Brézis H. *Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without conditions at infinity.* Appl. Math. Optim. 1984, **12** (3), 271–282.

[**11**] Buhrii O., Buhrii N. *Nonlocal in time problem for anisotropic parabolic equations with variable exponents of nonlinearities.* J. Math. Anal. Appl. 2019, **473**, 695–711.

[**12**] Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Rủžička M. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. Springer, Heidelberg, 2011.

[**13**] Gladkov A., Guedda M. *Diffusion-absorption equation without growth restrictions on the data at infinity.* J. Math. Anal. Appl. 2002, **274** (1), 16–37.

[**14**] Івасишен С.Д., Пасічник Г.С. *Зображення розв'язків рівняння типу Колмогорова зі зростаючими коефіцієнтами та виродженнями на початковій гіперплощині.* Буковинський математичний журнал 2021. **9** (1), 189–199. doi.org/10.31861/bmj2021.01.16.

[**15**] Kováčik O., Rákosnı́c J. *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$*. Czechoslovak Mathematical Journal 1991, **41** (116), 592–618.

[**16**] Kováčik O. *Parabolic equations in generalized Sobolev spaces $W^{k,p(x)}$*. Fasciculi Mathematici. 1995, **25**, 87–94.

[**17**] Lions J.-L. Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires. Paris (France): Dunod Gauthier-Villars, 1969.

[**18**] Mashiyev R. A., Buhrii O. M. *Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 2011, **377**, 450–463.

[**19**] Marchi C., Tesei A. *Higher-order parabolic equations without conditions at infinity.* J. Math. Anal. Appl. 2002, **269**, 352–368.

[**20**] Oleinik O.A., Iosifyan G.A. *An analog of Saint-Venant principle and uniqueness of the solutions of the boundary-value problems in unbounded domains for parabolic equations.* Usp. Mat. Nauk 1976, **31** (6), 142–166. (in Russian)

[**21**] Rădulescu V., Repovš D., *Partial differential equations with variable exponents: variational methods and qualitative analysis.* CRC Press, Boca Raton, London, New York, 2015.

[**22**] Růžička M. Electroreological fluids: modeling and mathematical theory. Springer-Verl., Berlin, 2000.

[**23**] Samokhin V. N. *On a class of equations that generalize equations of polytropic filtration.* Diff. Equat. 1996, **32** (5), 648–657. (in Russian)

[**24**] Shishkov A.E. *The solvability of the boundary-value problems for quasilinear elliptic and parabolic equations in unbounded domains in the classes of functions growing at the infinity.* Ukr. Math. J. 1985, **47** (2), 277–289. (in Russian)

[**25**] Tikhonov A.N. *Théoremes d'unicité pour l'équation de la chaleur.* Mat. Sb. 1935, **42** (2), 199–216.

Список літератури

[**1**] Bernis F. *Elliptic and parabolic semilinear parabolic problems without conditions at infinity.* Arch. Rational Mech. Anal. 1989, **106** (3), 217–241.

[**2**] Benilan Ph., Grandall M.G., Pierre M. *Solutions of the porous medium equations in R^n under optimal conditions on initial values.* Indiana Univ. Math. J. 1984, **33** (1), 51–87.

[**3**] Boccardo L., Gallouët Th., Vazquez J.L. *Solutions of nonlinear parabolic equations without growth restrictions on the data*, Electronic J. Diff. Eq. 2001, **60**, 1–20.

[**4**] Bokalo M.M. *Boundary value problems for semilinear parabolic equations in unbounded domains without conditions at infinity.* Siberian Math. J. 1996, **37** (5), 860–867.

[**5**] Bokalo N.M. *The well-posedness of the first boundary value problem and the Cauchy problem for some quasilinear parabolic systems without conditions at infinity.* J. Math. Sci. 2006, **135** (1) , 2625–2636.

[**6**] Bokalo M.M., Pauchok I.B. *On the well-posedness of a Fourier problem for nonlinear parabolic equations of higher order with variable exponents of nonlinearity.* Matematychni Studii 2006, **26** (1), 25–48. (in Ukrainian)

[**7**] Bokalo M.M., Buhrii O.M., Mashiyev R.A. *Unique solvability of initial-boundary-value problems for anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity.* J. Nonl. Evol. Eq. Appl. 2013, **6**, 67–87.

[**8**] Bokalo M., Buhrii O., Hryadil N. *Initial-boundary value problems for nonlinear elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity in unbounded domains without conditions at infinity.* Nonlinear Analysis. Elsevier. USA, 2020, **192**, 1–17.

[**9**] Bokalo M. *Initial-boundary value problems for anisotropic parabolic equations with variable exponents of the nonlinearity in unbounded domains with conditions at infinity.* Journal of optimization, differential equations and their applications (JODEA) 2022, **30** (1), 98-121. doi 10.15421/142205.

[**10**] Brézis H. *Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without conditions at infinity.* Appl. Math. Optim. 1984, **12** (3), 271–282.

[**11**] Buhrii O., Buhrii N. *Nonlocal in time problem for anisotropic parabolic equations with variable exponents of nonlinearities.* J. Math. Anal. Appl. 2019, **473**, 695–711.

[**12**] Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Růžička M. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. Springer, Heidelberg, 2011.

[**13**] Gladkov A., Guedda M. *Diffusion-absorption equation without growth restrictions on the data at infinity.* J. Math. Anal. Appl. 2002, **274** (1), 16–37.

[**14**] Ivasyshen S. D., Pasichnyk H. S. *Representation of solutions of Kolmogorov type equations with increasing coefficients and degenerations on the initial hyperplane* Bukovinian. Math. J. 2021, **9** (1), 189–199. doi.org/10.31861/bmj2021.01.16. (in Ukrainian)

[**15**] Kováčik O., Rákosnı́c J. *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,\,p(x)}$*. Czechoslovak Mathematical Journal 1991, **41** (116), 592–618.

[**16**] Kováčik O. *Parabolic equations in generalized Sobolev spaces $W^{k,p(x)}$*. Fasciculi Mathematici. 1995, **25**, 87–94.

[**17**] Lions J.-L. Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires. Paris (France): Dunod Gauthier-Villars, 1969.

[**18**] Mashiyev R. A., Buhrii O. M. *Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 2011, **377**, 450–463.

[**19**] Marchi C., Tesei A. *Higher-order parabolic equations without conditions at infinity.* J. Math. Anal. Appl. 2002, **269**, 352–368.

[**20**] Oleinik O.A., Iosifyan G.A. *An analog of Saint-Venant principle and uniqueness of the solutions of the boundary-value problems in unbounded domains for parabolic equations.* Usp. Mat. Nauk 1976, **31** (6), 142–166. (in Russian)

[**21**] Rădulescu V., Repovš D., *Partial differential equations with variable exponents: variational methods and qualitative analysis.* CRC Press, Boca Raton, London, New York, 2015.

[**22**] Růžička M. Electroreological fluids: modeling and mathematical theory. Springer-Verl., Berlin, 2000.

[**23**] Samokhin V. N. *On a class of equations that generalize equations of polytropic filtration.* Diff. Equat. 1996, **32** (5), 648–657. (in Russian)

[**24**] Shishkov A.E. *The solvability of the boundary-value problems for quasilinear elliptic and parabolic equations in unbounded domains in the classes of functions growing at the infinity.* Ukr. Math. J. 1985, **47** (2), 277–289. (in Russian)

[**25**] Tikhonov A.N. *Théoremes d'unicité pour l'équation de la chaleur.* Mat. Sb. 1935, **42** (2), 199–216.

Надійшло 07.11.2022

Bokalo M. M. *Initial-boundary value problem for higher-orders nonlinear parabolic equations with variable exponents of the nonlinearity in unbounded domains without conditions at infinity*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 59–76.

Initial-boundary value problems for parabolic equations in unbounded domains with respect to the spatial variables were studied by many authors. As is well known, to guarantee the uniqueness of the solution of the initial-boundary value problems for linear and some nonlinear parabolic equations in unbounded domains we need some restrictions on solution's behavior as $|x| \to +\infty$ (for example, solution's growth restriction as $|x| \to +\infty$, or belonging of solution to some functional spaces). Note that we need some restrictions on the data-in behavior as $|x| \to +\infty$ to solvability of the initial-boundary value problems for parabolic equations considered above.

However, there are nonlinear parabolic equations for which the corresponding initial-boundary value problems are unique solvable without any conditions at infinity.

Nonlinear differential equations with variable exponents of the nonlinearity appear as mathematical models in various physical processes. In particular, these equations describe electroreological substance flows, image recovering processes, electric current in the conductor with changing temperature field. Nonlinear differential equations with variable exponents of the nonlinearity were intensively studied in many works. The corresponding generalizations of Lebesgue and Sobolev spaces were used in these investigations.

In this paper we prove the unique solvability of the initial–boundary value problem without conditions at infinity for some of the higher-orders anisotropic parabolic equations with variable exponents of the nonlinearity. An a priori estimate of the generalized solutions of this problem was also obtained.