

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ПРО ГЛОБАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ДЕКІЛЬКОМА ВІДХИЛЕННЯМИ АРГУМЕНТУ

Побудовано систему лінійних диференціальних рівнянь, всі розв'язки якої є глобальними розв'язками системи лінійних диференціальних рівнянь з кількома відхиленнями аргументу. Обґрунтовано існування такої системи, а також досліджено деякі властивості її розв'язків.

We provide a system of differential equations whose solutions are global solutions of a system of differential equations with multiple deviating arguments. We justify the existence of the provided system and study some properties of its solutions.

В праці [1] А.М. Самойленко запропонував апроксимувати систему лінійних рівнянь з одним відхиленням аргументу системою звичайних диференціальних рівнянь, всі розв'язки якої були б розв'язками вихідної системи на $\mathbb{R}$, було також встановлено деякі властивості розв'язків цих систем. Для систем рівнянь з лінійно перетвореним аргументом на півосі аналогічні питання досліджені в статті А.М. Самойленка і Н.Л. Денисенко [2].

В роботах [3–4] розглянуто застосування запропонованого методу для знаходження і дослідження глобальних розв'язків деяких типів лінійних функціонально-диференціальних рівнянь.

У даній роботі для системи диференціальних рівнянь з декількома відхиленнями аргументу будується система звичайних диференціальних рівнянь, всі розв'язки якої є глобальними розв'язками початкової системи.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + \sum_{i=1}^N B_i(t)x(t + \lambda_i) + f(t), \quad (1)$$

де $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = \overline{1, N}$. Побудуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = C(t)x(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

всі розв'язки якої будуть глобальними розв'язками системи рівнянь (1). Тут A, B_i, C , – n -вимірні матричні, $i = \overline{1, N}$, f, g – векторні функції розмірності n .

Покажемо, що матрична функція $C = C(t)$ і вектор-функція $g = g(t)$ задовольняють рівняння вигляду:

$$C(t) = A(t) + \sum_{i=1}^N B_i(t)\Omega_\tau^{t+\lambda_i}(C), \quad (3)$$

$$g(t) = f(t) + \sum_{i=1}^N B_i(t) \int_t^{t+\lambda_i} \Omega_s^{t+\lambda_i}(C)g(s)ds. \quad (4)$$

Тут $\Omega_\tau^t(C)$ – нормована фундаментальна матриця системи диференціальних рівнянь (2), яка визначається з рівняння $\Omega_\tau^t(C) = I + \int_\tau^t C(s)ds + \int_\tau^t C(s) \int_\tau^s C(s_1)ds_1ds + \dots + \int_\tau^t C(s) \int_\tau^s C(s_1) \dots \int_\tau^{s_{n-2}} C(s_{n-1})ds_{n-1} \dots ds_1ds + \dots$, де I – одинична матриця, $t, \tau \in \mathbb{R}$. Даний ряд буде збіжним для всіх $t, \tau \in \mathbb{R}$, причому рівномірно за (t, τ) на кожному компактi в $\mathbb{R}^2$. Загальний розв'язок системи рівнянь (2) визначається формулою Коші

$$x(t) = \Omega_\tau^t(C)x_0 + \int_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds, \quad (5)$$

де $t, \tau \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – довільний сталий вектор. Функція (5) задовольняє систему рів-

нянь (1) тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{aligned} C(t)[\Omega_{\tau}^t(C)x_0 + \int_{\tau}^t \Omega_s^t(C)g(s)ds] + g(t) = \\ = A(t)[\Omega_{\tau}^t(C)x_0 + \int_{\tau}^t \Omega_s^t(C)g(s)ds] + \\ + \sum_{i=1}^N B_i(t)[\Omega_{\tau}^{t+\lambda_i}(C)x_0 + \\ + \int_{\tau}^{t+\lambda_i} \Omega_s^{t+\lambda_i}(C)g(s)ds] + f(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Покладаючи в тотожності (6) $x_0 = 0$, отримаємо

$$\begin{aligned} C(t) \int_{\tau}^t \Omega_s^t(C)g(s)ds + g(t) = \\ = A(t) \int_{\tau}^t \Omega_s^t(C)g(s)ds + \\ + \sum_{i=1}^N B_i(t) \int_{\tau}^{t+\lambda_i} \Omega_s^{t+\lambda_i}(C)g(s)ds + f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (7)$$

З (6) і (7) маємо рівняння

$$C(t)\Omega_{\tau}^t(C) = A(t)\Omega_{\tau}^t(C) + \sum_{i=1}^N B_i(t)\Omega_{\tau}^{t+\lambda_i}(C).$$

Враховуючи властивості матриці $\Omega_{\tau}^t(C)$, можна зробити висновок, що останнє рівняння буде вірне тільки тоді, коли

$$C(t) = A(t) + \sum_{i=1}^N B_i(t)\Omega_t^{t+\lambda_i}(C).$$

Якщо підставити (3) в (7), то одержимо

$$\begin{aligned} A(t) \int_{\tau}^t \Omega_s^t(C)g(s)ds + \\ + \sum_{i=1}^N B_i(t)\Omega_t^{t+\lambda_i}(C) \int_{\tau}^t \Omega_s^t(C)g(s)ds + g(t) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = A(t) \int_{\tau}^t \Omega_s^t(C)g(s)ds + \\ + \sum_{i=1}^N B_i(t) \int_{\tau}^{t+\lambda_i} \Omega_s^{t+\lambda_i}(C)g(s)ds + f(t). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} g(t) = f(t) + \sum_{i=1}^N B_i(t) \left[\int_{\tau}^{t+\lambda_i} \Omega_s^{t+\lambda_i}(C)g(s)ds - \right. \\ \left. - \int_{\tau}^t \Omega_s^{t+\lambda_i}(C)g(s)ds \right] = \\ = f(t) + \sum_{i=1}^N B_i(t) \int_t^{t+\lambda_i} \Omega_s^{t+\lambda_i}(C)g(s)ds. \end{aligned}$$

Отже, якщо всі розв'язки системи рівнянь (2) є глобальними розв'язками системи рівнянь (1), то матриця $C(t)$ задовольняє рівняння (3), а вектор-функція $g(t)$ – рівняння (4) при $t \in \mathbb{R}$.

З іншого боку, якщо вимірні функції C і g задовольняють рівняння (3), (4), то вектор-функція (5) при $t \in \mathbb{R}$ є глобальним розв'язком рівняння (1).

Отже, розв'язність рівнянь (3), (4) в просторі вимірних на $\mathbb{R}$ функцій є необхідною і достатньою умовою для того, щоб всі розв'язки рівняння (2) були глобальними розв'язками рівняння (1).

Теорема 1. *Нехай в системі диференціальних рівнянь (1) матричні функції $A(t), B_i(t)$ ($i = \overline{1, N}$) та вектор-функція $f(t)$ визначені й вимірні (за Лебегом) на $\mathbb{R}$, $B_i(t)$ ($i = \overline{1, N}$) – неперервні на $\mathbb{R}$ та виконуються нерівності:*

$$\|A(t)\| \leq \alpha, \quad \|B_i(t)\| \leq \beta_i,$$

$$\|f(t)\| \leq 1, \quad i = \overline{1, N}, \quad t \in \mathbb{R},$$

причому

$$\sum_{i=1}^N \beta_i |\lambda_i| e^{|\lambda_i|(\alpha + \frac{1}{\lambda})} < 1, \quad \lambda = \max_{i=\overline{1, N}} |\lambda_i|, \quad (8)$$

тоді всі розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь (2) будуть розв'язками системи диференціально-функціональних рівнянь (1) при $t \in \mathbb{R}$.

Доведемо спочатку, що рівняння (3), (4) мають розв'язки. Визначимо простір $\mathbb{C}(m)$ неперервних на $\mathbb{R}$ вектор-функцій $z = z(t)$, таких що

$$\|z\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |z(t)| \leq m.$$

Тоді $\mathbb{C}(m)$ буде повним метричним простором з метрикою $\|x - y\|$. Аналогічно визначається простір $\mathbb{C}(m)$ неперервних на $\mathbb{R}$ матричних функцій $Z = Z(t)$. Для доведення теореми 1 доведемо спочатку дві допоміжні лема.

Розглянемо рівняння (3). Доведемо лему 1 про його розв'язність.

Лема 1. Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді існує визначений і вимірний на $\mathbb{R}$ розв'язок C рівняння (3), такий, що

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |C(t)| \leq M_1,$$

де M_1 – деяка стала, що залежить від α , λ_i , β_i , $i = \overline{1, N}$.

Доведення лем 1. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, N}$. Виконаємо заміну змінних у рівнянні (3)

$$C = A + Z.$$

Отримаємо рівняння

$$Z(t) = \sum_{i=1}^N B_i \Omega_t^{t+\lambda_i} (A + Z). \quad (9)$$

Його розв'язки будуть неперервними функціями в силу умов, визначених вище.

Розглянемо оператор S

$$SZ(t) = \sum_{i=1}^N B_i \Omega_t^{t+\lambda_i} (A + Z).$$

в просторі $\mathbb{C}(m)$ матриць $Z = Z(t)$, заданих і неперервних на $\mathbb{R}$. Тоді для $SZ(t)$ вірна оцінка

$$\|SZ\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\sum_{i=1}^N \|B_i\| \Omega_t^{t+\lambda_i} (\|A\| + m) \right) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^N \beta_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}.$$

Якщо виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^N \beta_i e^{\lambda_i(\alpha+m)} \leq m, \quad (10)$$

то оператор S переводить простір $\mathbb{C}(m)$ в себе.

Нехай $Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}(m)$. Оцінимо різницю

$$\begin{aligned} & SZ_1(t) - SZ_2(t) = \\ &= \sum_{i=1}^N B_i \Omega_t^{t+\lambda_i} (A + Z_1) - \sum_{i=1}^N B_i \Omega_t^{t+\lambda_i} (A + Z_2) = \\ &= \sum_{i=1}^N B_i \left(\Omega_t^{t+\lambda_i} (A + Z_1) - \Omega_t^{t+\lambda_i} (A + Z_2) \right). \end{aligned}$$

Введемо позначення $P_1 = A + Z_1$, $P_2 = A + Z_2$ і спочатку розглянемо різниці $\Omega_t^{t+\lambda_i} (P_1) - \Omega_t^{t+\lambda_i} (P_2)$, $i = \overline{1, N}$, тоді маємо

$$\begin{aligned} & \left\| \int_t^{t+\lambda_i} P_1(s) ds - \int_t^{t+\lambda_i} P_2(s) ds \right\| \leq \\ & \leq \int_t^{t+\lambda_i} \|P_1(s) - P_2(s)\| ds \leq \\ & \leq \lambda_i \|Z_1 - Z_2\|, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Далі,

$$\begin{aligned} & \left\| \int_t^{t+\lambda_i} P_1(s) \int_t^s P_1(s_1) ds_1 ds - \right. \\ & \left. - \int_t^{t+\lambda_i} P_2(s) \int_t^s P_2(s_1) ds_1 ds \right\| \leq \\ & \leq \left\| \int_t^{t+\lambda_i} (P_1(s) - P_2(s)) \int_t^s P_1(s_1) ds_1 ds + \right. \\ & \left. + \int_t^{t+\lambda_i} P_2(s) \int_t^s (P_1(s_1) - P_2(s_1)) ds_1 ds \right\| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_t^{t+\lambda_i} \int_t^s \|P_1(s_1)\| ds_1 ds + \right. \\
&\quad \left. + \int_t^{t+\lambda_i} \|P_2(s)\| \int_t^s ds_1 ds \right) \|P_1 - P_2\| \leq \\
&\leq 2(\alpha + m) \frac{\lambda_i^2}{2!} \|Z_1 - Z_2\| = \\
&= \lambda_i \frac{(\alpha + m)\lambda_i}{1!} \|Z_1 - Z_2\|, \quad i = \overline{1, N}.
\end{aligned}$$

Продовжуючи цей процес, одержимо

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_t^{t+\lambda_i} P_1(s) \int_t^s P_1(s_1) \dots \right. \\
&\quad \left. \int_t^{s_{n-2}} P_1(s_{n-1}) ds_{n-1} \dots ds_1 ds - \right. \\
&\quad \left. - \int_t^{t+\lambda_i} P_2(s) \int_t^s P_2(s_1) \dots \right. \\
&\quad \left. \int_t^{s_{n-2}} P_2(s_{n-1}) ds_{n-1} \dots ds_1 ds \right\| \leq \\
&\leq \lambda_i \frac{(\alpha + m)^{n-1} \lambda_i^{n-1}}{(n-1)!} \|Z_1 - Z_2\|, \quad i = \overline{1, N}.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
&\|\Omega_t^{t+\lambda_i}(P_1) - \Omega_t^{t+\lambda_i}(P_2)\| \leq \\
&\leq \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)} \|Z_1 - Z_2\|, \quad i = \overline{1, N}.
\end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned}
&\|SZ_1(t) - SZ_2(t)\| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^N \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)} \|Z_1 - Z_2\|, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, N}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Оператор S буде оператором стиску в $\mathbb{C}(m)$, якщо виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^N \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)} < 1. \tag{12}$$

Будемо вимагати одночасного виконання нерівностей (10) і (12). Введемо до розгляду величину $\lambda = \max_{i=\overline{1, N}} |\lambda_i|$. Від умови (10) перейдемо до сильнішої

$$e^{\lambda(\alpha+m)} \sum_{i=1}^N \beta_i \leq m.$$

Нехай виконується умова (8), коли $\lambda_i > 0$, тоді рівняння $e^{\lambda(\alpha+m)} \sum_{i=1}^N \beta_i = m$ матиме розв'язки, але тільки для

$$m_1 \leq m < \frac{1}{\lambda} \tag{13}$$

будуть одночасно виконуватись нерівності (10) і (12).

Отже, при виконанні нерівності (8) для значень m , які задовольняють нерівність (13), оператор S є оператором стиску і відображає простір $\mathbb{C}(m)$ в себе. Тобто S має в просторі $\mathbb{C}(m)$ єдину нерухому точку, яка і є розв'язком рівняння (3). Лему 1 доведено.

Розглянемо тепер рівняння (4) і доведемо наступну лему про його розв'язність.

Лема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді існує визначений і вимірний на $\mathbb{R}$ розв'язок g рівняння (4), такий, що*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |g(t)| \leq M_2,$$

де M_2 – деяка стала, що залежить від α , λ_i , β_i , $i = \overline{1, N}$.

Доведення леми 2. Виконаємо в рівнянні (4) заміну змінних $g = f + z$, отримаємо рівняння

$$\begin{aligned}
z(t) &= \sum_{i=1}^N B_i(t) \left[\int_t^{t+\lambda_i} \Omega_s^{t+\lambda_i}(C) f(s) ds + \right. \\
&\quad \left. + \int_t^{t+\lambda_i} \Omega_s^{t+\lambda_i}(C) z(s) ds \right] = \\
&= \sum_{i=1}^N B_i(t) \left[\int_0^{\lambda_i} \Omega_{s+t}^{t+\lambda_i}(C) f(t+s) ds + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\lambda_i} \Omega_{s+t}^{t+\lambda_i}(C) z(t+s) ds \right].
\end{aligned} \tag{14}$$

Визначимо оператор S_1 в просторі $\mathbb{C}(M_2)$ функцій $z = z(t)$, заданих і неперервних на $\mathbb{R}$

$$S_1 z(t) = \sum_{i=1}^N B_i(t) \left[\int_0^{\lambda_i} \Omega_{s+t}^{t+\lambda_i}(C) f(t+s) ds + \int_0^{\lambda_i} \Omega_{s+t}^{t+\lambda_i}(C) z(t+s) ds \right].$$

Функція $S_1 z(t)$ буде неперервною на $\mathbb{R}$, причому

$$\|S_1 z\| \leq (1 + M_2) \sum_{i=1}^N \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}.$$

Тому, якщо

$$(1 + M_2) \sum_{i=1}^N \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)} \leq M_2. \quad (15)$$

то оператор S_1 переводить простір $\mathbb{C}(M_2)$ в себе. Для довільних вектор-функцій $z_1, z_2 \in \mathbb{C}(M_2)$ розглянемо різницю

$$\begin{aligned} S_1 z_1(t) - S_1 z_2(t) &= \\ &= \sum_{i=1}^N B_i(t) \left[\int_0^{\lambda_i} \Omega_{s+t}^{t+\lambda_i}(C) f(t+s) ds + \int_0^{\lambda_i} \Omega_{s+t}^{t+\lambda_i}(C) z_1(t+s) ds \right] - \\ &- \sum_{i=1}^N B_i(t) \left[\int_0^{\lambda_i} \Omega_{s+t}^{t+\lambda_i}(C) f(t+s) ds + \int_0^{\lambda_i} \Omega_{s+t}^{t+\lambda_i}(C) z_2(t+s) ds \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N B_i(t) \left[\int_0^{\lambda_i} \Omega_{s+t}^{t+\lambda_i}(C) (z_1(t+s) - z_2(t+s)) ds \right]. \end{aligned}$$

Тому

$$\|S_1 z_1(t) - S_1 z_2(t)\| \leq \sum_{i=1}^N \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)} \|z_1 - z_2\|.$$

При виконанні умови $\sum_{i=1}^N \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)} < 1$ оператор S_1 буде оператором стиску в $\mathbb{C}(M_2)$. Враховуючи цю нерівність, із (15) одержимо, що при

$$M_2 \geq \frac{\sum_{i=1}^N \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}}{1 - \sum_{i=1}^N \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}}$$

оператор S_1 відображає $\mathbb{C}(M_2)$ в себе і є стискаючим. Простір $\mathbb{C}(M_2)$ є повним нормованим простором і цього достатньо, щоб існував єдиний розв'язок рівняння (14), отже, і рівняння (4). Лему 2 доведено.

Доведення теореми 1. Щоб довести теорему 1, потрібно було показати, що кожне із рівнянь (3) і (4) має єдиний розв'язок на $\mathbb{R}$. Існування єдиного розв'язку для рівняння (3) було доведено в лемі 1, а для рівняння (4) – в лемі 2.

Якщо $\lambda_i, i = \overline{1, N}$, є числами різних знаків, то при доведенні теореми замість λ_i потрібно писати $|\lambda_i|$, як в умові (8).

Теорему 1 доведено.

Наступна теорема характеризує властивості розв'язків рівнянь (3) і (4).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 і матричні функції $A(t), B_i(t)$ ($i = \overline{1, N}$) та вектор-функція $f(t)$ в системі диференціальних рівнянь (1) є r разів неперервно диференційовними, періодичними, квазіперіодичними або майже періодичними функціями. Тоді r разів неперервно диференційовними, періодичними, квазіперіодичними або майже періодичними є розв'язки C і g рівнянь (3), (4).*

Справді, із рівнянь (9) і (14) випливає, що їх розв'язки мають гладкість на порядок вищу, ніж гладкість функцій A, B_i ($i = \overline{1, N}$) та f . Тому функції $C(t)$ і $g(t)$ мають гладкість функцій A, B_i ($i = \overline{1, N}$), f . Для завершення доведення теореми 2 доведемо спочатку наступну лему.

Лема 3. *Нехай виконуються умови теореми 1 та існує послідовність $\tau_n \in \mathbb{R}, n =$*

1, 2, ..., така, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\|A_n - A\| + \sum_{i=1}^N \|B_n^i - B_i\| + \|f_n - f\|] = 0, \quad (16)$$

де $A_n = A(t + \tau_n)$, $B_n^i = B_i(t + \tau_n)$, $f_n = f(t + \tau_n)$, $i = \overline{1, N}$. Тоді розв'язки C і g рівнянь (3), (4) задовольняють умову

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\|C_n - C\| + \|g_n - g\|] = 0, \quad (17)$$

де $C_n = C(t + \tau_n)$, $g_n = g(t + \tau_n)$.

Доведення леми 3. Встановимо співвідношення (17) для розв'язків рівнянь (3), (4). Позначимо $\Omega_\tau^t(C) = \Omega_\tau^t(C(s))$ і розглянемо спочатку різницю $Z_n - Z = Z(t + \tau_n) - Z(t)$. Маємо

$$\begin{aligned} Z_n - Z &= \sum_{i=1}^N B_i(t + \tau_n) \Omega_{t+\tau_n}^{t+\tau_n+\lambda_i}(A(s) + Z(s)) - \\ &- \sum_{i=1}^N B_i(t) \Omega_t^{t+\lambda_i}(A(s) + Z(s)) = \\ &= \sum_{i=1}^N B_i(t + \tau_n) \Omega_0^{\lambda_i}(A(t + s + \tau_n) + \\ &+ Z(t + s + \tau_n)) - \\ &- \sum_{i=1}^N B_i(t) \Omega_0^{\lambda_i}(A(t + s) + Z(t + s)) = \\ &= \left[\sum_{i=1}^N B_i(t + \tau_n) \Omega_0^{\lambda_i}(A(t + s + \tau_n) + \right. \\ &+ Z(t + s + \tau_n)) - \\ &- \sum_{i=1}^N B_i(t) \Omega_0^{\lambda_i}(A(t + s + \tau_n) + \\ &+ Z(t + s + \tau_n)) \left. \right] + \\ &+ \left[\sum_{i=1}^N B_i(t) \Omega_0^{\lambda_i}(A(t + s + \tau_n) + \right. \\ &+ Z(t + s + \tau_n)) - \\ &- \sum_{i=1}^N B_i(t) \Omega_0^{\lambda_i}(A(t + s) + Z(t + s + \tau_n)) \left. \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \left[\sum_{i=1}^N B_i(t) \Omega_0^{\lambda_i}(A(t + s) + Z(t + s + \tau_n)) - \right. \\ &- \sum_{i=1}^N B_i(t) \Omega_0^{\lambda_i}(A(t + s) + Z(t + s)) \left. \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N (B_i(t + \tau_n) - B_i(t)) \Omega_0^{\lambda_i}(A(t + s + \tau_n) + \\ &+ Z(t + s + \tau_n)) + \\ &+ \sum_{i=1}^N B_i(t) (\Omega_0^{\lambda_i}(A(t + s + \tau_n) + Z(t + s + \tau_n)) - \\ &- \Omega_0^{\lambda_i}(A(t + s) + Z(t + s + \tau_n))) + \\ &+ \sum_{i=1}^N B_i(t) (\Omega_0^{\lambda_i}(A(t + s) + Z(t + s + \tau_n)) - \\ &- \Omega_0^{\lambda_i}(A(t + s) + Z(t + s))). \quad (18) \end{aligned}$$

Враховуючи (11) і (18), отримуємо

$$\begin{aligned} \|Z_n - Z\| &\leq \sum_{i=1}^N \|B_n^i - B_i\| e^{\lambda_i(\alpha+m)} + \\ &+ \sum_{i=1}^N \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)} \|A_n - A\| + \\ &+ \sum_{i=1}^N \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)} \|Z_n - Z\|. \end{aligned}$$

Якщо виконується оцінка (8), то

$$\begin{aligned} \|Z_n - Z\| &\leq \frac{\sum_{i=1}^N \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}}{1 - \sum_{i=1}^N \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}} \|A_n - A\| + \\ &+ \sum_{i=1}^N \frac{e^{\lambda_i(\alpha+m)}}{1 - \sum_{j=1}^N \beta_j \lambda_j e^{\lambda_j(\alpha+m)}} \|B_n^i - B_i\|. \end{aligned}$$

Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Z_n - Z\| = 0.$$

А ця рівність доводить, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|C_n - C\| = 0. \quad (19)$$

Нехай $z_n = z(t + \tau_n)$. Тоді із врахуванням (14), для різниці $z_n - z$ одержимо рівняння

$$z_n - z = \sum_{i=1}^N B_i(t + \tau_n) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\int_0^{\lambda_i} \Omega_{t+\tau_n+s}^{t+\tau_n+\lambda_i}(C) f(t+\tau_n+s) ds + \right. \\
& \left. + \int_0^{\lambda_i} \Omega_{t+\tau_n+s}^{t+\tau_n+\lambda_i}(C) z(t+\tau_n+s) ds \right] - \\
& - \sum_{i=1}^N B_i(t) \left[\int_0^{\lambda_i} \Omega_{t+s}^{t+\lambda_i}(C) f(t+s) ds + \right. \\
& \left. + \int_0^{\lambda_i} \Omega_{t+s}^{t+\lambda_i}(C) z(t+s) ds \right] = \\
& = \sum_{i=1}^N \left[B_i(t+\tau_n) \int_0^{\lambda_i} \Omega_{t+\tau_n+s}^{t+\tau_n+\lambda_i}(C) f(t+\tau_n+s) ds - \right. \\
& - B_i(t) \int_0^{\lambda_i} \Omega_{t+\tau_n+s}^{t+\tau_n+\lambda_i}(C) f(t+\tau_n+s) ds + \\
& + B_i(t) \int_0^{\lambda_i} \Omega_{t+\tau_n+s}^{t+\tau_n+\lambda_i}(C) f(t+\tau_n+s) ds - \\
& - B_i(t) \int_0^{\lambda_i} \Omega_{t+s}^{t+\lambda_i}(C) f(t+\tau_n+s) ds + \\
& + B_i(t) \int_0^{\lambda_i} \Omega_{t+s}^{t+\lambda_i}(C) f(t+\tau_n+s) ds - \\
& - B_i(t) \int_0^{\lambda_i} \Omega_{t+s}^{t+\lambda_i}(C) f(t+s) ds \left. \right] + \\
& + \sum_{i=1}^N \left[B_i(t+\tau_n) \int_0^{\lambda_i} \Omega_{t+\tau_n+s}^{t+\tau_n+\lambda_i}(C) z(t+\tau_n+s) ds - \right. \\
& - B_i(t) \int_0^{\lambda_i} \Omega_{t+\tau_n+s}^{t+\tau_n+\lambda_i}(C) z(t+\tau_n+s) ds + \\
& + B_i(t) \int_0^{\lambda_i} \Omega_{t+\tau_n+s}^{t+\tau_n+\lambda_i}(C) z(t+\tau_n+s) ds - \\
& - B_i(t) \int_0^{\lambda_i} \Omega_{t+s}^{t+\lambda_i}(C) z(t+s) ds \left. \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - B_i(t) \int_0^{\lambda_i} \Omega_{t+s}^{t+\lambda_i}(C) z(t+\tau_n+s) ds + \\
& + B_i(t) \int_0^{\lambda_i} \Omega_{t+s}^{t+\lambda_i}(C) z(t+\tau_n+s) ds - \\
& - B_i(t) \int_0^{\lambda_i} \Omega_{t+s}^{t+\lambda_i}(C) z(t+s) ds \left. \right].
\end{aligned}$$

Враховуючи попередньо встановлені оцінки, отримаємо

$$\begin{aligned}
\|z_n - z\| & \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)} \|B_n^i - B_i\| + \\
& + \sum_{i=1}^N \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)} \|C_n - C\| + \\
& + \sum_{i=1}^N \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)} \|f_n - f\| + \\
& + \sum_{i=1}^N M \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)} \|B_n^i - B_i\| + \\
& + \sum_{i=1}^N M \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)} \|C_n - C\| + \\
& + \sum_{i=1}^N \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)} \|z_n - z\| = \\
& = \sum_{i=1}^N \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)} (1+M) \|B_n^i - B_i\| + \\
& + \left(\sum_{i=1}^N \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)} \right) \left((1+M) \|C_n - C\| + \right. \\
& \left. + \|f_n - f\| + \|z_n - z\| \right).
\end{aligned}$$

Звідси, із врахуванням нерівності (8), умови (16) леми і одержаної рівності (19), випливає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z\| = 0,$$

тому і $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\| = 0$.
Лему доведено.

Із доведеної леми випливає справедливості теореми 2 для майже періодичних функцій $A(t)$, $B_i(t)$ ($i = \overline{1, N}$), $f(t)$, до того ж частотні базиси функцій $A(t)$, $B_i(t)$ ($i = \overline{1, N}$), $f(t)$ та розв'язків C і g співпадають. Тому теорема 2 справедлива і для випадку, коли $A(t), B_i(t)$ ($i = \overline{1, N}$), $f(t)$ періодичні чи квазіперіодичні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М.* Об одной задаче исследования глобальных решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, №5. – С. 631–640.
2. *Самойленко А.М., Денисенко Н.Л.* Про розв'язки на півосі системи лінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійно перетвореним аргументом // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, №4. – С. 501–513.
3. *Сергеева Л.М., Бігун Я.Й.* Знаходження глобальних розв'язків функціонально-диференціальних рівнянь // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. праць. Вип. 485. Математика. – Чернівці: Рута, 2009. – С. 108–112.
4. *Сергеева Л.М., Бігун Я.Й.* Про глобальні розв'язки функціонально-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, №1. – С. 100–110.