Bukovinian Math. Journal. 2022, **10**, 1, 120–128 Буковинський матем. журнал 2022, Т.10, №1, 120–128

Тузик І.І., Черевко І.М.

Апроксимація крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням

Встановлені достатні умови існування розв'язку крайової задачі для інтегро-диференціального рівняння з багатьма запізненнями. Запропоновано і обгрунтовано схему апроксимації крайової задачі із запізненням послідовністю крайових задач для спеціальної системи звичайних диференціальних рівнянь.

Ключові слова і фрази: крайова задача, апроксимація, інтегро-диференціальні рівняння, запізнення.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine
e-mail: *i.tuzyk@chnu.edu.ua,i.cherevko@chnu.edu.ua*

Вступ

Математичні моделі, що описуються інтегро-диференціальними рівняннями, виникають при вивченні прикладних фізичних економічних, екологічних процесів. Зокрема, інтегро-диференціальні рівняння Вольтерри із запізненням відіграють важливу роль при моделюванні багатьох реальних явищ в екології [1].

Розв'зування крайових задач в аналітичній формі є складною задачею, тому значна увага приділяється розробці методів їх наближеного розв'язання. Відзначемо засточування апарату кубічних сплайнів дефекту два знаходження наближених розв'язків крайових задач із запізненням в роботах [2, 3].

Цікавимим для прикладних застосувань виявилась схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь [4, 5]. Метою даної роботи є застосування даного підходу до наближення нового класу крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь з багатьма запізненнями.

УДК 517.929.7
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34K10.

1 Постановка задачі

Розглянемо крайову задачу для інтегро-диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями

$$y'' = f(x, y(x), y(x-\tau_1), ..., y(x-\tau_n)) + \int_a^b g(x, s, y(s), y(s-\tau_1), ..., y(s-\tau_n))ds, x \in [a, b] \tag{1}$$

$$y(x) = \varphi(x), x \in [a-\tau, a], y(b) = \gamma, \tag{2}$$

де $0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_n = \tau, \varphi(x) \in C[a-\tau, a], \gamma \in R$.

Нехай $f(x, u_0, u_1, ..., u_n), g(x, s, u_0, u_1, ..., u_n)$ неперервні функції в областях: $G_1 = [a, b] \times G^k, G_2 = [a, b] \times [a, b] \times G^k$, де $G = \{u \in R, |u| \leq P_1\}$, P_1-додатня стала.

Відзначимо, що розв'язок крайової задачі (1)-(2) в точках $x_i = a + \tau_i, i = \overline{1, n}$, взагалі кажучи має розривну другу похідну.

Введемо позначення:

$$\begin{gathered} P = sup\{(f(x, y(x), y(x-\tau_1), ..., y(x-\tau_n))+ \\ + \int_a^b g(x, s, y(s), y(s-\tau_1), ..., y(s-\tau_n))ds : |y(x)| \leq P_1, |y(x-\tau_i)| \leq P_1, i = \overline{1, n}, x, s \in [a, b]\} \\ J = [a-\tau], I = [a, b], I_1 = [a, x_1], J_2 = [x_1, x_2], ..., I_{n+1} = [x_n, b]. \end{gathered} \tag{3}$$

Розглянемо клас функцій

$$B = \{y(x) : y(x) \in (C(J \bigcup I) \bigcap C^1(I) \bigcap (\bigcup_{i=1}^{n+1} C^2(I_i))), |y(x) < P_1|\}.$$

Розв'язок крайової задачі (1)-(2) будемо вважати функцію $y = y(x)$ із простору B, яка задовольняє рівняння (1)(за можливим винятком точок $x_i = a + \tau_i$) та крайові умови (2).

2 Існування розв'язку

Введемо в класі функції B норму

$$\| y \|_B = \frac{9}{(b-a)^2} \max_{t \in J \bigcup I} |y(x)|. \tag{4}$$

Простір B з цією нормою є банаховим простором. Крайова задача (1)-(2) еквівалентна інтегральному рівнянню [6].

$$\begin{gathered} y(x) = \int_{a-\tau}^b [(f(s, y(s), y(s-\tau_1), ..., y(s-\tau_n))+ \\ + \int_a^b g(x, \xi, y(\xi), y(\xi-\tau_1), ..., y(\xi-\tau_n))ds]\overline{G}(x, s)ds + l(x), x \in J \bigcup I, \end{gathered} \tag{5}$$

$$\overline{G}(x,s) = \{ \begin{array}{c} G(x,s), x_n s \in I \\ 0, \text{в іншому випадку}, \end{array} \quad l(x) = \{ \begin{array}{c} \varphi(x), x \in J, \\ \frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}(x-a) + \varphi(a), \end{array}$$

$$G(x,s) = \{ \begin{array}{c} \frac{(s-a)(x-b)}{b-a}, a \le s \le x \le b, \\ \frac{(x-a)(s-b)}{b-a}, a \le x \le s \le b, \end{array} \text{ функція Гріна крайової задачі}$$

$$y''(x) = 0, x \in I, y(a) = y(b) = 0.$$

Визначимо оператор T у просторі B наступним чином

$$(Ty)(x) = \int\limits_{a-\tau}^{b} [(f(s, y(s), y(s-\tau_1), ..., y(s-\tau_n)) +$$
$$+ \int\limits_{a}^{b} g(x, \xi, y(\xi), y(\xi-\tau_1), ..., y(\xi-\tau_n))ds]\overline{G}(x,s)ds + l(x), x \in J \bigcup I.$$

Має місце теорема

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1. $max\{\max\limits_{x\in J} |\varphi(x)|, \frac{(b-a)^2}{2}P + \max\{|\varphi(a)|, |\varphi|\} \le P_1,$

2. Функції $f(x, u_0, u_1, ..., u_n), g(x, u_0, u_1, ..., u_n)$ *задовольняють умову Ліпшица в області* G *за змінними* $u_0, u_1, ..., u_n$ *зі сталими* $L_i, R_i, i = \overline{0,n}$ *відповідно,*

3. $\frac{(b-a)^2}{8} \sum\limits_{i=0}^{n} (L_i + (b-a)R_i) < 1.$

Тоді існує єдиний роз'язок крайової задачі (1)-(2) у просторі B.

Доведення теореми 1 нескладно провести аналогічно до тереми 1 [3].

3 Схеми апроксимації

Одним із методів дослідження диференціальних рівнянь із запізненням є апроксимація елемента запізнення $y(x-\tau)$, що входить в рівняння. Нехай $y(x)$ вхідна функція елемента запізнення, а $v(x)$ - вихідна функція, що звя'язані співвідношенням

$$v(x) = y(x-\tau), a \le x \le b.$$

Поставимо елементу запізнення у відповідність аперіодичну ланку, що описується рівнянням [4]

$$\tau z'(x) + z(x) = v(x).$$

Нескладно показати [7], що різниця між вихідним станом елемента запізнення $v(x)$ і значенням аперіодичної ланки $z(x)$ буде малою при малому τ. Для покращення точності апроксимації розглядаємо послідовність із m елементів запізнення, що послідовно між собою зв'язані

$$v_1(x) = y(x - \frac{\tau}{m}), v_2(x) = y_1(x - \frac{\tau}{m}) = y(x - \frac{2\tau}{m}), ...,$$

$$v_m(x) = y_{m-1}(x - \frac{\tau}{m}) = y(x-\tau).$$

Поставимо їм у відповідність послідовність аперіодичних ланок, що описуються системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered} \frac{\tau}{m} z_1'(x) + z_1(x) = y(x), \\ \frac{\tau}{m} z_i'(x) + z_i(x) = z_{i-1}(x), i = \overline{2,m}, x \in [a,b]. \end{gathered} \tag{6}$$

$$z_i(a) = y(a - \frac{i\tau}{m}), i = \overline{1,m}, \tag{7}$$

де $y(x)$- вхідна функція першого елемента запізнення.

Зазначимо, що систему (6)-(7) досліджено в роботах [7, 8]. У випадку, коли функція $y(x)$ задовольняє умову Ліпшиця або має обмежену сталою M похідну на $[a-\tau,b]$ маємо співвідношення

$$|z_i(x) - v_i(x)| \le \frac{2M\tau}{\sqrt{m}}, x \in [a,b], i = \overline{1,m}. \tag{8}$$

Якщо $y(x) \in C[a-\tau,b]$, то в цьому випадку справджуються нерівності

$$|z_i(x) - v_i(x)| \le 2(\frac{K\tau}{\sqrt{m}} + \omega(y, \frac{\tau}{m})), x \in [a,b], i = \overline{1,m}, \tag{9}$$

де стала $K > 0$ не залежть від m, а

$$\omega(y, \frac{\tau}{m}) = \max_{|x'-x<\frac{\tau}{m}, x', x" \in [a-\tau,b]} |y(x') - y(x")|$$

модуль неперервності $y(x)$ на $[a-\tau,b]$.

Розглянемо тепер застосування схеми апроксимації диференціальних рівнянь із запізненням [4, 5, 7, 8] до крайової задачі (1)-(2). Поставимо у відповідність крайовій задачі (1)-(2) крайову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{gathered} z_0''(x) = f(x, z_0(x), z_{l_1}(x), ...z_{l_n}(x)) + \\ + \int_a^b g(x, s, z_0(s), z_{l_i}(s), ..., z_{l_n}(s))ds], l_i = [\tfrac{m\tau_i}{\tau}], \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} z_j'(x) = \tfrac{m}{\tau}(z_{j-1}(x) - z_j(x)), j = \overline{1,m}, m \in N, x \in [a,b], \\ z_j(a) = \varphi(a - \tfrac{j\tau}{m}), j = \overline{0,m}, z_0(b) = \gamma. \end{gathered} \tag{11}$$

Будемо говорити, що крайова задача (10)-(11) апроксимує крайову задачу (1)-(2), якщо справджуються співвідношення

$$|z_j(x) - y(x - \frac{j\tau}{m})| \to 0 \tag{12}$$

при $m \to \infty, t \in I, j = \overline{0,m}$.

Введемо позначення

$$N_j(x) = \max_{a \le \xi \le x} |z_j(\xi) - y(\xi - \frac{j\tau}{m})|, x \in I, \tag{13}$$

$$z_j(x) = z_j^{(1)}(x) + z_j^{(2)}(x), j = \overline{1,m}, \tag{14}$$

де $z_j^{(1)}(x)$ та $z_j^{(2)}(x)$ - розв'язки таких задач

$$\begin{gathered} \tfrac{\tau}{m}{z'}_1^{(1)}(x)+z_1^{(1)}(x)=y(x),\\ \tfrac{\tau}{m}{z'}_j^{(1)}(x)+z_j^{(1)}(x)=z_{j-1}^{(1)},j=\overline{2,m},\\ z_j(a)=y(a-\tfrac{j\tau}{m}),j=\overline{1,m}, \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} \tfrac{\tau}{m}{z'}_1^{(2)}(x)+z_1^{(2)}(x)=z_0(x)-y(x),\\ \tfrac{\tau}{m}{z'}_j^{(2)}(x)+z_j^{(2)}(x)=z_{j-1}^{(2)},j=\overline{2,m},\\ z_j^{(2)}(a)=0,j=\overline{1,m}. \end{gathered} \tag{16}$$

Оцінимо різниці $z_j(x)-y(x-\frac{j\tau}{m})$ враховуючи вигляд системи (15), (16). Згідно представлення (14) маємо

$$|z_j(x)-y(x-\frac{j\tau}{m})|\le|z_j^{(1)}(x)-y(x-\frac{j\tau}{m})|+|z_j^{(2)}(x)|. \tag{17}$$

На підставі нерівностей (9) для першого доданку у правій частині (17) дістаємо

$$|z_j(x)-y(x-\frac{j\tau}{m})|\le 2(\frac{\tau}{\sqrt{m}}+\omega(y,\frac{\tau}{m})). \tag{18}$$

Для другого доданка в правій частині нерівності (17), аналогічно, як в [9] нескладно одержати оцінку

$$|z_j^{(2)}(x)|\le\max_{a\le\xi\le x}|z_0(\xi)-y(\xi)|=N_0(x). \tag{19}$$

Із оцінок (18),(19) дістаємо нерівність

$$N_j(x)\le\beta(\frac{\tau}{m})+N_0(x),j=\overline{1,m},x\in I, \tag{20}$$

де $\beta(\frac{\tau}{m})=2(\frac{K\tau}{m}+\omega(y,\frac{\tau}{m}))$.

Знайдемо оцінку різниці $|y(x-\tau_j)-z_{l_j}|:$

$$|y(x-\tau_j)-z_{l_j}|\le|y(x-\tau_j)-y(x-\frac{\tau l_j}{m})|+|y(x-\frac{\tau l_j}{m})-z_{l_j}(x)|.$$

Оскільки індекс l_j однозначно визначається нерівністю

$$\frac{\tau l_j}{m}\le\tau_j<\frac{\tau l_j t}{m},$$

то $\frac{\tau}{m}>\tau_j-\frac{\tau l_j}{m}>0$, тому $|y(x-\tau_j)-y(x-\frac{\tau l_j}{m})|\le\omega(y,\frac{\tau}{m})$.

Отже дістаємо оцінку

$$|y(x-\tau_j)-z_{l_j(x)}|\le N_{l_j}(x)+\omega(y,\frac{\tau}{m}))\le N_0(x)+\beta(\frac{\tau}{m})+\omega(y,\frac{\tau}{m})\le N_0(x)+\beta_1(\frac{\tau}{m}), \tag{21}$$

де $\beta_1(\frac{\tau}{m})=\beta(\frac{\tau}{m})+\omega(y,\frac{\tau}{m})$.

Крайова задача для функції $z_0(x)$ еквівалентна інтегральному рівнянню

$$z_0(x) = \int_a^b [f(s, z_0(s), z_{l_i}(s), ..., z_{l_n}(s))ds+ \\ \int_a^b g(s, \xi, z_0(\xi), z_{l_1}(\xi), ..., z_{l_n}(\xi))d\xi]G(x,s)ds + \frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a} + \varphi(a), x \in I. \tag{22}$$

Використовуючи властивості функції f і g із (5) та (22) при $x \in I$ дістаємо

$$|y(x) - z_0(x)| \le \int_a^b [\sum_{i=0}^{n}(L_i + (b-a)R_i)N_0(s)+ \\ +(b-a)\sum_{i=1}^{n}(L_i + (b-a)R_i)\beta_1(\tfrac{\tau}{m})]|G(x,s)|ds.$$

Враховуючи тепер оцінку $|G(x,s)| \le \frac{b-a}{4}$ [10] та нерівності (21) одержуємо

$$|y(x) - z_0(x)| \le \tfrac{b-a}{4}[\sum_{i=0}^{n}(L_i + (b-a)R_i)\int_a^b N_0(s)ds+ \\ +\tfrac{(b-a)^3}{4}\sum_{i=1}^{n}(L_i + (b-a)R_i)\beta_1(\tfrac{\tau}{m})], x \in I. \tag{23}$$

Остання нерівність справджується для будь якого $x \in I$, тому враховуючи позначення (13) маємо

$$N_0(b) \le \tfrac{b-a}{4}[\sum_{i=0}^{n}(L_i + (b-a)R_i)\int_a^b N_0(s)ds+ \\ +\tfrac{(b-a)^3}{4}\sum_{i=1}^{n}(L_i + (b-a)R_i)\beta_1(\tfrac{\tau}{m})].$$

Скориставшись тепер нерівністю Гронуолла-Беллмана дістаємо

$$N_0(b) \le \tfrac{(b-a)^2}{4}[\sum_{i=1}^{n}(L_i + (b-a)R_i)e^{\frac{(b-a)^2}{4}[\sum\limits_{i=0}^{n}(L_i+(b-a)R_i)}\beta_1(\tfrac{\tau}{m})$$

Нерівності (20) в цьому випадку набувають вигляду

$$N_0(b) \le \beta(\tfrac{\tau}{m}) + \tfrac{(b-a)^3}{4}[\sum_{i=1}^{n}(L_i + (b-a)R_i)e^{\frac{(b-a)^2}{4}[\sum\limits_{i=0}^{n}(L_i+(b-a)R_i)}\beta_1(\tfrac{\tau}{m}) = \beta_2(\tfrac{\tau}{m}), j = \overline{1,m}. \tag{24}$$

Підсумуємо одержаний результат у вигляді теореми

Теорема 2. *Нехай функції* $f(x, u_0, u_1, ..., u_n), g(x, t, u_0, u_1, ..., u_n)$ *задовольняють умови теореми 1.Тоді крайова задача (10)-(11) апроксимує крайову задачу (1)-(2) і справджуються співвідношення*

$$\max_{x\in I}|z_j(x) - y(x - \frac{j\tau}{m})| \le \beta_2(\frac{\tau}{m}),$$

де $\lim\limits_{m\to\infty}\beta_2(\frac{\tau}{m}) = 0$.

4 Приклад

Розглянемо модельний приклад, який ілюструє наведену методику апроксимації крайових задач із запізненням.

$$y''(x) = y(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(s - \frac{\pi}{2})ds, x \in [0, \frac{\pi}{2}], \tag{25}$$

$$y(x) = \sin x + 2, x \in [-\frac{\pi}{2}, 0], y(\frac{\pi}{2}) = 4. \tag{26}$$

Точний розв'язок даної крайової задачі знаходимо безпосередньо методом кроків

$$y_t(x) = (3 - \pi)\cos x + (5 - \pi)\sin x + \pi - 1.$$

Аналогічна (10)-(11) апроксимуюча для (25)-(26) крайова задача для звичайних інтегро-диференціальних рівнянь має вигляд

$$\begin{gathered} z"_0(x) = -z_0(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} z_n(s)ds, \\ z_j'(x) = \frac{m}{\tau}(z_{j-1}(x) - z_j(x)), m \in N, j = \overline{1, m}, x \in [0, \frac{\pi}{2}], \end{gathered} \tag{27}$$

$$z_j(0) = sin(-\frac{-j\tau}{m}) + 2, j = \overline{0, m}, z_0(\frac{\pi}{2}) = 4. \tag{28}$$

Наближений розв'зок крайової задачі (27)-(28) можна знайти використовуючи класичні різницеві схеми.

У таблиці 1 наведено результати числових експерементів апроксимації розв'язку крайової задачі (25)-(26), де $y_t(x)$ - точний розв'язок, $y_a(x)$ - розв'язок апроксимуючої крайової задачі (27)-(28) при $m = 200$.

Таблиця1

x	$y_t(x)$	$y_a(x)$	Δ
0.0000	2.0000	2.0000	0.0000
$\frac{\pi}{8}$	2.7220	2.7163	0.0037
$\frac{\pi}{4}$	3.3556	3.3564	0.0008
$\frac{3\pi}{8}$	3.8040	3.8029	0.0011
$\frac{\pi}{2}$	4.0000	4.0000	0.0000

Список літератури

[1] Cushing J. M. Integrodifferential equations and delay models in population dynamics / J. M. Cushing // Lecture Notes in Biomathematics. Vol. 20. - Berlin-Heidelberg-New York : Springer Verlag, 1977.

[2] Nikolova T.S., Bainov D.D. Application of spline-functions for the construction of an approximate solution of boundary value problems for a class of functional-differential equations //Yokohama Math. J. - 1981. - V.29, № 1. - P.108-122.

[3] Cherevko I.,Dorosh A. Existence and Approximation of a Solution of Boundary Value Problems for Delay Integro-Differential Equations // J. Numer. Anal. Approx. Theory. - 2016. - V. 44, №2. - P. 154-165.

[4] Halanay A. Approximations of delays by ordinary differential equations. Recent advances in differential equations. – New York : Academic Press, 1981. – P. 155–197.

[5] Cherevko I.M., Matviy O.V. On the approximation of systems with a delay and their stability // Non-linear oscillations.- 2004.– V.7, № 2. – P. 208-216.

[6] Grim, L.J., Schmitt, K.: Boundary value problems for delay differential equations. Bull. Amer. Math.- 1968.-V.74,№5.-997-100.

[7] Igor Cherevko, Larisa Piddubna. Approximations of differential difference equations and calculation of nonasyptotic roots of quasipolynomials // Revue d'ana-lyse numerioque et de theorie de l'approximation. – 1999. – 28. - №1. – P. 15-21.

[8] Піддубна Л.А., Черевко І.М. Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 1999. – № 1. – C. 42-50.

[9] Матвій О.В., Черевко І.М.. Апроксимація систем диференціально-різницевих та різницевих рівнянь з багатьма запізненнями // Науковий вісник Чернівецького університету:Збірник наукових праць. Математика. – 2002. – Вип. 150. – С.50-54.

[10] Хартаман Ф.Обыкновенные дифференциальные уравнения.-1970, М.:Мир, 720 с.

Список літератури

[1] Cushing J. M. Integrodifferential equations and delay models in population dynamics / J. M. Cushing // Lecture Notes in Biomathematics. Vol. 20. - Berlin-Heidelberg-New York : Springer Verlag, 1977.

[2] Nikolova T.S., Bainov D.D. Application of spline-functions for the construction of an approximate solution of boundary value problems for a class of functional-differential equations //Yokohama Math. J. - 1981. - V.29, № 1. - P.108-122.

[3] Cherevko I.,Dorosh A. Existence and Approximation of a Solution of Boundary Value Problems for Delay Integro-Differential Equations // J. Numer. Anal. Approx. Theory. - 2016. - V. 44, №2. - P. 154-165.

[4] Halanay A. Approximations of delays by ordinary differential equations. Recent advances in differential equations. – New York : Academic Press, 1981. – P. 155–197.

[5] Cherevko I.M., Matviy O.V. On the approximation of systems with a delay and their stability // Non-linear oscillations.- 2004.– V.7, № 2, – P. 208-216.

[6] Grim, L.J., Schmitt, K.: Boundary value problems for delay differential equations. Bull. Amer. Math. Soc.74, 997–1000.

[7] Cherevko I.M., Piddubna L.A. Approximations of differential difference equations and calculation of nonasyptotic roots of quasipolynomials // Revue d'ana-lyse numerioque et de theorie de l'approximation. – 1999. – 28. - №1. – p. 15-21.

[8] Piddubna L.A., Cherevko I.M. Approximation of systems of differential-difference equations by systems of ordinary differential equations // Nonlinear oscillations.. – 1999. – № 1. – C. 42-50.(in Ukrainian)

[9] Matviy O.V., Cherevko I.M.. Approximation of systems of differential-difference and difference equations with many delays // Scientific Bulletin of Chernivtsi University: Collection of scientific works. Mathematics. – 2002. – V. 150. – P.50-54.(in Ukrainian)

[10] Hartman F. Ordinary differential equations.-1970, M.:World, P.720. (in Russian)

Надійшло 10.10.2022

Tuzyk I.I., Cherevko I.M. *Approximation of boundary value problems for integro-differential equations with delay*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 1 (2022), 120–128.

In mathematical modeling of physical and technical processes, the evolution of which depends on prehistory, we arrive at differential equations with a delay. With the help of such equations it was possible to identify and describe new effects and phenomena in physics, biology, technology.

An important task for differential-functional equations is to construct and substantiate finding approximate solutions, since there are currently no universal methods for finding their precise solutions. Of particular interest are studies that allow the use of methods of the theory of ordinary differential equations for the analysis of delay differential equations.

Schemes for approximating differential-difference equations by special schemes of ordinary differential equations are proposed in the works N. N. Krasovsky, A. Halanay, I. M. Cherevko, L. A. Piddubna, O. V. Matwiy in various functional spaces.

The purpose of this paper is to apply approximation schemes of differential-difference equations to approximation of solutions of boundary-value problems for integro-differential equations with a delay. The paper presents sufficient conditions for the existence of a solution of the boundary value problem for integro-differential equations with many delays. The scheme of its approximation by a sequence of boundary value problems for ordinary integro-differential equations is proposed and the conditions of its convergence are investigated. A model example is considered to demonstrate the given approximation scheme.