Працьовитий М.В., Дрозденко В.О., Лисенко І.М., Маслова Ю.П.

Інверсор цифр двоосновного G–зображення дійсних чисел і його структурна фрактальність

У роботі обґрунтовано нову двосимвольну систему зображення чисел відрізка $[0;0,5]$ з алфавітом (набором цифр) $A=\{0;1\}$ та двома основами 2 і -2:

$$x=\frac{\alpha_1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{k+1}}{2^{k-(\alpha_1+\ldots+\alpha_k)}(-2)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_k}}\equiv\Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},\quad \alpha_k\in\{0;1\}.$$

Наведено порівняння нової системи з класичною двійковою. Акцентовано увагу на функції: $I(x=\Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots})=\Delta^G_{1-\alpha_1,\ldots,1-\alpha_n\ldots}$, цифри G–зображення якої є інверсними (протилежними) до цифр G–зображення аргумента. Коректність означення функції у точках, що мають два G–зображення забезпечується домовленістю використовувати лише одне з них. Доведено, що інверсор є функцією необмеженої варіації, неперервною у точках, що мають єдине G–зображення, односторонньо неперервною у точках з двома зображеннями, обчислено величини всіх стрибків функції. Доведено, що функція не має проміжків монотонності і має самоподібну структуру графіка.

Ключові слова і фрази: Класична двійкова система числення, G–зображення чисел, циліндр, основне метричне відношення, інверсор, ніде не монотонна функція, функція необмеженої варіації.

Україна, м.Київ, Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова
e-mail: *prars4444@gmail.com, drozdenko0408@gmail.com, iryna.pratsiovyta@gmail.com, julia0609mas@gmail.com*

Вступ

Сьогодні відомі десятки двосимвольних систем кодування (зображення) дійсних чисел і ніші їх ефективних застосувань у різних галузях математики і за її межами [1, 3, 13, 6, 8, 9, 11, 12, 14]. Серед них «лідером» залишається класична двійкова система числення і її самоподібне узагальнення — Q_2–зображення чисел [7]. Відносно недавно обґрунтовано систему кодування чисел з двома різнознаковими основами: $g_0\in\left(\frac{1}{2};1\right)$, $g_1\equiv g_0-1$ і традиційним алфавітом (G_2–зображення), що є формальним і метричним аналогом Q_2–зображення чисел [10]. Як виявилось [4, 2], нова система має ряд яскраво виражених особливостей. Серед них: оператор лівостороннього зсуву є функцією непе-

УДК 517.5, 519.21, 511.72
2010 *Mathematics Subject Classification:* 26A46, 26A21, 26A30.

рервною; числа, що мають два зображення належать одній хвостовій множині; проєктор цифр Q_2–зображення в G_2–зображення має зліченну множину точок розриву і нескінченну варіацію та інше. Залишився поза увагою випадок, коли $g_0 = \frac{1}{2}$ (а отже, $g_1 = -\dfrac{1}{2}$), а саме він дає відносно просту геометрію зображення і спрощує порівняльний аналіз нової системи кодування чисел з класичною двійковою системою. Цьому унікальному випадку G_2–зображення чисел, який ми називаємо G–зображенням, присвячена ця робота. У ній мова йтиме про числа відрізка $[0; 0,5]$.

1 G–зображення чисел

Традиційно для двосимвольної системи зображення чисел стандартним є алфавіт (набір цифр) $A = \{0; 1\}$ і множина $L \equiv A \times A \times \ldots \times A \times \ldots$, яку називають *простором послідовностей елементів* алфавіту (простором нулів та одиниць). Їх ми далі використовуємо. Очевидними є наступні твердження.

1) Якщо (α_k) – довільна послідовність простору L, $\sigma_k \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1}$, то значення виразу $u_{k+1} \equiv (-1)^{\sigma_k}\alpha_k 2^{-k}$ є нулем тоді і тільки тоді, коли $\alpha_k = 0$; додатним числом, якщо σ_k — парне; від'ємним числом, якщо σ_k — непарне.

2) Якщо (α_k) містить нескінченну кількість одиниць, то послідовність: $u_1 = \dfrac{\alpha_1}{2}$, $u_{n+1} = (-1)^{\sigma_k}\alpha_k 2^{-k}$ ненульових членів послідовностей (u_n) є знакопочережною.

Лема 1. *Для будь–якої послідовності $(\alpha_n) \in L$ ряд*

$$\frac{\alpha_1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k}(-1)^{\sigma_k} = \frac{\alpha_1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^{k-\sigma_k}(-2)^{\sigma_k}} = S \tag{1}$$

є абсолютно збіжним, його сума S є невід'ємною і не перевищує першого відмінного від нуля члена ряду (1), причому

$$S = S_m + 2^{-m}(-1)^{\sigma_{m+1}} R_m, \text{ де } \sigma_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1}; \tag{2}$$

$$S_m = \frac{\alpha_1}{2} + \sum_{k=2}^{m} \alpha_k 2^{-k}(-1)^{\sigma_k}; R_m = \frac{\alpha_{m+1}}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{m+i} 2^{-i}(-1)^{\sigma_{m+i}-\sigma_{m+1}}.$$

Доведення. Якщо $u_k \equiv 2^{-k}(-1)^{\sigma_k}$, то $\sum\limits_{k=2}^{\infty} |u_k| = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$, а отже, ряд (1) є абсолютно збіжним.

Оскільки ненульові члени ряду (1) утворюють знакопочережну нескінченно спадну послідовність (1), то згідно з теоремою Лейбніца сума ряду (1) не перевищує першого відмінного від нуля члена ряду. Рівність (2) є очевидною. □

Теорема 1. *Для будь–якого $x \in [0; 0,5]$ існує послідовність $(\alpha_k) \in L$ така, що*

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\alpha_k 2^{-k}(-1)^{\sigma_k}\right] \equiv \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \text{ де } \sigma_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1}. \tag{3}$$

Зауваження 1. *Перед доведенням твердження зауважимо, що для будь–якої послідовності* $(c_n) \in L$ *виконуються рівності* $\Delta^G_{c_1\ldots c_m 01(0)} = \Delta^G_{c_1\ldots c_m 11(0)}$, *оскільки*

$$\Delta^G_{c_1\ldots c_m 11(0)} - \Delta^G_{c_1\ldots\ldots c_m 01(0)} = 2^{-m-1}(-1)^{-m-1}(-1)^{\sigma_{m+1}}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}-0\right)\right] = 0.$$

Доведення. Очевидними є розклади: $0 = \Delta^G_{(0)}$, $\dfrac{1}{2} = \Delta^G_{1(0)}$. Для обгрунтування розкладу числа x в ряд (3) досить вказати алгоритм визначення членів послідовності (α_n) і аргументувати збіжність процесу для випадку його нескінченності.

Крок перший. Оскільки $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{0}{2^2}; \frac{1}{2^2}\right] \cup \left[\frac{1}{2^2}; \frac{1}{2}\right)$, то очевидно, що існує $\alpha_1 \in A$ таке, що $x \in \left[\frac{\alpha_1}{2^2}; \frac{\alpha_1+1}{2^2}\right] \Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{2^2} \leq x \leq \frac{\alpha_1+1}{2^2}$.

Якщо $\alpha_1 = 0$, тобто $0 < x \leq \dfrac{1}{2^2}$, то покладемо $x_1 \equiv x$.

Якщо $\alpha_1 = 1$, тобто $\dfrac{1}{2^2} \leq x < \frac{1}{2}$, то покладемо $x_1 \equiv \dfrac{1}{2} - x$.

В обох випадках $x_1 \in \left(0; \dfrac{1}{2^2}\right]$. Якщо $x_1 = \dfrac{1}{2^2}$, то за умови $\alpha_1 = 0$ маємо $x = x_1 = \dfrac{1}{2^2} = \Delta^G_{01(0)}$, а за умови $\alpha_1 = 1$ отримаємо $x = \dfrac{1}{2} - x_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^2} = \Delta^G_{11(0)}$. При $x_1 \neq \dfrac{1}{2^2}$ міркування повторюються, але уже стосовно x_1.

Крок другий. Оскільки $x_1 \in \left(0; \dfrac{1}{2^2}\right) = \left(\dfrac{0}{2^3}; \dfrac{1}{2^3}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2^3}; \dfrac{1}{2^2}\right)$, то очевидно, що існує $\alpha_2 \in A$ таке, що

$$x_1 \in \left[\frac{\alpha_2}{2^3}; \frac{\alpha_3+1}{2^2}\right] \Leftrightarrow \frac{\alpha_2}{2^3} \leq x_1 \leq \frac{\alpha_2+1}{2^3}.$$

Якщо $\alpha_2 = 0$, тобто $0 < x_1 \leq \dfrac{1}{2^3}$, то покладемо $x_2 \equiv x_1$.

Якщо $\alpha_2 = 1$, тобто $\dfrac{1}{2^3} \leq x_1 < \dfrac{1}{2^2}$, то покладемо $x_2 \equiv \dfrac{1}{2^2} - x_1$.

В обох випадках $x_2 \in \left(0; \dfrac{1}{2^3}\right]$. Якщо $x_2 = \dfrac{1}{2^3}$, то $x_2 = \Delta^G_{001(0)} = \Delta^G_{011(0)}$.

За підсумками двох кроків, маємо: якщо

1. $\alpha_1 = 0 = \alpha_2$, то $x = x_2 = \dfrac{0}{2} + \dfrac{0}{2^2} + (-1)^{0+0}x_2$;

2. $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, то $x = x_1 = \dfrac{1}{2^2} - x_2 = \dfrac{0}{2} + \dfrac{1}{2^2} + (-1)^{0+1}x_2$;

3. $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, то $x = \dfrac{1}{2} - x_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{0}{2^2} + (-1)^{1+0}x_2$;

4. $\alpha_1 = 1 = \alpha_2$, то $x = \dfrac{1}{2} - x_1 = \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2^2} - x_2\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^2} + (-1)^{1+1}x_2$.

Процес розкладу числа x продовжуватиметься до тих пір поки не отримаємо $x_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Якщо ж це не трапиться, то він нескінченний. У цьому випадку його збіжність є наслідком того, що $x_n \leq \frac{1}{2^{n+1}} \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Розклад (3) числа x встановлено. □

Означення 1. *Розклад числа $x \in [0; 0,5]$ в ряд (3) називатимемо G*–представленням, *а його скорочений запис $\Delta^G_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots}$ — G–зображенням числа x. При цьому $\alpha_n = \alpha_n(x)$ називається n–ою цифрою цього зображення.*

Легко довести, що числа з періодичними G–зображеннями є раціональними. Число, G–зображення якого має простий період (1):

$$\Delta^G_{c_1 \ldots c_m 0(1)} = A + \frac{5(-1)^{\sigma_m}}{3 \cdot 2^{m+2}}, \text{ де } A = \frac{1}{2^a} + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{\sigma_{k c_k}}}{2^k}.$$

2 Ідентифікація та порівняння чисел

Числа з $[0; 0,5]$ з G–зображеннями: $\Delta^G_{c_1 \ldots c_m 01(0)} = \Delta^G_{c_1 \ldots c_m 11(0)}$ називаються *G–бінарними*. Прикладами G–бінарних чисел є: $\Delta^G_{01(0)} = 0,5$, $\Delta^G_{001(0)} = 0,25$, $\Delta^G_{101(0)} = 0,375$.

Означення 2. *Казатимемо, що G–зображення чисел $x = \Delta^G_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}$ і $y = \Delta^G_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \ldots}$ мають однаковий хвіст, якщо існують натуральні k і m такі, що*

$$\alpha_{k+j} = \beta_{m+j} \tag{4}$$

для будь–якого $j \in N$. Символічно це позначається $x \sim y$.

Якщо k і m — найменші числа, для яких виконується умова (4), то число $z \equiv x \wedge y = \Delta^G_{\alpha_{k+1} \alpha_{k+2} \ldots} = \Delta^G_{\beta_{m+1} \beta_{m+2} \ldots}$, називається спільним хвостом чисел x та y. Очевидно, що бінарне відношення $\sim$ — «мати однаковий хвіст» є відношенням еквівалентності (має властивості рефлексивності, симетричності, транзитивності). А отже, розбиває множину всіх G–зображень чисел відразка $[0; 0,5]$ на класи еквівалентності, які в сукуп- ності утворюють множину класів еквіваленьності, кожен елемент якої називається хвос- товою множиною. Всі G–бінарні числа належать одній хвостовій множині, що невластиво класичній двійковій системі числення та її узагальненням.

Лема 2. *Нехай $(c_1, \ldots, c_m)$ — довільний набір цифр, $\sigma_{m+1} = c_1 + \cdots + c_m$;*

$$u = \Delta^G_{c_1 \ldots c_m 0 a_1 a_2 \ldots}, \qquad v = \Delta^G_{c_1 \ldots c_m 1 b_1 b_2 \ldots}.$$

Числа u і v перебувають у відношенні $u \leq v$, якщо σ_{m+1} — парне, і у відношенні $u \geq v$, якщо σ_{m+1} — число непарне, при цьому рівність $u = v$ виконується лише тоді, коли $a_n = 1 = 1 - b_n$ для всіх $n \geq 1$.

Доведення. За умови парності σ_{m+1} маємо

$$v - u = \frac{1}{2^{m+1}} - \frac{1}{2^{m+1}} \left[\Delta^G_{b_1 b_2 \ldots b_n \ldots} + \Delta^G_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots} \right] \geq 0,$$

а за умови непарності σ_{m+1} —

$$v - u = \frac{1}{2^{m+1}} - \frac{1}{2^{m+1}} \left[\Delta^G_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots} + \Delta^G_{b_1 b_2 \ldots b_n \ldots} \right] \geq 0.$$

Оскільки $\Delta^G_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots} \in [0; 0,5]$, причому $u = v$ лише тоді, коли $\Delta^G_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots} = 0,5 = \Delta^G_{b_1 b_2 \ldots b_n \ldots}$, що рівносильно G–бінарності чисел u і v, тобто $a_n = 1 = 1 - b_n$ для всіх $n \geq 1$. $\square$

Наслідок 1. *Більшість чисел відрізка* $[0; 0,5]$ *мають єдине* G*–зображення (їх називатимемо* G*–унарними), існує зліченна множина чисел, які мають їх два — це* G*–бінарні числа.*

Зауваження 2. *Лема дає алгоритм порівняння чисел за їх* G*–зображеннями.*

Означення 3. *Рангом* G*–бінарного числа (точки) називається найменший ранг* G*–циліндра, кінцем якого є дане число (точка).*

Рангом числа $\Delta^G_{c_1\ldots c_m 01(0)}$ є число m. Існує одне G–бінарне число 1–го рангу — це число з зображенням $\Delta^G_{01(0)}$, два числа 2–го рангу: $\Delta^G_{001(0)}$ і $\Delta^G_{101(0)}$; 2^m — G–бінарні числа m рангу. Кожне G–бінарне число є кінцем нескінченної послідовності G–циліндрів, причому таких послідовностей існує дві.

3 Геометрія G–зображення чисел

Під геометрією зображення ми розуміємо геометричний зміст цифр і метричні відношення, породжені зображенням. Геометрію зображення розкривають властивості циліндричних та хвостових множин, на яких грунтуються розв'язки метричних задач.

Означення 4. Циліндром (G–циліндром) *рангу* m *з основою* $c_1c_2\ldots c_m$ *називається множина* $\Delta^G_{c_1c_2\ldots c_m}$ *чисел* $x \in [0; 0,5]$, *які мають* G*–зображення* $\Delta^G_{c_1\ldots c_m a_1 a_2\ldots}$, *де* $(a_n) \in L$.

Безпосередньо з означення G–циліндра випливають рівності:
1) $\Delta^G_{c_1\ldots c_m} = \Delta^G_{c_1\ldots c_m 0} \cup \Delta^G_{c_1\cdots c_m 1}$; 2) $[0; 0,5] = \bigcup\limits_{c_1\in A} \cdots \bigcup\limits_{c_m\in A} \Delta^G_{c_1\ldots c_m}$.

Лема 3. *Циліндр* $\Delta^G_{c_1c_2\cdots c_m}$ *є відрізком* $[a; b]$, *де*

$$a = \min \Delta^G_{c_1\cdots c_m} = \begin{cases} \Delta^G_{c_1\cdots c_m(0)}, & \text{якщо } c_1 + \cdots + c_m \equiv \sigma_{m+1} \text{ — парне}, \\ \Delta^G_{c_1\cdots c_m 1(0)}, & \text{якщо } \sigma_{m+1} \text{ — непарне}; \end{cases}$$

$$b = \max \Delta^G_{c_1\ldots c_m} = \begin{cases} \Delta^G_{c_1\cdots c_m 1(0)}, & \text{якщо } \sigma_{m+1} \text{ — парне}, \\ \Delta^G_{c_1\cdots c_m(0)}, & \text{якщо } \sigma_{m+1} \text{ — непарне}. \end{cases}$$

Доведення. Дане твердження випливає з означень G–зображення числа і G–циліндра, а також з леми про порівняння чисел за їх G–зображеннями. □

Наслідок 2. *Довжина* G*–циліндра* $\Delta^G_{c_1\cdots c_m}$ *рангу* m *обчислюється за формулу*

$$|\Delta^G_{c_1\cdots c_m}| = \frac{1}{2^{m+1}}.$$

Наслідок 3. *Основне метричне відношення для* G*–зображення чисел має вигляд:*

$$\frac{|\Delta^G_{c_1\cdots c_m i}|}{|\Delta^G_{c_1\cdots c_m}|} = \frac{1}{2}.$$

Наслідок 4. *Для будь–якої послідовності* $(\alpha_n) \in L$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Наслідок 5. *Якщо* $\sigma_{m+1} = c_1 + \cdots + c_m$ *— число парне, то* $\max \Delta^G_{c_1\ldots c_m 0} = \min \Delta^G_{c_1\ldots c_m 1}$, *якщо ж* σ_{m+1} *непарне, то* $\max \Delta^G_{c_1\ldots c_m 1} = \min \Delta^G_{c_1\ldots c_m 0}$.

4 Інверсор G–зображення чисел

Означення 5. *Функція* I*, означена рівністю* $I(x = \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^G_{1-\alpha_1,\ldots,1-\alpha_n\ldots}$*, називається* інверсором *G–зображення чисел (інверсором цифр G–зображення чисел).*

Оскільки $I(\Delta^G_{01(0)}) = \Delta^G_{10(0)} = \dfrac{5}{12} \neq \dfrac{1}{2} = \Delta^G_{00(1)} = I(\Delta^G_{11(0)})$, то означення функції I вказаною рівністю в G–бінарних точках не є коректним, але стає таким після домовленості використовувати лише одне з зображень G–бінарного значення аргумента, а саме: $\Delta^G_{c_1\ldots c_m 01(0)}$. Після цього функція f стає коректно означеною.

Найпростіші властивості функції $y = I(x)$:

1) $\min I(x) = I(\Delta^G_{(1)}) = 0; \quad \max I(x) = I(\Delta^G_{0(1)}) = \Delta^G_{1(0)} = \dfrac{1}{2}$;

2) $I\left(\dfrac{1}{2}x\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}I(x)$, $I\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}x\right) = \dfrac{1}{2}I(x)$;

3) $I\left(\Delta^G_{c_1\ldots c_m 10(1)}\right) = I\left(\Delta^G_{c_1\ldots c_m 00(1)}\right)$.

4) Рівняння $I(x) = x$ розв'язків немає.

Справді, образом G–бінарного числа $x = \Delta^G_{c_1\ldots c_m 01(0)}$ є G–унарне число $y = \Delta^G_{1-c_1,\ldots,1-c_m 10(1)}$, тому G–бінарне число не може бути коренем цього рівняння. Якщо x — G–унарне число і $I(x)$ — G–унарне число, то рівність не можлива, оскільки у x і $I(x)$ різні перші цифри зображення. Якщо x — G–унарне число і $I(x)$ — G–бінарне число, то очевидно, що $I(x) \neq x$. Таким чином, рівняння коренів немає.

Кожне G–бінарне число є образом числа виду $\Delta^G_{c_1\ldots c_m 10(1)}$ або $\Delta^G_{c_1\ldots c_m 00(1)}$.

Функція I кожне своє G–унарне значення набуває лише один раз, а кожне G–унарне значення у двох різних точках:

$$\Delta^G_{1-c_1,\ldots,1-c_m 01(0)} = f\left(\Delta^G_{c_1\ldots c_m 10(1)}\right) = f(\Delta^G_{c_1\ldots c_m 00(1)}).$$

Наслідок 6. *G–унарні рівні функції I одноточкові, G–бінарні рівні — двоточкові.*

Лема 4. *Множина E_I значень функції I є відрізком $[0; 0,5]$ без чисел виду $\Delta^G_{a_1\ldots a_m 00(1)}$.*

Доведення. Якщо $y_0 = \Delta^G_{c_1\ldots c_m\ldots}$, причому $(c_n) \neq (c_1, \ldots, c_m, 0, 0, 1, 1, 1, \ldots)$, то

$$I\left(\Delta^G_{1-c_1,\ldots,1-c_m,1,1,0,0,0,\ldots}\right) = y_0 \in E_I,$$

але введена заборона на використання одного з зображень G–бінарних чисел приводить до того, що числа з зображеннями $\Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n 00(1)} \in [0; 0,5]$ не є образами точок при відображенні I. Лему доведено. □

Теорема 2. *Інверсор G–зображення чисел є неперервною функцією в кожній G–унарній точці, а в G–бінарній точці $x_0 = \Delta^G_{c_1 \ldots c_m 01(0)}$ — неперервною зліва, якщо число $\tau = m - (c_1 + \ldots + c_m)$ є числом парним, і неперервною справа, якщо τ — число непарне. Стрибок функції у кожній G–бінарній точці m–ного рангу обчислюється за формулою:*

$$\rho(x_0) = \frac{1}{3 \cdot 2^m}.$$

Доведення. Нехай $x_* = \Delta^G_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}$ – довільна G–унарна точка. Якщо $x \neq x_*$, то існує $m \in N$ таке, що $\alpha_m(x_*) \neq \alpha_m(x)$, але $\alpha_j(x_*) = \alpha_j(x)$ при $j < m$. Причому $x \to x_0$ рівносильно $m \to \infty$. Розглянемо

$$|I(x) - I(x_*)| = P_{m-1} \cdot |\omega^{m-1}(I(x)) - \omega^{m-1}(I(x_*))|,$$

де $P_{m-1} = \prod\limits_{j=1}^{m-1} |g_{1-\alpha_j(x_*)}|$, $\omega(x = \Delta^G_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}) = \Delta^G_{\alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \ldots}$.

Оскільки $P_{m-1} \to 0$ $(m \to \infty)$, а $|\omega^{m-1}(I(x)) - \omega^{m-1}(I(x_*))| \leq g_0$, то $|I(x) - I(x_*)| \to 0$ $(x \to x_*)$, що рівносильно неперервності функції I в точці x_*.

Дослідимо неперервність функції I у точці x_0. Нехай τ — число парне. Тоді значення функції I у точці x_0 обчислюється за формулою

$$I(x_0) = A + \frac{(-1)^\tau}{2^m} I(\Delta^G_{010}), \text{ де } A = \frac{1 - c_1}{2} + \sum_{k=2}^{m} \frac{(1 - c_k)(-1)^{k-1-(c_1 + \ldots + c_{k-1})}}{2^k},$$

$$I(\Delta^G_{010}) = \Delta^G_{10(1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^2} = \frac{5}{12}.$$

Нехай $x < x_0$ достатньо близьке до x_0. Тоді $x = \Delta^G_{c_1 \ldots c_m 0 \underbrace{0 \ldots 0}_{k} a_1 a_2 \ldots}$ і $x \to x_0$ рівносильно $k \to \infty$. Очевидно, що $I(x) - I(x_0) \to 0$ $(x \to x_0)$. Отже, I неперервна у точці x_0 зліва.

Якщо x більше x_0 і достатньо близьке до нього, то $x = \Delta^G_{c_1 \ldots c_m 11 \underbrace{0 \ldots 0}_{k} a_1 a_2 \ldots}$. При цьому $x \to x_0$ рівносильно $k \to \infty$, а отже,

$$\lim_{x \to x_0} |I(x) - I(x_0)| = |\Delta^G_{1-c_1, \ldots, 1-c_m 00 \underbrace{1 \ldots 1}_{k} 1-a_1, 1-a_2 \ldots} - \Delta^G_{1-c_1 \ldots 1-c_m 10(1)}| =$$

$$= |\frac{1}{2^{m+1}} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{m+1}}| = \frac{1}{3 \cdot 2^m}.$$

Отже, у точці x_0 функція I має розрив і величина стрибка дорівнює $\frac{1}{3 \cdot 2^m}$.

Для випадку, коли σ_{m+1} є числом непарним обґрунтування висновку здійснюється аналогічно.

Число $\rho(x_*)$ є модулем різниці G–унарних чисел $\Delta^G_{1-c_1, \ldots, 1-c_m, 10(1)}$ і $\Delta^G_{1-c_1, \ldots, 1-c_m, 00(1)}$, оскільки в точці x_* функція є неперервною або зліва або справа, в залежності від парності — непарності числа $\sigma_{m+1} = c_1 + \ldots + c_m$. Не порушуючи загальності, вважатимемо σ_{m+1} парним. Тоді функціяв точці x_* неперервна зліва, оскільки □

Наслідок 7. *Сума стрибків у всіх G–бінарних точках m–ного рангу дорівнює* $\dfrac{1}{3}$.

Наслідок 8. *Інверсор є функцією необмеженої варіації.*

Теорема 3. *Інверср I є ніде не монотонною, неперервною функцією на множині G–унарних точок, яка має необмежену варіацію.*

Доведення. Враховуючи наслідок з леми і теореми, залишається довести лише ніде не моно- тонність функції I. А для цього досить довести її немонотонність на довільному G — циліндрі.

Нехай $\Delta^G_{c_1\ldots c_m}$ — довільний G–циліндр. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $c_1+\cdots+c_m$ — число парне (бо коли це не так, міркування можна провести стосовно циліндра $\Delta^G_{c_1\ldots c_m 1}\subset\Delta^G_{c_1\ldots c_m}$). Розглянемо три точки

$$x_1=\Delta^G_{001(0)},\quad x_2=\Delta^G_{01(0)},\quad x_3=\Delta^G_{101(0)},$$

які належать циліндру $\Delta^G_{c_1\ldots c_m}$ і при цьому $x_1<x_2<x_3$. Для них

$$I(x_1)=\Delta^G_{110(1)}=\frac{7}{3\cdot 2^3},\quad I(x_2)=\Delta^G_{10(1)}=\frac{10}{3\cdot 2^3},\quad I(x_3)=\Delta^G_{010(1)}=\frac{5}{3\cdot 2^3}.$$

Звідси

$$[I(x_2)-I(x_1)]\,[I(x_3)-I(x_2)]=\frac{1}{2^2}\cdot\left(-\frac{5}{3\cdot 2^3}\right)<0.$$

Тому I немонотонна на циліндрі $\Delta^G_{c_1\ldots c_m}$, а отже, і на всій області визначення. □

Зауваження 3. *Теорема виражає специфічну властивість G–зображення чисел, оскільки для двійкового зображення, Q_2–зображення, Q_2^*–зображення, ланцюгового A_2–зображення [5] інверсор є функцією неперевною і строго спадною на всій області визначення, а даний інверсор є розривною функцією в G–бінарних точках.*

Теорема 4. *Графік Γ функції I є самоподібною множиною простору R^2 з структурою самоподібності:*

$$\Gamma=\gamma_0(\Gamma)\cup\gamma_1(\Gamma),\quad \text{де } \gamma_0:\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\ y'=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}y;\end{cases}\qquad \gamma_1:\begin{cases}x'=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x,\\ y'=\frac{1}{2}y.\end{cases}$$

Доведення. Введемо позначення $\Phi\equiv\gamma_0(\Gamma)\cup\gamma_1(\Gamma)$.

1. Доведемо, що $\Phi\subset\Gamma$. Нехай $M(x,y)\in\Gamma$, тобто

$$x=\Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots},\quad y=I(x)=\Delta^G_{1-\alpha_1,\ldots,1-\alpha_n,\ldots};$$

$\gamma_i(M)=M'(x',y'):\quad x'=\Delta^G_{i\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots},\ y'=\Delta^G_{1-i,1-\alpha_1,\ldots,1-\alpha_n,\ldots}$. Тоді $M'(x',y')\in\Gamma$. Отже, $\Phi\subset\Gamma$.

2. Доведемо, що $\Gamma\subset\Phi$. Нехай $M(x,y)\in\Gamma$. Тоді $x\in\Delta^G_0$ або $x\in\Delta^G_1$. Якщо $x\in\Delta^G_i$, тобто $x=\Delta^G_{i\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$, $y=I(x)=\Delta^G_{1-i,1-\alpha_1,\ldots,1-\alpha_n,\ldots}$, то точка $M_*(x_*,y_*)$, де $x_*=\Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$, $y_*=\Delta^G_{1-\alpha_1,\ldots,1-\alpha_n,\ldots}$, належить графіку Γ і $\gamma_i(M_*)=M\in\Phi$.

Отже, $\Gamma=\Phi$, що й вимагалось довести. □

Наслідок 9. *Графік* Γ *функції* I *симетричний відносно точки* $C\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. *Його самоподібна розмірність дорівнює 1.*

Теорема 5. *Для інверсора* G*–зображення виконується рівність*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} I(x)dx = \frac{1}{8}.$$

Доведення. Оскільки функція I має лише зліченну множину точок розриву, то вона інтегров- на за Лебегом. За адитивною властивістю інтеграла Лебега

$$\int_0^{\frac{1}{2}} I(x)dx = \int_0^{\frac{1}{4}} I(x)dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} I(x)dx.$$

Виразимо кожен з інтегралів окремо:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} I(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}I(t)\right] d\left(\frac{1}{2}t\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2^2}\int_0^{\frac{1}{2}} I(t)dt,$$

де $x = \Delta^G_{0\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots} = \frac{1}{2}\Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots} = \frac{1}{2}t$;

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} I(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{2}I(t)d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right) = \frac{1}{2^2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} I(t)dt,$$

де $x = \Delta^G_{1\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t.$

Тоді $\int_0^{\frac{1}{2}} I(x)dx = \frac{1}{8}$, що й вимагалось довести. □

Список літератури

[1] Galambos J. *Representations of real numbers by infinite series.* Berlin: Springer–Verlag, 1976, 146 p.

[2] Lysenko I.M., Maslova Yu.P., Pratsiovytyi M.V. *Two-symbol numerical system with two bases having different signs and related functions*, Proc. Inst. Math. Nat. Acad. Sc. Ukraine, 16 (2019), № 2, pp. 50–62. (in Ukrainian)

[3] Prats'ovytyi M.V., Baranovs'kyi O.M., Maslova Yu.P. *Generalization of the Tribin Function*, Journal of Mathematical Sciences vol. 253, 2021, pp.276–288.

[4] Pratsiovytyi M.V., Lysenko I.M., Maslova Yu.P. *Group of continuous transformations of real interval preserving tails of* G_2*-representation of numbers.* Algebra and Discrete Mathematics, Volume 29(2020). Number 1. pp. 99-108.

[5] Pratsiovytyi M., Chuikov A. *Continuous distributions whose functions preserve tails of an A_2–continued fraction representation of numbers*, Random Operators and Stochastic Equations, 2019. Vol. 27(3), pp. 199-206.

[6] Pratsiovytyi M.V. *Two-symbol system of encoding of real numbers and its applications,* Nauk. Dumka, Kyiv, 2022, 316 p. (in Ukrainian)

[7] Pratsiovytyi M.V. *Random variables with independent Q_2-symbols*// Asymptotic Methods in the Study of Stochastic Models, Inst. Math. Nation. Acad. Sci. Ukraine, Kyiv, 1987, pp. 92–102. (in Russian)

[8] Pratsiovytyi M.V. *Fractal approach to the study of singular distributions* — Kyiv: Nats. Pedagog. Mykhailo Dragomanov Univ., 1998. (in Ukrainian)

[9] Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Lysenko I.M. *Nega-binary representation of real numbers and its applications.* Nauk. Chasop. Nats. Pedagog. Univ. Mykhaila Dragomanova. Ser 1. Fiz.-Mat. Nauky, – 2015. – № 17. – P. 83-106. (in Ukrainian)

[10] Pratsiovytyi M.V., Lysenko I.M., Maslova Yu.P. *Geometry of numerical series: series as a model of a real number in a new two-symbol system of encoding ofnumbers* Proc. Inst. Math. Nat. Acad. Sc. Ukraine, 15 (20180), №1, pp. 132–146 (in Ukrainian).

[11] Pratsiovytyi M.V., Ratushniak S.P. *Continuous nowhere monotone nondifferentiable function with fractal properties defined in terms Q_2-representation* // Nonlinear oscillations, 2020, Vol. 23, № 2, 231–252. (in Ukrainian)

[12] Pratsiovytyi M.V., Skrypnyk S.V. *Q_2-representation of fraction part of numbers and inversor of ita digits.* Nauk. Chasop. Nats. Pedagog. Univ. Mykhaila Dragomanova. Ser 1. Fiz.-Mat. Nauky, – 2013. – № 15. – P. 134-143. (in Ukrainian)

[13] Schweiger F. *Ergodic theory of fibred systems and metric number theory.* Oxford Sci. Publ. — New York: Oxford Univ. Press, 1995. — XIV+295 p.

[14] Stakhov A.P. *Introduction to the algorithmic theory of change,* M.: Soviet radio, 1977, 288 p. (in Russian)

Надійшло 07.10.2022

Pratsiovytyi M.V., Drozdenko V.O., Lysenko I.M., Maslova Yu.P. *Inversor of digits of two-base G–representation of real numbers and its structural fractality*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 1 (2022), 100–109.

In the paper, we introduce a new two-symbol system of representation for numbers from segment $[0; 0,5]$ with alphabet (set of digits) $A = \{0; 1\}$ and two bases 2 and -2:

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{k+1}}{2^{k-(\alpha_1+\ldots+\alpha_k)}(-2)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_k}} \equiv \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \quad \alpha_k \in \{0; 1\}.$$

We compare this new system with classic binary system. The function $I(x = \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^G_{1-\alpha_1,\ldots,1-\alpha_n\ldots}$, such that digits of its G–representation are inverse (opposite) to digits of G–representation of argument is considered in detail. This function is well-defined at points having two G–representations provided we use only one of them. We prove that inversor is a function of unbounded variation, continuous function at points having a unique G–representation, and right- or left-continuous at points with two representations. The values of all jumps of the function are calculated. We prove also that the function does not have monotonicity intervals and its graph has a self-similar structure.