Лукашів Т.О., Малик І.В.

Стійкість керованих стохастичних динамічних систем випадкової структури з марковськими перемиканнями і пуассоновими збуреннями

За допомогою другого методу Ляпунова отримано достатні умови асимптотичної стохастичної стійкості в цілому та асимптотичної стійкості в середньому квадратичному в цілому для керованих стохастичних динамічних систем випадкової структури з марковськими перемиканнями і пуассоновими збуреннями.

Ключові слова і фрази: стохастична динамічна система, пуассонові збурення, асимптотична стійкість, стійкість в l.i.m..

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *t.lukashiv@chnu.edu.ua*

Вступ

Теорія стійкості динамічних систем бере свій початок з кінця XIX століття, коли вона була створена О.М. Ляпуновим, який розділив сукупність методів дослідження стійкості систем на два класи. Методи першого класу вимагають знання певної інформації про розв'язок системи, яка досліджується. Такий підхід прийнято називати першим методом Ляпунова. До другого класу належить сукупність прийомів і методів дослідження стійкості розв'язків систем диференціальних рівнянь різної природи за допомогою так званих функцій Ляпунова. Такий підхід називають другим методом Ляпунова, і основною його перевагою є те, для того, щоб зробити висновок про стійкість розв'язку не потрібно знати його аналітичний вигляд. Саме ця особливість є ключовою при дослідженні стійкості складних систем, для яких знайти розв'язок у явному вигляді або дуже важко або неможливо.

І.Я. Кац у монографії [7] застосував другий метод Ляпунова для дослідження стійкості розв'язків стохастичних систем випадкової структури. Монографія Є.Ф. Царькова та М.Л. Свердана [13] присвячена дослідженню стійкості детермінованих різницевих і динамічних систем з марковськими параметрими і перемиканнями.

Праці [9], [10] узагальнюють результати [7] і [13]: у них розглядаються стохастичні динамічні системи випадкової структури за І.Я. Кацом з марковськими перемиканнями за Є.Ф. Царьковим. Дана робота узагальнює ці результати на випадок стохастичних

УДК 519.217, 519.718
2010 *Mathematics Subject Classification:* 60H10, 60J10, 60J27, 93E15.

динамічних систем випадкової структури з марковськмими перемиканнями і пуассоновими збуреннями.

1 Постановка задачі

На ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathfrak{F}, F, \mathbf{P})$ [4] розглянемо стохастичну динамічну систему випадкової структури, задану стохастичним диференціальним рівнянням Іто з пуассоновими збуреннями

$$dx(t) = a(t-, \xi(t-), x(t-), u(t-))dt + b(t-, \xi(t-), x(t-), u(t-))dw(t)+$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} (c(t-, \xi(t-), x(t-), u(t-), z))\widetilde{\nu}(dz, dt), \; t \in \mathbb{R}_+ \backslash K, \tag{1}$$

з марковськими перемиканнями

$$\Delta x(t)\Big|_{t=t_k} = g(t_k-, \xi(t_k-), \eta_k, x(t_k-)), \quad t_k \in K = \{t_n \Uparrow\} \tag{2}$$

для $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$ та початковими умовами

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^m, \; \xi(0) = y \in \mathbf{Y}, \eta_0 = k \in \mathbf{H}. \tag{3}$$

Тут $\xi(t), t \geq 0$, є однорідним неперервним марковським процесом зі скінченною кількістю станів $\mathbf{Y} := \{y_1, ..., y_N\}$ і генератором Q; $\{\eta_k, k \geq 0\}$ – ланцюг Маркова зі значеннями у просторі $\mathbf{H}$ і матрицею перехідних ймовірностей $\mathbb{P}_H$; $x : [0, +\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^m$; $w(t)$ є m-вимірним стандартним вінеровим процесом; $\widetilde{\nu}(dz, dt) = \nu(dz, dt) - \mathbb{E}\nu(dz, dt)$ – центрована пуассонова міра; процеси w, ν, ξ та η незалежні [4], [12].

Траєкторії процесу $x(t), t \geq 0$, є *càdlàg* - процесами; керування $u(t) := u(t, x(t)) : [0, T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ є m-вимірною функцією з класу допустимих керувань U [1].

Вимірні за сукупністю змінних відображення $a : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $c : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ і функція $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{H} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ задовольняють умову Ліпшиця

$$|a(t, y, x_1, u) - a(t, y, x_2, u)| + |b(t, y, x_1, u) - b(t, y, x_2, u)|+$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^m} |c(t, y, x_1, u, z) - c(t, y, x_2, u, z)|\Pi(dz)+$$
$$+|g(t, y, h, x_1) - g(t, y, h, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \tag{4}$$

де $\Pi(dz)$ визначається зі співвідношення $\mathbb{E}\nu(dz, dt) = \Pi(dz)dt$, $L > 0$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$ при $\forall t \geq 0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$, й умову

$$|a(t, y, 0, u)| + |b(t, y, 0, u)| + \int\limits_{\mathbb{R}^m} |c(t, y, 0, u, z)|\Pi(dz) + |g(t, y, h, 0)| \leq C < \infty, \tag{5}$$

2 Існування і єдиність розв'язку

У праці [8] розглянуто задачу Коші для стохастичного диференціального рівняння Іто з пуассонівськими збуреннями

$$dx(t) = a_1(t-, x(t-), u(t-))dt + b_1(t-, \xi(t-), x(t-), u(t-))dw(t)+$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^m} c_1(t-, x(t-), u(t-), z)\widetilde{\nu}(dz, dt), \tag{6}$$

Рівняння (6) є спрощенням основної проблеми даної роботи, оскільки не містить внутрішніх збурень, що задаються марковським процесом ξ, та зовнішніх збурень, що задаються функцією g. Тому доведення існування та єдиності розв'язку задачі Коші (1) - (3) буде повторювати основні кроки відповідного доведення із роботи [8]. Натомість буде розглянуто основні відмінності, які виникають при розгляді внутрішніх збурень в рівнянняні (1) та зовнішніх збурень (2).

Теорема 1. *Нехай виконуються наступні умови*

- *Глобальна умова Ліпшиця* (4)*;*
- *Умова обмеженості*

$$|a(t, y, x, u)| + |b(t, y, x, u)| + \int\limits_{\mathbb{R}^m} |c(t, y, x, u, z)|\Pi(dz)+$$
$$+|g(t, y, h, x)| \le C_1 < \infty,$$

Тоді для довільного $T > 0$ *існує єдиний розв'язок задачі Коші* (1) - (3) *на* $[0, T]$, *причому якщо* x_1 *та* x_2 *два різні розв'язки, то*

$$E\|x_1(t) - x_1(t)\|^2 = 0, t \in [0, T].$$

Зауважимо, що умова обмеженості в теоремі дозволяє також довести єдиність розв'язу з ймовірністю 1, тобто

$$P(x_1(t) = x_1(t)) = 1, t \in [0, T].$$

Випадок 1. Припустимо що перемикання типу (2) відсутні. Тоді на інтервалі $t \in [0, t_1)$, де $\xi(t) = y \in \mathbf{Y}$, рух буде відбуватися в силу системи

$$dx(t) = a(t, y, x(t), u(t))dt + b(t, y, x(t), u(t))dw(t)+$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^m} (c(t, y, x(t), u(t), z))\widetilde{\nu}(dz, dt), \tag{7}$$

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^m,\ \ \xi(0) = y \in \mathbf{Y}. \tag{8}$$

На основі теореми 1 можна стверджувати, що система (7), (8) має єдиний розв'язок на проміжку $t \in [0, t_1)$.

Далі розглянемо інтервал $t \in [t_1, t_2)$. Тут $\xi(t) = y_1 \in \mathbf{Y}$, а рух відбувається в силу системи

$$dx(t) = a(t, y_1, x(t), u(t))dt + b(t, y_1, x(t), u(t))dw(t)+$$

$$+\int_{\mathbb{R}^m} (c(t, y_1, x(t), u(t), z))\widetilde{\nu}(dz, dt), \tag{9}$$

$$x(t_1) = x_1 \in \mathbb{R}^m, \ \xi(t_1) = y_1 \in \mathbf{Y}. \tag{10}$$

Очевидно, що тут також виконуються умови теореми 1 й існує єдиний ровзв'язок системи (9), (10).

Таким чином, теорема 1 є справедливою на інтервалі $[0, +\infty) \supset \bigcup_{n=0}^{\infty} [t_n, t_{n+1}), \ 0 = t_0 < t_1 < ..., \ \lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$.

Випадок 2. Розглянемо випадок, коли перемикання типу (2) відбуваються в моменти часу $0 < t_1^* < t_2^* < ..., \ \lim_{n\to+\infty} t_n^* = +\infty$, а значення $\xi(t) = y$ залишається незмінним. Тоді замість системи (1)-(3) слід розглядати систему, яка задається рівнянням

$$dx(t) = a(t, y_1, x(t), u(t))dt + b(t, y_1, x(t), u(t))dw(t)+$$

$$+\int_{\mathbb{R}^m} (c(t, y_1, x(t), u(t), z))\widetilde{\nu}(dz, dt), \quad t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{t_1^*, t_2^*, ...\}, \tag{11}$$

з початковою умовою

$$x(0) = x_0 \tag{12}$$

для інтервала $t \in [0, t_1^*)$. На основі теореми 1 можна стверджувати, що система (11), (12) має єдиний розв'язок на інтервалі $t \in [0, t_1^*)$.

Для інтервала $t \in [t_1^*, t_2^*)$ початкова умова для системи (11) матиме вигляд

$$x(t_1^*) = x(t_1^*-) + g(t_1^*-, y, h_1, x(t_1^*-)), \quad \eta_1 = h_1 \in \mathbf{H}, \tag{13}$$

а на інтервалі $t \in [t_k^*, t_{k+1}^*)$ слід розглядати систему (11) з початковою умовою

$$x(t_k^*) = x(t_k^*-) + g(t_k^*-, y, h_k, x(t_k^*-)), \quad \eta_k = h_k \in \mathbf{H}. \tag{14}$$

Ураховуючи теорему 1, можна стверджувати, що система (11), (14) має єдиний розв'язок на інтервалі $[t_k^*, t_{k+1}^*)$ при $k \geq 1$.

Об'єднуючи випадки 1 і 2, приходимо до висновку, що умови (4), (5) гарантують існування та єдиність сильного розв'язку задачі (1)–(3) з точністю до стохастичної еквівалентності при будь-яких $t \in \mathbb{R}_+$, $x(t) \in \mathbb{R}^m$ і заданих реалізаціях марковського процесу $\xi(t), t \geq 0$, і ланцюга Маркова $\{\eta_k, k \geq 0\}$.

3 Стійкість за ймовірністю в цілому

Позначимо через $\mathbf{P}_k((y,h,x),\Gamma\times G\times \mathbf{C})$ перехідну ймовірність для випадкового вектора $(\xi(t_k),\eta_k)$, який визначає розв'язок задачі (1)–(3) $x(t)$, на k-му кроці.

Означення 1. *Дискретний оператор Ляпунова $(lv_k)(y,h,x)$ на послідовності вимірних скалярних функцій $v_k(y,h,x)$: $\mathbf{Y}\times\mathbf{H}\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^1, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ для СДР (1) із зовнішніми марковськими перемиканнями (2) визначається рівністю*

$$(lv_k)(y,h,x) := \int\limits_{\mathbf{Y}\times\mathbf{H}\times\mathbb{R}^m} \mathbf{P}_k(y,h,x)(du\times dz\times dl)v_{k+1}(u,z,l) - v_k(y,h,x). \tag{15}$$

При застосуванні другого методу Ляпунова до СДР (1) із зовнішніми марковськими перемиканнями (2) знадобляться спеціальні послідовності вищезгаданих функцій $v_k(y,h,x), k\in\mathbb{N}$.

Означення 2. *Функцією Ляпунова для системи випадкової структури* (1)-(3) *назвемо послідовність невід'ємних функцій*

$$\{v_k(y,h,x), k\geq 0\},$$

для яких

1. *при всіх $k\geq 0, y\in\mathbf{Y}, h\in\mathbf{H}, x\in\mathbb{R}^m$ визначено дискретний оператор Ляпунова $(lv_k)(y,h,x)$ (15);*

2. *при $r\to\infty$*
$$\bar{v}(r)\equiv \inf_{\substack{k\in\mathbb{N}, y\in\mathbf{Y},\\ h\in\mathbf{H}, |x|\geq r}} v_k(y,h,x)\to+\infty; \tag{16}$$

3. *при $r\to 0$*
$$\underline{v}(r)\equiv \sup_{\substack{k\in\mathbb{N}, y\in\mathbf{Y},\\ h\in\mathbf{H}, |x|\leq r}} v_k(y,h,x)\to 0, \tag{17}$$

причому $\bar{v}(r)$ і $\underline{v}(r)$ неперервні й монотонні.

Означення 3. *Систему випадкової структури* (1)-(3) *назвемо:*

– стійкою за ймовірністю, якщо для $\forall\varepsilon_1>0,\varepsilon_2>0$ можна вказати таке $\delta>0$, що з нерівності $|x|<\delta$ випливає нерівність

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq t_0}|x(t)|>\varepsilon_1\right\}<\varepsilon_2 \tag{18}$$

при всіх $y\in\mathbf{Y}, h\in\mathbf{H}$, $t\geq 0$;

– асимптотично стохастично стійкою, якщо вона стійка за ймовірністю і для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta_2 > 0$ таке, що

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq T}|x(t)| > \varepsilon\right\} = 0 \tag{19}$$

при всіх $|x| < \delta_2$, $y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$, $t \geq 0$ і $T \geq 0$.

Означення 4. *Систему випадкової структури* (1)-(3) *назвемо*

– стійкою в середньому квадратичному (в l.i.m.), якщо для $\forall\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що з нерівності $|x| < \delta$ випливає нерівність

$$\mathbf{E}\,|x(t)|^2 < \varepsilon \tag{20}$$

при всіх $t \geq 0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$;

– асимптотично стійкою в середньому квадратичному, якщо вона стійка в середньому квадратичному та існує таке $\delta_1 > 0$, що з нерівності $|x| < \delta_1$ випливає

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{y\in\mathbf{Y},h\in\mathbf{H}} \mathbf{E}\,|x(t)|^2 = 0 \tag{21}$$

при всіх $t \geq 0$.

Якщо (18), (19) або (20) виконується для всіх $x \in \mathbb{R}^m$, то до відповідної назви стійкості будемо додавати слова «в цілому».

4 Загальні теореми про стійкість систем випадкової структури

Для подальшого викладення одержимо спочатку оцінки розв'яз-ку задачі (1)-(2) на інтервалах $[t_k, t_{k+1})$ за значеннями розв'язку в точках $t_k, k \geq 0$.

Лема 1. *Нехай коефіцієнти ріняння* (1) *a, b, c і функція g задовольняють умову Ліпшиця* (4) *і умову рівномірної обмеженості* (5)*).*

Тоді при всіх $k \geq 0$ для сильного розв'язку задачі Коші (1)-(3) *має місце нерівність*

$$\mathbf{E}\left\{\sup_{t_k\leq t<t_{k+1}}|x(t)|^2\right\} \leq 7\left[\mathbb{E}\,|x(t_k)|^2 + 3C^2(t_{k+1}-t_k)\right]\times$$
$$\times\exp\left\{7L^2((t_{k+1}-t_k)+4)\right\}. \tag{22}$$

Доведення. Використовуючи інтегральну форму запису сильного розв'язку рівняння (1) [8], при всіх $t \in [t_k, t_{k+1}), t_k \geq 0$, має місце нерівність

$$|x(t)| \leq |x(t_k)| + \int_{t_k}^{t} |a(\tau,\xi(\tau),x(\tau),u(\tau)) - a(\tau,\xi(\tau),0,u(\tau))|\,d\tau +$$

$$+\int_{t_k}^{t} |a(\tau,\xi(\tau),0,u(\tau))|\,d\tau + \int_{t_k}^{t} |b(\tau,\xi(\tau),x(\tau),u(\tau)) - b(\tau,\xi(\tau),0,u(\tau))|\,dw(\tau) +$$

$$+\int_{t_k}^{t}|b(\tau,\xi(\tau),0,u(\tau))|\,dw(\tau)+\int\limits_{t_k}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^m}|c(\tau,\xi(\tau),x(\tau),u(\tau),z)-c(\tau,\xi(\tau),0,u(\tau),z)|\,\widetilde{\nu}(dz,d\tau)+$$

$$+\int\limits_{t_k}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^m}|c(\tau,\xi(\tau),0,u(\tau),z)|\,\widetilde{\nu}(dz,d\tau)$$

Піднісши до квадрата ліву і праву частини одержаної нерівності, обчисливши sup, і застосувавши нерівність Коші-Буняковського, ураховуючи (4), (5), одержимо:

$$\sup_{t_k\le t<t_{k+1}}|x(t)|^2\le 7\sup_{t_k\le t<t_{k+1}}\Big[|x(t_k)|^2+$$

$$+\left|\int_{t_k}^{t}|a(\tau,\xi(\tau),x(\tau),u(\tau))-a(\tau,\xi(\tau),0,u(\tau))|\,d\tau\right|^2+\left|\int\limits_{t_k}^{t}|a(\tau,\xi(\tau),0,u(\tau))|\,d\tau\right|^2+$$

$$+\left|\int\limits_{t_k}^{t}|b(\tau,\xi(\tau),x(\tau),u(\tau))-b(\tau,\xi(\tau),0,u(\tau))|\,dw(\tau)\right|^2+$$

$$+\left|\int_{t_k}^{t}|b(\tau,\xi(\tau),0,u(\tau))|\,dw(\tau)\right|^2+$$

$$+\left|\int\limits_{t_k}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^m}|c(\tau,\xi(\tau),x(\tau),u(\tau),z)-c(\tau,\xi(\tau),0,u(\tau),z)|\,\widetilde{\nu}(dz,d\tau)\right|^2+$$

$$\left.+\left|\int\limits_{t_k}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^m}|c(\tau,\xi(\tau),0,u(\tau),z)|\,\widetilde{\nu}(dz,d\tau)\right|^2\right]\le$$

$$\le 7\left[\sup_{t_k\le t<t_{k+1}}\left\{x^2(t)\right\}+\sup_{t_k\le t<t_{k+1}}L^2\left|\int\limits_{t_k}^{t}|x(\tau)|\,d\tau\right|^2+\right.$$

$$+C^2(t_{k+1}-t_k)+\sup_{t_k\le t<t_{k+1}}L^2\left|\int\limits_{t_k}^{t}|x(\tau)|\,dw(\tau)\right|^2+C^2(t_{k+1}-t_k)+$$

$$+\sup_{t_k\le t<t_{k+1}}\left|\int\limits_{t_k}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^m}|c(\tau,\xi(\tau),x(\tau),u(\tau),z)-c(\tau,\xi(\tau),0,u(\tau),z)|\,\widetilde{\nu}(dz,d\tau)\right|^2+$$

$$\left.+\sup_{t_k\le t<t_{k+1}}\left|\int\limits_{t_k}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^m}|c(\tau,\xi(\tau),0,u(\tau),z)|\,\widetilde{\nu}(dz,d\tau)\right|^2\right].$$

До останньої нерівності застосуємо операцію умовного математичного сподівання відносно σ-алгебри $\mathfrak{F}_{t_k}$ і, з урахуванням властивостей стохастичних інтегралів, одержимо

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{t_k\le t<t_{k+1}}|x(t)|^2\right\}\le 7\left[\mathbb{E}\left\{x^2(t)\right\}+L^2(t_{k+1}-t_k)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\mathbb{E}\left|x(\tau)\right|^2d\tau+\right.$$

$$+C^2(t_{k+1}-t_k)+4L^2\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\mathbb{E}\left|x(\tau)\right|^2d\tau+C^2(t_{k+1}-t_k)+$$

$$\left.+\,4L^2\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\mathbb{E}\left|x(\tau)\right|^2d\tau+C^2(t_{k+1}-t_k)\right]=$$

$$=7\left[\left\{x^2(t)\right\}+3C^2(t_{k+1}-t_k)+L^2((t_{k+1}-t_k)+8)\cdot\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\mathbb{E}\left|x(\tau)\right|^2d\tau\right]$$

Використавши нерівність Гронуолла, отримаємо оцінку

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{t_k\le t<t_{k+1}}|x(t)|^2/\mathfrak{F}_{t_k}\right\}\le$$

$$\le 7\left[\mathbb{E}\left|x(t_k)\right|^2+3C^2(t_{k+1}-t_k)\right]e^{7L^2((t_{k+1}-t_k)+4)}, \tag{23}$$

що і потрібно було довести.

□

Зауваження 1. *Будемо розглядати стійкість тривіального розв'язку* $x\equiv 0$*, тобто виконання* (5) *при* $C=0$ *[5], [13], [14].*

Теорема 2. *Нехай:*

1) довжини інтервалів $[t_k,t_{k+1})$ *не перевищують* $\Delta>0$*, тобто* $|t_{k+1}-t_k|\le\Delta, k\ge 0$*;*

2) виконується умова Ліпшиця (4)*;*

3) існують функції Ляпунова $v_k(y,h,x)$ *і* $a_k(y,h,x), k\ge 0$ *такі, що на підставі системи правильна нерівність*

$$(lv_k)(y,h,x(t))\le -a_k(y,h,x(t)), k\ge 0. \tag{24}$$

Тоді система випадкової структури (1)-(3) *асимптотично стохастично стійка в цілому.*

Доведення. Позначимо через $\mathfrak{F}_{t_k}=\sigma(\xi(s),\eta_e,s\le t_k,t_e\le t_k)$ мінімальну σ-алгебру, відносно якої вимірні $\xi(t)$ при всіх $t\in[t_0,t_k]$ і η_n при $n\le k$. Тоді умовне математичне сподівання обчислимо за формулою

$$\mathbf{E}\left\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}),\eta_{k+1},x(t_{k+1}))/\mathfrak{F}_{t_k}\right\}=$$

$$= \int_{\mathbf{Y}\times\mathbf{H}\times\mathbb{R}^m} \mathbf{P}_k((\xi(t_k),\eta_k,x)(du\times dz\times dl)v_{k+1}(u,z,l)). \tag{25}$$

Тоді за означенням дискретного оператора Ляпунова $(lv_k)(y,h,x)$ (див. (15)) з рівності (25) одержимо, враховуючи (24), нерівність

$$\mathbf{E}\left\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}),\eta_{k+1},x(t_{k+1}))/\mathfrak{F}_{t_k}\right\} = v_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k))+$$
$$+(lv_k)(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k)) \le \bar{v}(|x(t_k)|). \tag{26}$$

З леми 1 (бо з існування другого моменту випливає існування першого моменту) і властивостей функції $\bar{v}$ випливає існування умовного математичного сподівання лівої частини нерівності (26).

Тепер, використовуючи (25), (26), запишемо дискретний оператор Ляпунова $(lv_k)(y,h,x)$, заданий вздовж розв'язків (1)-(3):

$$lv_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k)) = \mathbf{E}\left\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}),\eta_{k+1},x(t_{k+1}))/\mathfrak{F}_{t_k}\right\} -$$
$$-v_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k)) \le -a_k(\xi(t_k)) \le 0. \tag{27}$$

Тоді при $k \ge 0$ виконується нерівність

$$\mathbf{E}\left\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}),\eta_{k+1},x(t_{k+1}))/\mathfrak{F}_{t_k}\right\} \le v_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k)).$$

А це означає, що послідовність випадкових величин

$$v_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k))$$

утворює супермартингал відносно $\mathfrak{F}_{t_k}$ [6].

Далі, взявши математичне сподівання обох частин нерівності (27), просумуємо за k від $n \ge 0$ до N одержані вирази, і, очевидно, будемо мати нерівність:

$$\mathbf{E}\left\{v_{N+1}(\xi(t_{N+1}),\eta_{N+1},x(t_{N+1}))\right\} - \mathbf{E}\left\{v_n(\xi(t_n),\eta_n,x(t_n))\right\} =$$
$$= \sum_{k=n}^{N} \mathbf{E}\left\{lv_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k))\right\} \le$$
$$\le -\sum_{k=n}^{N} \mathbf{E}\left\{a_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k))\right\} \le 0. \tag{28}$$

Оскільки випадкова величина $\sup\limits_{t_k\le t<t_{k+1}} |x(t)|^2$ не залежить від подій σ- алгебри $\mathfrak{F}_{t_k}$ [3], то

$$\mathbf{E}\left\{\sup_{t_k\le t<t_{k+1}} |x(t)|^2 \Big/ \mathfrak{F}_{t_k}\right\} = E\left\{\sup_{t_k\le t<t_{k+1}} |x(t)|^2\right\}, \tag{29}$$

тобто нерівність (22) має місце і для звичайного математичного сподівання

$$\mathbf{E}\left\{\sup_{t_k\le t<t_{k+1}} |x(t)|^2\right\} \le 7\mathbb{E}\,|x|^2 e^{7L^2(\Delta+4)}.$$

Далі маємо

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq 0}|x(t)|>\varepsilon_1\right\}=\mathbf{P}\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{t_{n-1}\leq t<t_n}|x(t)|>\varepsilon_1\right\}\leq$$

$$\leq\mathbf{P}\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}7e^{7L^2(\Delta+4)}|x(t_{n-1})|>\varepsilon_1\right\}\leq\mathbf{P}\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}|x(t_{n-1})|>\frac{\varepsilon_1}{7}e^{-7L^2(\Delta+4)}\right\}\leq$$

$$\leq\mathbf{P}\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}v_{n-1}(\xi(t_{n-1}),\eta_{n-1},x(t_{n-1}))\geq\bar{v}(\frac{\varepsilon_1}{7}e^{-7L^2(\Delta+4)})\right\} \tag{30}$$

Якщо $\sup|x(t_k)|\geq r$, то на основі (16) виконується нерівність

$$\sup_{k\geq 0}v_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k))\geq\inf_{k\geq 0,y\in\mathbf{Y},h\in\mathbf{H},|x|\geq r}v_k(y,h,x)=\bar{v}(r). \tag{31}$$

Тепер скористаємось відомою нерівністю для невід'ємних супермартингалів [4], [6] для оцінки правої частини (30):

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}v_{n-1}(\xi(t_{n-1}),\eta_{n-1},x(t_{n-1}))\geq\bar{v}(\frac{\varepsilon_1}{7}e^{-7L^2(\Delta+4)})\right\}\leq$$

$$\leq\frac{1}{\bar{v}(\frac{\varepsilon_1}{7}e^{-7L^2(\Delta+4)})}v_k(y,h,x)\leq\frac{\bar{v}(|x|)}{\bar{v}(\frac{\varepsilon_1}{7}e^{-7L^2(\Delta+4)})}. \tag{32}$$

Враховуючи нерівність (30), нерівність (32) дає можливість гарантувати виконання нерівності (18) стійкості за ймовірністю в цілому системи (1)-(3).

З нерівності (28) випливає оцінка

$$\mathbf{E}\{v_{N+1}(\xi(t_{N+1}),\eta_{N+1},x(t_{N+1}))\}\leq v_0(y,h,x)-$$

$$-\sum_{k=0}^{N}\mathbf{E}\{a_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k))\}\leq v_0(y,h,x), \tag{33}$$

при всіх $N\geq 0, y\in\mathbf{Y}, h\in\mathbf{H}, x\in\mathbb{R}^m$.

Через те, що послідовність $\{a_k\}, k\geq 0$ утворює функції Ляпунова, повинні існувати [11] неперервні строго монотонні функції $\underline{a}(r)$ і $\bar{a}(r)$, які дорівнюють нулю при $r=0$ і такі, що

$$\bar{a}(|x|)\leq a_k(y,h,x)\leq\underline{a}(|x|) \tag{34}$$

для $\forall k\in\mathbb{N}, y\in\mathbf{Y}, h\in\mathbf{H}$ і $x\in\mathbb{R}^m$.

Таким чином, зі збіжності ряду у лівій частині нерівності (33) випливає збіжність ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mathbf{E}\{\bar{a}(|x(t)|\}$ для $\forall t\geq t_k, y\in\mathbf{Y}, h\in\mathbf{H}, x\in\mathbb{R}^m$.

Тоді, зважаючи на неперервність $\underline{a}(r)$ і рівність $\underline{a}(0)=0$, матимемо:

$$\lim_{k\to\infty}|x(t)|=0, t\geq t_k. \tag{35}$$

А з (35) випливає прямування до нуля за ймовірністю послідовності $\bar{v}\left(|x(t)|\right)$ при $k\to\infty$ для всіх $t\geq t_k, y\in\mathbf{Y}, h\in\mathbf{H}, x\in\mathbb{R}^m$.

Отже, з властивостей функції Ляпунова робимо висновок, що невід'ємний супермартингал $v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))$ при $k \to +\infty$ прямує до нуля за ймовірністю при всіх реалізаціях процесу ξ і послідовності η_k.

Далі, невід'ємний обмежений зверху супермартингал має границю з імовірністю одиниця [4]. На підставі леми 1 (нерівність (22) для звичайного матсподівання)), одержимо асимптотичну стохастичну стійкість у цілому системи (1)-(3) за означенням 3 (див. (19)). Теорема 2 доведена. $\square$

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 2, причому функції Ляпунова* $\{v_k\}, \{a_k\}, k \geq 0$ *задовольняють нерівності*

$$c_1 \left|x\right|^2 \leq v_k(y, h, x) \leq c_2 \left|x\right|^2, \tag{36}$$

$$c_3 \left|x\right|^2 \leq a_k(y, h, x) \leq c_4 \left|x\right|^2 \tag{37}$$

при деяких $c_i > 0, i = \overline{1, 4}$ *для всіх* $k \in \mathbb{N}, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, x \in \mathbb{R}^m$.

Тоді система випадкової структури (1)-(3) *асимптотично стійка в середньому квадратичному в цілому.*

Доведення. Використовуючи нерівність (27) для $k = 0$, на основі (36) легко одержати нерівність

$$\mathbf{E}\left\{\left|x(t_{N+1})\right|^2\right\} \leq \frac{1}{c_1}\mathbf{E}\{v_{N+1}(\xi(t_{N+1}), \eta_{N+1}, x(t_{N+1}))\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c_1}\mathbf{E}\{v_0(\xi(t_0), \eta_0, x)\} \leq \frac{c_2}{c_1}\left|x\right|^2 \tag{38}$$

для всіх $N \geq 0, x \in \mathbb{R}^m$ і початкових розподілах випадкового вектора $\{\xi(t_0), \eta_0\}$.

Звідси, за означенням 4 (див. (20)), випливає p-стійкість (при $p = 2$) системи випадкової структури (1)-(3) або стійкість у *l.i.m.*

Використовуючи нерівності (28), (36) і (37), можна одержати нерівність:

$$\sum_{k=0}^{N}\mathbf{E}\left\{\left|x(t_{N+1})\right|^2\right\} \leq \frac{1}{c_3}\sum_{k=0}^{N}\mathbf{E}\{a_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c_3}\mathbf{E}\{v_0(\xi(t_0), \eta_0, x)\} \leq \frac{c_2}{c_3}\left|x\right|^2.$$

Ця нерівність гарантує збіжність ряду, членами якого виступають $\mathbf{E}\left\{\left|x(t_k)\right|^2\right\}$ для будь-яких початкових даних $x(t_0) = x$ і початкових розподілів випадкового вектора $\{\xi(t_0), \eta_0\}$.

Таким чином,

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{y\in\mathbf{Y}, h\in\mathbf{H}}\mathbf{E}\left\{\left|x(t)\right|^2\right\} = 0$$

при всіх $t \geq 0$, що і доводить теорему 3. $\square$

Наслідок 1. *Якщо виконуються умови теореми 3 і має місце нерівність* (36), *тоді система випадкової структури* (1)-(3) *стійка в* l.i.m. *у цілому.*

4.1 Модельний приклад

Для аналізу стійкості, розглянемо приклад, який відображає особливості стійкості розв'язку системи зі збуреннями. Розглянемо лінійну систему для $n = 1$, аналогічно роботі [2], яка задається наступними параметрами: генератор марковського процесу $\xi(t), t > 0$ задається генератором

$$Q = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix},$$

матриця перехідних ймовірностей для ДЛМ $\eta_k, k \geq 0$ визначається співвідношенням

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix},$$

для станів $y_i \in \mathbb{Y}$ коефіцієнти визначені співвідношеннями

- $\xi(t) = y_1$: $a = a_{y_1} = -0.2x + u$, $b = b_{y_1} = 0.21x$, $c = c_{y_1} = z^2 x$;
- $\xi(t) = y_2$: $a = a_{y_2} = -2.25x + u$, $b_{y_2} = 0.24x$, $c = c_{y_2} = z^3 x$.

Стрибки будуть мати наступне представлення

$$g(t, \xi, \eta, x) = k_\eta x,$$

де $\eta \in H = \{1, 2\}$, $k_\eta \in (-2, -1]$. Зауважимо, що даний випадок відповідає наступному перетворенню

$$x(t_k-)x(t_k+) \leq 0, |x(t_k-)| \geq |x(t_k+)|$$

з ймовірністю 1. В якості моментів збурень для простоти виберемо $t_k = k, k \geq 1$.

Множину допустимих керувань будемо визначати в лінійній формі наступним чином:

$$U = \{u(t) = r \cdot x(t) |\ |r| < C_1 = const\}$$

В якості функцій Ляпунова візьмемо квадратичні функції, тобто

$$v_k(y, h, x) = x^2.$$

використовуючи узагальнену формулу Іто, отримаємо співвідношення для інфінітезимального оператора:

$$dv_k(\xi(t), \eta_k, x) = 2x^2 \left(\left[a_{\xi(t)} + r + \frac{1}{2} b^2_{\xi(t)} \right] dt + b_{\xi(t)} dw(t) + \right.$$

$$\left. \int_Z (2c_{\xi(t)} z^{k(\xi(t))} - c^2_{\xi(t)} z^{2k(\xi(t))}) \widetilde{\nu}(dz, dt) \right),$$

де $k(\xi(t)) = 2$ для $\xi(t) = y_1$ та $k(\xi(t)) = 3$ для $\xi(t) = y_2$. Використовуючи мартингальну властивість $w(t)$ та $\widetilde{\nu}(dz, dt)$, отримаємо що

$$a_k(\xi(t), \eta_k, x) = (lv_k)(\xi(t), \eta_k, x) = \mathbb{E} \left(2x^2 \left(\left[a_{\xi(t)} + r + \frac{1}{2} b^2_{\xi(t)} \right] \right) = \right.$$

$$\mathbb{E}v_k\mathbb{E}\left(2a_{\xi(t)} + r + b^2_{\xi(t)}\right).$$

Згідно задання коефіцієнтів, отримаємо, що $a_k(\xi(t), \eta_k, x)$ задовольняє умову (28) для

$$c_3 = \min_i\{2a_{y_i} + r + b^2_{y_i}\}, c_4 = \max_i\{2a_{y_i} + r + b^2_{y_i}\}.$$

Для $t = t_n$ отримаємо

$$a_n(\xi(t), \eta_n, x) = (lv_n)(\xi(t), \eta_n, x) = x^2[(k_{\eta_n} + 1)^2 - 1].$$

Згідно умови,

$$(k_{\eta_n} + 1)^2 - 1 \in [-1, 0).$$

Таким чином, всі умови теореми 3 виконуються, отже система є асимптотично стійка в середньому квадратичному в цілому.

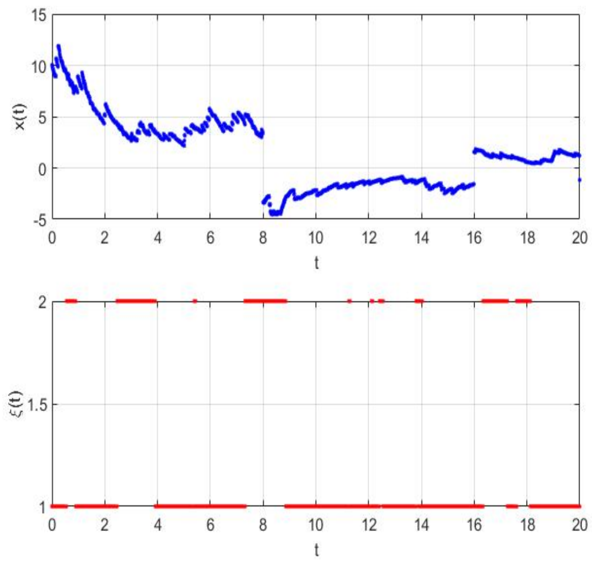

Рис. 1: Траєкторія розв'язку СДР у випадку $r = 0$.

Слід зауважити, що система є асимптотично стійка в середньому квадратичному в цілому за умови існування нестійкого стану ($\xi(t) = y_1$). При фіксації $\xi(t) = y_1$ система є експоненціально нестійка, оскільки показник Ляпунова більший 0,

$$\lambda_1 = a_{y_1} + r + b^2_{y_1} + \int_{\mathbb{R}^m} c_{y_1}\Pi(du) > 0$$

Проте як відзначено в роботі [15], експоненціальна стійкість системи визначається усередненим показником Ляпунова за стаціонарним розподілом π випадкового процесу $\xi(t), t \geq 0$,

$$\lambda_1\pi_1 + \lambda_2\pi_2 < 0.$$

Аналогічний результат ми спостерігаємо і для систем із зовнішніми збуреннями $g \neq 0$.

5 Висновки

Використано апарат функцій Ляпунова, поняття інфінітезимального оператора на підставі керованої системи випадкової структури з пуассоновими збуреннями та з перемиканнями типу ланцюга Маркова (для обчислення якого достатньо тільки відомих коефіцієнтів системи) для дослідження асимптотичної стохастичної стійкості в цілому та асимптотичної стійкості в середньому квадратичному в цілому.

Список літератури

[1] Andreeva E.A., Kolmanovskii V.B., Shaikhet L.E. Control of hereditary systems. Nauka, Moskow, 1992. (in Russian)

[2] Das A., Lukashiv T.O., Malyk I.V. *Optimal Control Synthesis for Stochastic Dynamical Systems of Random Structure with the Markovian Switchings.* Journal of Automation and Information Sciences 2017, **49** (4), 37–47. doi:1615/JAutomatInfScien.v49.i4.40.

[3] Doob J.L. Stochastic Processes. Wiley, New York, 1953.

[4] Dynkin E.B. Markov Processes. Academic Press, New York, 1965.

[5] Hasminsky R.Z., Stability of Systems of Differential Equations under Random Parameter Perturbations. Nauka, Moscow, 1969. (in Russian)

[6] Jacod J., Shiryaev A.N. Limit Theorems for Stochastic Processes. Vols. 1 and 2. Fizmatlit, Moscow, 1994. (in Russian)

[7] Kats I.Ya. Lyapunov Function Method in Problems of Stability and Stabilization of Random-Structure Systems. Izd. Uralsk. Gosakademii Putei Soobshcheniya, Yekaterinburg, 1998. (in Russian)

[8] Korolyuk V.S., Tsarkov E.F., Yasinskii V.K. Probability, Statistics, and Random Processes. Theory and Computer Practice, Vol. 3, Random Processes. Theory and Computer Practice. Zoloti Lytavry, Chernivtsi, 2009. (in Ukrainian)

[9] Lukashiv T.O., Yurchenko I.V., Yasinskii V.K. *Lyapunov function method for investigation of stability of stochastic Ito random-structure systems with impulse Markov switchings. I. General theorems on the stability of stochastic impulse systems.* Cybernetics and Systems Analysis 2009. **45** (2), 281-–290. doi:https://doi.org/10.1007/s10559-009-9102-8

[10] Lukashiv T.O., Yurchenko I.V., Yasinskii V.K. *Lyapunov function method for investigation of stability of stochastic Ito random-structure systems with impulse Markov switchings. II. First-approximation stability of stochastic impulse systems with markov parameters.* Cybernetics and Systems Analysis 2009. **45** (3), 464-–476. doi:https://doi.org/10.1007/s10559-009-9109-1

[11] Lyapunov A.M. The General Problem of Stability of Motion. Gostekhizdat, Moscow, 1958. (in Russian)

[12] Oksendal B. Stochastic Differential Equation. Springer, New York, 2013.

[13] Sverdan M.L., Tsar'kov E.F. Stability of Stochastic Impulse Systems. RTU, Riga, 1994. (in Russian)

[14] Skorokhod A.V. Asymptotic Methods in the Theory of Stochastic Differential Equations. Naukova Dumka, Kyiv, 1987. (in Russian)

[15] Malyk I.V. Characteristic index of the solution of the neutral type stochastic differential - functional equation with Poisson integral // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. – 2010, №7, С. 38 - 43.

Надійшло 25.01.2022

Lukashiv T.O., Malyk I.V. *Stability of controlled stochastic dynamic systems of random structure with Markov switches and Poisson perturbations*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 1 (2022), 85–99.

Lyapunov's second method is used to study the problem of stability of controlled stochastic dynamical systems of random structure with Markov and Poisson perturbations. Markov switches reflect random effects on the system at fixed points in time. Poisson perturbations describe random effects on the system at random times. In both cases there may be breaks in the phase trajectory of the first kind.

The conditions for the coefficients of the system are written, which guarantee the existence and uniqueness of the solution of the stochastic system of a random structure, which is under the action of Markov switches and Poisson perturbations. The differences between these systems and systems that do not contain internal perturbations in the equation, which cause a change in the structure of the system, and external perturbations, which cause breaks in the phase trajectory at fixed points in time, are discussed. The upper bound of the solution for the norm is obtained. The definition of the discrete Lyapunov operator based on the system and the Lyapunov function for the above-mentioned systems is given.

Sufficient conditions of asymptotic stochastic stability in general, stability in l.i.m. and asymptotic stability in the l.i.m. for controlled stochastic dynamic systems of random structure with Markov switches and Poisson perturbations are obtained.

A model example that reflects the features of the stability of the solution of a system with perturbations is considered: the conditions of asymptotic stability in the root mean square as a whole are established; the conditions of exponential stability and exponential instability are discussed. For linear systems, the necessary and sufficient stability conditions are determined in the example, based on the generalized Lyapunov exponent.