Bukovinian Math. Journal. 2022, **10**, 1, 71–84 Буковинський матем. журнал 2022, Т.10, №1, 71–84

Літовченко В.А., Харина Д.Д.

Повторні ядра функції Гріна параболічних рівнянь типу Шилова зі змінними коефіцієнтами та від'ємним родом

Поняття параболічності за Шиловим узагальнює поняття параболічності за Петровським рівнянь з частинними похідними та призводить до істотного розширення відомого класу Петровського тими параболічними рівняннями, порядок яких вже може не збігатися з показником параболічності. Таке розширення, взагалі кажучи, позбавляє параболічної стійкості стосовно зміни коефіцієнтів параболічних за Шиловим рівнянь, яка є притаманною для рівнянь з класу Петровського. У зв'язку з цим виникають істотні труднощі при дослідженні задачі Коші для параболічних за Шиловим рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

У 60-х роках минулого століття Я.І.Житомирський означив спеціальний клас параболічних типу Шилова рівнянь, який розширює клас Шилова і при цьому, є параболічно стійким до зміни молодших коефіцієнтів. Для цього класу він методом послідовних наближень встановив коректну розв'язність задачі Коші в класі обмежених початкових функцій скінченної гладкості. Однак для одержання загальніших результатів важливим є знання функції Гріна задачі Коші.

У даній публікації для параболічних типу Шилова рівнянь із обмеженими гладкими змінними коефіцієнтами та від'ємним родом встановлено оцінки повторних ядер функції Гріна задачі Коші, які дозволяють дослідити властивості густини об'ємного потенціалу цієї функції. Ці результати важливі для розбудови теорії задачі Коші для параболічних типу Шилова рівнянь класичними засобами функції Гріна.

Ключові слова і фрази: функція Гріна, задача Коші, параболічні за Шиловим рівняння, повторні ядра.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine
e-mail: *v.litovchenko@chnu.edu.ua* *KhD01214@outlook.com*

Вступ

На відміну від $2b$-параболічних за Петровським рівнянь із частинними похідними, у параболічних за Шиловим рівняннях порядок p вже може не збігатися з показником параболічності h, що спричиняє ефект "дисипації параболічності" мірою якої слугує спеціальна характеристика рівняння – його рід μ [1, 2]: $1-(p-h)\le\mu\le 1$. Параболічні рівняння, в яких $p=h$, це, зокрема, класичне рівняння теплопровідності та

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 47D06, 47D62.

всі $2b$-параболічні рівняння, мають рід $\mu = 1$. А для рівнянь з $p \neq h$, взагалі кажучи, рід $\mu < 1$. І чим більше показник параболічності h відхиляється від порядку рівняння p, тим більше його рід μ зменшуючись, віддаляється від 1. У рівняннях з такою дисипацією навіть зі сталими коефіцієнтами спостерігаються відхилення від стандартів, які задає класичне рівняння теплопровідності. Передусім, для їх фундментального розв'язку $G(t,\tau;\cdot)$ погіршуються властивості аналітичності в комплексному просторі $\mathbb{C}^n$, а також, змінюється порядок експоненціальної поведінки на дійсній гіперплощині $\mathbb{R}^n$ [2, 3]:

$$|\partial_x^k G(t,\tau;x)| \leq A_k (t-\tau)^{-\frac{|k|+n}{h}} \begin{cases} e^{-\delta_0 \left(\frac{\|x\|}{(t-\tau)^{\mu/p}}\right)^{\frac{p}{p-\mu}}}, & 0 \leq \mu \leq 1, \\ e^{-\delta_0 \left(\frac{\|x\|}{(t-\tau)^{\mu/h}}\right)^{\frac{h}{h-\mu}}}, & \mu < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Ще одним аномальним явищем рівнянь з дисипативною параболічністю є їх параболічна нестійкість стосовно зміни коефіцієнтів, навіть тих, що знаходяться при нульовій похідній. На цей факт уперше звернув увагу У Хоу-Сінь ще в 1960 р. навівши приклад параболічно нестійкої системи [4].

Дослідження задачі Коші для параболічних за Шиловим рівнянь проводилось у багатьох працях. Зокрема, в [2] описано класи єдиності та коректності цієї задачі. Властивості стабілізації розв'язків при спеціальних Λ-умовах вивчалися в [5, 6]. У [7, 8] встановлено принцип локалізації розв'язку на початковій гіперплощині, а в працях [8, 9] запропоновано альтернативні методи дослідження фундаментального розв'язку, які дозволяють уникнути поняття роду рівняння та труднощів, пов'язавних з його знаходженням. У [10, 11] розвивається абстрактна теорія задачі Коші у Банахових просторах. Питання коректної розв'язності задачі Коші для рівнянь з неоднорідністю вивчається в [12]. Нелокальна задача Коші з імпульсною дією досліджена в [13, 14].

Наявність дисипації параболічності в рівнянні істотно ускладнює процес його дослідження, зокрема, поширення ряду відомих результатів класичної теорії задачі Коші для параболічних за Петровським рівнянь [15, 16, 17]. Досі залишається відкритою проблема розбудови класичної теорії крайових задач, зокрема, задачі Коші для рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Перші результати в цьому напрямку були одержані Я.І.Житомирським ще в 60-х роках минулого століття [3], який виокремив клас параболічно стійких до зміни своїх коефіцієнтів рівнянь і встановив коректну розв'язність задачі Коші в класі обмежених зі скінченною гладкістю функцій. Клас Житомирського узагальнює та розширює клас Шилова рівнянь зі сталими коефіцієнтами, однак, дослідження Я.І.Житомирським проводились лише у випадку коефіцієнтів, незалежних від часу, при цьому розв'язок задачі Коші будувався методом послідовних наближень без використання функції Гріна задачі. Зазначимо, що наявність функції Гріна дозволяє одержувати загальніші результати, тому важливою є побудова цієї функції.

Починаючи з 2012 року, дослідження Житомирського були продовжені в [18, 19, 20, 21, 22, 23]. Для загального класу рівнянь з дисипативною параболічністю та невід'ємним родом μ, коефіцієнти яких вже можуть залежати і від часу, а стосовно просторової змінної x – мати різний ступінь гладкості, було побудовано функцію Гріна задачі Коші (ФГЗК), за допомогою якої встановлено коректну розв'язність цієї задачі в досить широких класах початкових функцій, серед елементів яких є узагальнені функції типу розподілів Гельфанда і Шилова. Також, одержано ряд властивостей розв'язків таких систем. Поширення цих результатів на системи з родом $\mu < 0$ не видалось можливим. Оскільки, згідно з оцінками Житомирського (1), у цьому випадку параметрикс $G(t, \tau; \cdot)$ має особливість уже на всій гіперплощині $t = \tau$, що унеможливлює класичними засобами обгрунтувати процес збіжності послідовного наближення при побудові відповідної функції Гріна. У зв'язку з цим виникає природне питання: на скільки точними є оцінки (1) для рівнянь з родом $\mu < 0$?

Відповідь на це питання з'ясовано в [24]. Тут запропоновано метод дослідження функції $G(t, \tau; \cdot)$ для параболічних за Шиловим рівнянь з $\mu < 0$, який дозволяє істотно покращити оцінки (1) і більш точно описати особливість поведінки цієї функції на гіперплощині $t = \tau$. Ці результати дозволяють вже проводити дослідження параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами й від'ємним родом класичними засобами теорії рівнянь з частинними похідними.

У даній роботі розглядається загальний клас лінійних диференціальних рівнянь з дисипативною параболічністю, від'ємним родом і гладкими обмеженими змінними коефіцієнтами, який природно розширює відомий клас Житомирського та узагальнює клас Шилова. Для цього класу встановлюються оцінки похідних повторних ядер ФГЗК, за допомогою яких досліджуються властивості густини її об'ємного потенціалу. Одержані результати важливі для розбудови класичної теорії задачі Коші для рівнянь з дисипативною параболічністю та змінними коефіцієнтами методом ФГЗК.

1 Попередні відомості

Нехай T – фіксоване число з $(0; +\infty)$, $\mathbb{N}$ – множина всіх натуральних чисел; $\mathbb{N}_m := \{1; \ldots; m\}$; $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ — відповідно дійсний і комплексний простори розмірності $n \geq 1$; $\mathbb{R} := \mathbb{R}^1$, $\mathbb{C} := \mathbb{C}^1$; $\mathbb{Z}_+^n$ — множина всіх n-вимірних мультиіндексів, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{Z}_+^1$; i — уявна одиниця; $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток у просторі $\mathbb{R}^n$; $\|x\| := (x, x)^{1/2}$ для $x \in \mathbb{R}^n$; $|x + iy| := (x^2 + y^2)^{1/2}$, якщо $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$; $|l| := l_1 + \ldots + l_n$, $z^l := z_1^{l_1} \ldots z_n^{l_n}$, якщо $z := (z_1; \ldots; z_n) \in \mathbb{C}^n$, $l := (l_1; \ldots; l_n) \in \mathbb{Z}_+^n$; $\Pi_M := \{(t; x) |\ t \in M, x \in \mathbb{R}^n\}$, $M \subset \mathbb{R}$, $\Pi_T^2 := \{(t, x; \tau, \xi) |\ 0 \leq \tau < t \leq T,\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n\}$; $\mathbb{S}'$ – простір розподілів Шварца [25].

Розглянемо диференціальне рівняння з частинними похідними порядку p

$$\partial_t u(t; x) = \{A_0(t; i\partial_x) + A_1(t, x; i\partial_x)\} u(t; x), \quad (t; x) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{2}$$

в якому u – невідома функція, а

$$A_0(t; i\partial_x) = \sum_{|k| \leq p} a_{0,k}(t) i^{|k|} \partial_x^k, \quad A_1(t, x; i\partial_x) = \sum_{|k| \leq p_1} a_{1,k}(t; x) i^{|k|} \partial_x^k$$

– диференціальні вирази порядків відповідно p і p_1 з неперервними щодо змінної t і нескінченно диференційовними стосовно x обмеженими коефіцієнтами $a_{0,k}(t)$ і $a_{1,k}(t; x)$. При цьому вважатимемо, що рівняння

$$\partial_t u(t; x) = A_0(t; i\partial_x) u(t; x), \quad (t; x) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{3}$$

– параболічне за Шиловим на множині $\Pi_{[0;T]}$ з показником параболічності h, $0 < h \le p$, і родом $\mu < 0$, а порядок p_1 групи молодших членів рівняння (2) менший за h: $0 \le p_1 < h$.

Нагадаємо, що рівняння (3) на множині $\Pi_{[0;T]}$ називається параболічним за Шиловим, або $\{p,h\}$-параболічним, якщо

$$\exists \delta_0 > 0 \ \exists \delta \ge 0 \ \forall (t;\xi) \in \Pi_{[0;T]} : \ \ \mathrm{Re} A_0(t;\xi) \le -\delta_0 \|\xi\|^h + \delta.$$

Для $\{p,h\}$-параболічного рівняння (3) згідно з теоремами типу Фрагмена-Ліндельофа [25] існує область

$$\mathbb{K}_\nu = \{\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}^n : \|\eta\| \le K(1 + \|\xi\|)^\nu\}$$

із ν з $[1-(p-h);1]$ і додатною сталою K, в якій

$$\mathrm{Re} A_0(t;\zeta) \le -\delta_0 \|\xi\|^h + \delta, \quad t \in (0;T]. \tag{4}$$

Родом μ $\{p,h\}$-параболічного рівняння (3) називається точна верхня межа індексів ν, з якими в області $\mathbb{K}_\nu$ виконується оцінка (4).

ФГЗК для $\{p,h\}$-параболічного рівняння (3) позначимо через G:

$$G(t,\tau;x) = F^{-1}[\theta_\tau^t(\xi)](t,\tau;x),$$

де

$$\theta_\tau^t(\xi) = e^{\int_\tau^t A_0(\beta;\xi)d\beta}.$$

Правильне наступне твердження [24].

Теорема 1. *Нехай рівняння* (3) $\{p,h\}$*-параболічне з від'ємним родом* μ, *а* $l \ge 0$ *і* $\alpha \ge 0$ *– довільно фіксовані числа такі, що* $l \le 1 + \alpha h$ *і* $(\alpha h - l)\mu \ge \alpha h$, *тоді*

$$\exists \{c,\delta,A,B\} \subset (0;+\infty) \ \ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \ \ \forall q \in \mathbb{Z}_+ \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ \ \forall \tau \in [0;T) \ \ \forall t \in (\tau;T] :$$

$$|\partial_x^k G(t,\tau;x)| \le \frac{cA^q B^{|k|}}{\|x\|^q} q^{(1-\frac{\mu}{h})q} k^{\frac{k}{h}} (t-\tau)^{\frac{(l+\mu)q-n-|k|}{h}} e^{-\delta\left(\frac{|x_1|+\ldots+|x_n|}{(t-\tau)^{(l+\mu)/h}}\right)^{\frac{1}{1-\mu/h}}}. \tag{5}$$

Зазначимо, що оцінки Житомирського (1) для випадку $\mu < 0$ випливають безпосередньо з (5) при $q = 0$, $l = 0$ і $\alpha = 0$.

Поклавши $l = 1 + \alpha h$, $(\alpha h - l)\mu = \alpha h$, $q = 0$ і врахувавши співвідношення

$$(|x_1| + \ldots + |x_n|)^\lambda \ge (|x_1|^\lambda + \ldots + |x_n|^\lambda)/n \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall \lambda > 0),$$

з теореми 1 приходимо до такого твердження.

Наслідок 1. *Для* $\{p,h\}$*-параболічного рівняння* (3) *з родом* $\mu < 0$ *існують додатні сталі* c, B *і* δ *такі, що для всіх* $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in [0;T)$ *і* $t \in (\tau;T]$ *виконується оцінка*

$$|\partial_x^k G(t,\tau;x)| \le cB^{|k|} k^{\frac{k}{h}} (t-\tau)^{-\frac{n+|k|}{h}} e^{-\delta \frac{\widetilde{|x|}^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}} \tag{6}$$

(*тут* $\widetilde{|x|}^\lambda := |x_1|^\lambda + \ldots + |x_n|^\lambda$, $\lambda := \frac{1}{1-\mu/h}$ *і* $\gamma := \frac{1}{h-\mu}$).

Означення. *ФГЗК для рівняння* (2) *назвемо функцію* $Z(t,x;\tau,\xi)$, *визначену на* Π_T^2 *таку, що:*

1) Z *як функція* $(t;x)$ *задовольняє рівняння* (2) *на множині* $\Pi_{(\tau;T]}$, $\tau \in [0;T)$*;*

2) виконується граничне співвідношення

$$Z(t,x;\tau,\cdot) \underset{t\to\tau+0}{\longrightarrow} \delta(\cdot - x)$$

у розумінні слабкої збіжності в просторі $\mathbb{S}'$ *(тут* $\delta(\cdot)$ *– дельта-функція Дірака).*

Надалі нам знадобляться наступні оцінки [18]:

$$e^{-\delta\left\{\frac{|x-y|^\lambda}{(t-\beta)^\gamma}+\frac{|y-\xi|^\lambda}{(\beta-\tau)^\gamma}\right\}} \le e^{-\delta\frac{|x-\xi|^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}}; \tag{7}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{-\gamma/\lambda} e^{-\delta\left\{\frac{|x-y|^\lambda}{(t-\beta)^\gamma}+\frac{|y-\xi|^\lambda}{(\beta-\tau)^\gamma}\right\}}dy \le c_\varepsilon (t-\tau)^{-\gamma/\lambda} e^{-\delta(1-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}}, \tag{8}$$

які виконуються для всіх $\{x,y,\xi\}\subset\mathbb{R}$, $\beta\in(\tau;t)$, $0\le\tau<t\le T$ і $\varepsilon\in(0;1)$, причому величина c_ε залежить лише від ε.

2 Повторні ядра ФГЗК

ФГЗК для рівняння (2) доцільно будувати у вигляді

$$Z(t,x;\tau,\xi) = G(t,\tau;x-\xi) + \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy \equiv$$

$$\equiv G(t,\tau;x-\xi) + W(t,x;\tau,\xi), \tag{9}$$

де G – ФГЗК для рівняння (3), а Φ – деяка функція, яку слід вибирати так, щоб Z стосовно змінних $(t;x)$ була розв'язком рівняння (2). Згідно з означенням розв'язку диференціального рівняння, легко переконуємось у тому, що ця функція задовольняє інтегральне рівняння

$$\Phi(t,x;\tau,\xi) = K(t,x;\tau,\xi) + \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\beta,y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy, \tag{10}$$

в якому

$$K(t,x;\tau,\xi) = A_1(t,x;i\partial_x)G(t,\tau;x-\xi).$$

Розв'язуючи зазначене рівняння методом послідовних наближень, одержимо такий його формальний розв'язок:

$$\Phi(t,x;\tau,\xi) = \sum_{l=1}^{\infty} K_l(t,x;\tau,\xi), \tag{11}$$

де $K_1 = K$, а

$$K_l(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,y) K_{l-1}(\beta,y;\tau,\xi)dy, \quad l > 1.$$

Для встановлення збіжності ряду (11) та обґрунтування коректності здійснених раніше перетворень, дослідимо спочатку властивості повторних ядер K_l.

Оскільки

$$|\partial_x^q \partial_\xi^r K_1(t,x;\tau,\xi)| = \left| \sum_{|k|\le p_1} \left(\sum_{\hat{q}=0}^{q} C_q^{\hat{q}} \big(\partial_x^{\hat{q}} a_{1,k}(t;x)\big)\big(\partial_{x-\xi}^{k+r+q-\hat{q}} G(t,\tau;x-\xi)\big)\right)\right|, \ \ \{q,r\} \in \mathbb{Z}_+^n,$$

де $C_q^{\hat{q}} := \prod\limits_{j=1}^{n} C_{q_j}^{\hat{q}_j}$ – біноміальний коефіцієнт, то скориставшись обмеженістю $\partial_x^{\hat{q}} a_{1,k}$ та оцінкою (6), одержимо

$$|\partial_x^q \partial_\xi^r K_1(t,x;\tau,\xi)| \le c_{q,r}(t-\tau)^{-\frac{n+p_1+|q+r|}{h}} e^{-\delta \widetilde{\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^\gamma}}^{\lambda}}, \quad \{q,r\} \in \mathbb{Z}_+^n, \ (t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2, \tag{12}$$

(тут оціночні величини $c_{q,r}$, δ не залежать від t, τ, x і ξ, а δ – ще й від q та r).

При $l > 1$ користуватимемося очевидним зображенням

$$K_l(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,\eta+\xi) K_{l-1}(\beta,\eta+\xi;\tau,\xi)d\eta +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,x-z) K_{l-1}(\beta,x-z;\tau,\xi)dz, \ t_1 := \tau + (t-\tau)/2,$$

згідно з яким

$$\partial_x^q \partial_\xi^r K_l(t,x;\tau,\xi) = \sum_{\hat{r}=0}^{r} C_r^{\hat{r}} \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(\partial_\xi^{\hat{r}} \partial_x^q K_1(t,x;\beta,\eta+\xi)\big)\big(\partial_\xi^{r-\hat{r}} K_{l-1}(\beta,\eta+\xi;\tau,\xi)\big)d\eta +$$

$$+ \sum_{\hat{q}=0}^{q} C_q^{\hat{q}} \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(\partial_x^{\hat{q}} K_1(t,x;\beta,x-z)\big)\big(\partial_\xi^r \partial_x^{q-\hat{q}} K_{l-1}(\beta,x-z;\tau,\xi)\big)dz. \tag{13}$$

Таким чином, оцінювання $|\partial_x^q \partial_\xi^r K_l(t,x;\tau,\xi)|$ зводиться до оцінювання виразів

$$|\partial_\xi^r \partial_x^q K_1(t,x;\tau,\eta+\xi)|, \ |\partial_x^q K_1(t,x;\tau,x-z)|, \ |\partial_\xi^r \partial_x^q K_{l-1}(t,x-z;\tau,\xi)|, \ |\partial_\xi^r K_{l-1}(t,\eta+\xi;\tau,\xi)|.$$

Урахувавши обмеженість похідних коефіцієнтів $a_{1,k}(t;\cdot)$ рівняння (2) та оцінку (6), для всіх $\{q,r\} \in \mathbb{Z}_+^n$, $\{x,\eta,\xi\} \in \mathbb{R}^n$, $t \in (\tau;T]$ і $\tau \in [0;T)$ маємо:

$$\big|\partial_\xi^r \partial_x^q K_1(t,x;\tau,\eta+\xi)\big| \le \sum_{|k|\le p_1} \sum_{\hat{q}=0}^{q} C_q^{\hat{q}} \big|\partial_x^{\hat{q}} a_{1,k}(t;x)\big| \big|\partial_{x-\eta-\xi}^{k+r+q-\hat{q}} G(t,\tau;x-\eta-\xi)\big| \le$$

$$\leq c_{r,q}(t-\tau)^{-\frac{n+p_1+|r+q|}{h}} e^{-\delta \frac{\widetilde{|x-\eta-\xi|}^{\lambda}}{(t-\tau)^{\gamma}}}; \tag{14}$$

$$\left|\partial_x^q K_1(t,x;\tau,x-\xi)\right| = \left|\partial_x^q a_{1,0}(t;x) G(t,\tau;\xi)\right| \leq \widehat{c}_q (t-\tau)^{-\frac{n}{h}} e^{-\delta \frac{\widetilde{|\xi|}^{\lambda}}{(t-\tau)^{\gamma}}}. \tag{15}$$

Перейдемо до оцінювання виразу $\left|\partial_\xi^r K_l(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right|$.

Зваживши на рівність $\partial_{\eta+\xi}^k G(t,\tau;\eta) = \partial_\eta^k G(t,\tau;\eta)$, при $l=1$ одержуємо, що

$$\left|\partial_\xi^r K_1(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right| \leq \sum_{|k|\leq p_1} \left|\partial_\xi^r a_{1,k}(t;\eta+\xi) \partial_\eta^k G(t,\tau;\eta)\right| \leq c_{1,r}(t-\tau)^{-\frac{n+p_1}{h}} e^{-\delta \frac{\widetilde{|\eta|}^{\lambda}}{(t-\tau)^{\gamma}}}. \tag{16}$$

Далі, оскільки

$$\partial_\xi^r K_2(t,\eta+\xi;\tau,\xi) = \partial_\xi^r \Bigg(\int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t,\eta+\xi;\beta,y) K_1(\beta,y;\tau,\xi) dy \Bigg),$$

то здійснивши в останньому інтегралі заміну змінної інтегрування за правилом $y = z+\xi$, відтак урахувавши оцінки (16), (8) та рівність

$$\partial_\xi^r K_1(t,\eta+\xi;\tau,z+\xi) = \partial_\zeta^r K_1(t,\eta-z+\zeta;\tau,\zeta)\Big|_{\zeta=z+\xi},$$

дістанемо

$$\left|\partial_\xi^r K_2(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right| \leq \sum_{\hat{r}=0}^{r} C_r^{\hat{r}} \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \left|\partial_\xi^{\hat{r}} K_1(t,\eta+\xi;\beta,z+\xi) \partial_\xi^{r-\hat{r}} K_1(\beta,z+\xi;\tau,\xi)\right| dz \leq$$

$$\leq c_r \int_\tau^t \big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{-\frac{n+p_1}{h}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta\left(\frac{\widetilde{|\eta-z|}^{\lambda}}{(t-\beta)^{\gamma}} + \frac{\widetilde{|z|}^{\lambda}}{(\beta-\tau)^{\gamma}}\right)} dz d\beta \leq$$

$$\leq c_{2,r}(\varepsilon)(t-\tau)^{-\frac{n}{h}} e^{-\delta(1-\varepsilon)\frac{\widetilde{|z|}^{\lambda}}{(t-\tau)^{\gamma}}} \int_\tau^t \big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{-\frac{p_1}{h}} d\beta.$$

Зазначимо, що підінтегральна функція в останньому інтегралі має особливість у кожній із меж інтегрування; однак, з огляду на те, що $p_1 < h$, ця особливість є інтегровною. Оскільки

$$\int_\tau^t \big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{-\frac{p_1}{h}} d\beta = (t-\tau)^{2\gamma_0-1} B(\gamma_0,\gamma_0),$$

де $\gamma_0 := 1 - \frac{p_1}{h} > 0$, а $B(\cdot,\cdot)$ – бета-функція Ейлера, то

$$\left|\partial_\xi^r K_2(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right| \leq c_{2,r}(\varepsilon) B(\gamma_0,\gamma_0)(t-\tau)^{\gamma_0-\frac{n+p_1}{h}} e^{-\delta(1-\varepsilon)\frac{\widetilde{|z|}^{\lambda}}{(t-\tau)^{\gamma}}}, \quad (t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2.$$

Продовжуючи крок за кроком аналогічні роздуми, прийдемо до нерівностей

$$\left|\partial_\xi^r K_l(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right| \leq c_{l,r}(\varepsilon)(t-\tau)^{(l-1)\gamma_0-\frac{n+p_1}{h}} e^{-\delta(1-(l-1)\varepsilon)\frac{\widetilde{|z|}^{\lambda}}{(t-\tau)^{\gamma}}} \prod_{j=1}^{l-1} B(\gamma_0, j\gamma_0), \tag{17}$$

які виконуються для всіх $\{\eta,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $r\in\mathbb{Z}_+^n$, $t\in(\tau;T]$, $\tau\in[0;T)$, $\varepsilon\in(0;1)$ і $l\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, а, відтак і до існування такого номера l_*, при якому

$$\left|\partial_\xi^r K_{l_*}(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right|\le c_{l_*,r}(\varepsilon)e^{-\delta(1-(l_*-1)\varepsilon)\frac{\widetilde{|z|}^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}}\prod_{j=1}^{l_*-1}B(\gamma_0,j\gamma_0) \tag{18}$$

(тут величина $c_{l,r}(\varepsilon)>0$ не залежить від змінних t,τ,η і ξ).

Оскільки

$$\partial_\xi^r\partial_x^q K_l(t,x;\tau,\eta+\xi)=\partial_\zeta^r\partial_x^q K_l(t,x;\tau,\zeta)\big|_{\zeta=\eta+\xi},\ \partial_\xi^r\partial_x^q K_l(t,x-z;\tau,\xi)=\partial_\xi^r\partial_y^q K_l(t,y;\tau,\xi)\big|_{y=x-z},$$

то вирази $\partial_\xi^r\partial_x^q K_l(t,x;\tau,\eta+\xi),\partial_\xi^r\partial_x^q K_l(t,x-z;\tau,\xi)$ і $\partial_\xi^r\partial_x^q K_l(t,x;\tau,\xi)$ є однотипними. Тому з огляду на зображення (13) та на одержані оцінки (14), (15), (17) і (8), маємо

$$\left|\partial_\xi^r\partial_x^q K_2(t,x;\tau,\xi)\right|\le c_2^{r,q}\Big(\sum_{\hat r=0}^{r}\int_\tau^{t_1}(t-\beta)^{-\frac{n+p_1+|\hat r+q|}{h}}(\beta-\tau)^{-\frac{n+p_1}{h}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\delta\left(\frac{\widetilde{|x-\eta-\xi|}^\lambda}{(t-\beta)^\gamma}+\frac{\widetilde{|\eta|}^\lambda}{(\beta-\tau)^\gamma}\right)}d\eta d\beta+$$

$$+\sum_{\hat q=0}^{q}\int_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-\frac{n+p_1}{h}}(\beta-\tau)^{-\frac{n+p_1+|r+q-\hat q|}{h}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\delta\left(\frac{\widetilde{|z|}^\lambda}{(t-\beta)^\gamma}+\frac{\widetilde{|x-z-\xi|}^\lambda}{(\beta-\tau)^\gamma}\right)}dzd\beta\Big)\le$$

$$\le c_{2,\xi}^{r,q}B(\gamma_0,\gamma_0)(t-\tau)^{2\gamma_0-\left(1+\frac{n+|r+q|}{h}\right)}e^{-\delta(1-\varepsilon)\frac{\widetilde{|x-\xi|}^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}},\quad (t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2,\ \{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n,\ \varepsilon\in(0;1).$$

Продовжуючи за аналогією процес оцінювання, одержимо

$$\left|\partial_\xi^r\partial_x^q K_l(t,x;\tau,\xi)\right|\le c_{l,\varepsilon}^{r,q}(t-\tau)^{l\gamma_0-\left(1+\frac{n+|r+q|}{h}\right)}e^{-\delta(1-(l-1)\varepsilon)\frac{\widetilde{|x-\xi|}^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}}\prod_{j=1}^{l-1}B(\gamma_0,j\gamma_0), \tag{19}$$

для всіх $\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $0\le\tau<t\le T$, $\varepsilon\in(0;1)$ і $l\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Перейдемо тепер до знаходження оцінок виразу $\left|\partial_\xi^r\partial_x^q K_l(t,x;\tau,\xi)\right|$, придатних для встановлення диференційовності функції Φ за просторовими змінними. Безпосередньо з (19) приходимо до існування такого номера l^*, при якому

$$\left|\partial_\xi^r\partial_x^q K_{l^*}(t,x;\tau,\xi)\right|\le c_{l^*,\varepsilon}^{r,q}e^{-\delta(1-(l^*-1)\varepsilon)\frac{\widetilde{|x-\xi|}^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}}\prod_{j=1}^{l^*-1}B(\gamma_0,j\gamma_0),\ \{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n,(t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2.$$

Поклавши тут $l^\circ:=\max\{l_*,l^*\}$, $l_\circ:=\min\{l_*,l^*\}$, де l_* - відповідний номер із (18), $\varepsilon:=(r_*l^\circ)^{-1}$, $\delta_*:=\delta\big(1-1/r_*\big)$, $r_*>2$, $T_0:=\max\{1,T\}$, а також

$$c_*^0:=\max_{l\in\mathbb{N}_{l^\circ}\setminus\{1\}}\Big\{c_{1,r};c_{l,r}(\varepsilon)\prod_{j=1}^{l-1}B(\gamma_0,j\gamma_0);c_{r,q};c_{l,\varepsilon}^{r,q}\prod_{j=1}^{l-1}B(\gamma_0,j\gamma_0)\Big\},\ c_*:=c_*^0(T_0)^{l^\circ-l_\circ},$$

із (17) і (19) одержуємо, що для всіх $\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n,\{x,\xi,\eta\}\subset\mathbb{R}^n$ і $0\le\tau<t\le T$

$$\left|\partial_\xi^r K_{l^\circ}(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right|\le c_*e^{-\delta_*\frac{\widetilde{|\eta|}^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}},\quad \left|\partial_\xi^r\partial_x^q K_{l^\circ}(t,x;\tau,\xi)\right|\le c_*e^{-\delta_*\frac{\widetilde{|x-\xi|}^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}}. \tag{20}$$

Звідси, зваживши на оцінку (7) та рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta}{r_*}\frac{\widetilde{|\eta-z|}^\lambda}{(t-\beta)^\gamma}}\frac{dz}{(t-\beta)^{n/h}}=\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta}{r_*}\widetilde{|\zeta|}^\lambda}d\zeta=:E,$$

а також урахувавши зображення (13) та нерівності (14) і (15), одержуємо:

$$\big|\partial_\xi^r K_{l^\circ+1}(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\big|\le\sum_{\hat r=0}^{r}C_r^{\hat r}\int\limits_\tau^t d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big|\partial_\xi^{\hat r}K_1(t,\eta+\xi;\beta,z+\xi)\partial_\xi^{r-\hat r}K_{l^\circ}(\beta,z+\xi;\tau,\xi)\big|dz\le$$

$$\le c_*^2 2^{|r|}\int\limits_\tau^t(t-\beta)^{\gamma_0-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-\delta_*\left(\frac{\widetilde{|\eta-z|}^\lambda}{(t-\beta)^\gamma}+\frac{\widetilde{|z|}^\lambda}{(\beta-\tau)^\gamma}\right)}e^{-\frac{\delta}{r_*}\frac{\widetilde{|\eta-z|}^\lambda}{(t-\beta)^\gamma}}\frac{dz}{(t-\beta)^{n/h}}d\beta\le$$

$$\le Ec_*^2 2^{|r|}(t-\tau)^{\gamma_0}e^{-\delta_*\frac{\widetilde{|\eta|}^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}}B(\gamma_0,1);$$

$$\big|\partial_\xi^r\partial_x^q K_{l^\circ+1}(t,x;\tau,\xi)\big|\le\sum_{\hat r=0}^{r}C_r^{\hat r}\int\limits_\tau^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big|\partial_\xi^{\hat r}\partial_x^q K_1(t,x;\beta,\eta+\xi)\partial_\xi^{r-\hat r}K_{l^\circ}(\beta,\eta+\xi;\tau,\xi)\big|d\eta+$$

$$+\sum_{\hat q=0}^{q}C_q^{\hat q}\int\limits_{t_1}^t d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big|\partial_x^{\hat q}K_1(t,x;\beta,x-z)\partial_\xi^r\partial_x^{q-\hat q}K_{l^\circ}(\beta,x-z;\tau,\xi)\big|dz\le$$

$$\le c_*^2\Big(\sum_{\hat r=0}^{r}C_r^{\hat r}\int\limits_\tau^{t_1}(t-\beta)^{-\frac{p_1+|\hat r+q|}{h}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-\delta_*\left(\frac{\widetilde{|x-\eta-\xi|}^\lambda}{(t-\beta)^\gamma}+\frac{\widetilde{|\eta|}^\lambda}{(\beta-\tau)^\gamma}\right)}e^{-\frac{\delta}{r_*}\frac{\widetilde{|x-\eta-\xi|}^\lambda}{(t-\beta)^\gamma}}\frac{d\eta}{(t-\beta)^{n/h}}d\beta+$$

$$+\sum_{\hat q=0}^{q}C_q^{\hat q}\int\limits_{t_1}^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-\delta_*\left(\frac{\widetilde{|z|}^\lambda}{(t-\beta)^\gamma}+\frac{\widetilde{|x-z-\xi|}^\lambda}{(\beta-\tau)^\gamma}\right)}e^{-\frac{\delta}{r_*}\frac{\widetilde{|z|}^\lambda}{(t-\beta)^\gamma}}\frac{dz}{(t-\beta)^{n/h}}d\beta\Big)\le$$

$$\le Ec_*^2e^{-\delta_*\frac{\widetilde{|x-\xi|}^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}}\int\limits_\tau^t(t-\beta)^{\gamma_0-1}d\beta\Big(\sum_{\hat r=0}^{r}C_r^{\hat r}(t-t_1)^{-\frac{|\hat r+q|}{h}}+2^{|q|}(t-t_1)^{1-\gamma_0}\Big)\le$$

$$\le Ec_*^2 2^{|q|+1}(2^hT_0)^{\frac{p_1+|r+q|}{h}}(t-\tau)^{\gamma_0-\frac{|r+q|}{h}}e^{-\delta_*\frac{\widetilde{|x-\xi|}^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}}B(\gamma_0,1).$$

Застосовуючи далі метод математичної індукції, переконуємося спочатку у правильності оцінок

$$\big|\partial_\xi^r K_{l^\circ+l}(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\big|\le c_*(Ec_*^2 2^{|r|}(t-\tau)^{\gamma_0})^l e^{-\delta_*\frac{\widetilde{|\eta|}^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}}\prod_{j=0}^{l-1}B(\gamma_0,1+j\gamma_0),\tag{21}$$

а, відтак і оцінок

$$\big|\partial_\xi^r\partial_x^q K_{l^\circ+l}(t,x;\tau,\xi)\big|\le c_*\big(Ec_*^2 2^{|q|+1}(2^hT_0)^{\frac{p_1+|r+q|}{h}}\big)^l(t-\tau)^{l\gamma_0-\frac{|r+q|}{h}}e^{-\delta_*\frac{\widetilde{|x-\xi|}^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}}\prod_{j=0}^{l-1}B(\gamma_0,1+j\gamma_0),\tag{22}$$

при $\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n$, $(t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2$ і $l\in\mathbb{N}$.

Встановлені оцінки похідних повторних ядер дозволяють сформулювати таке твердження про густину Φ об'ємного потенціалу W.

Теорема 2. *Функційний ряд (11) абсолютно збігається на множині Π_T^2. Його сума $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ на цій множині є нескінченно диференційовною функцією за кожною просторовою змінною x і ξ, для похідних якої правильні наступні оцінки:*

$$\left|\partial_\xi^r\partial_x^q\Phi(t,x;\tau,\xi)\right|\le c_1(t-\tau)^{-\frac{n+p_1+|r+q|}{h}}e^{-\delta_*\frac{\widetilde{|x-\xi|}^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}},\quad (t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2, \tag{23}$$

$$\left|\partial_\xi^r\Phi(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right|\le c_2(t-\tau)^{-\frac{n+p_1}{h}}e^{-\delta_*\frac{\widetilde{|\eta|}^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}},\quad 0\le\tau<t\le T,\ \{\eta,\xi\}\subset\mathbb{R}^n \tag{24}$$

(тут $\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n$, а оціночні величини c_1,c_2 і δ_* не залежать від t,τ,x,ξ та η при цьому, δ_* – ще й від r і q).

Доведення. Скориставшись оцінками (19), (20) і (22), а також, рівністю

$$\prod_{j=0}^{l-1}B(\gamma_0,1+j\gamma_0)=\frac{\Gamma^l(\gamma_0)}{\Gamma(1+l\gamma_0)},$$

в якій $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функція Ейлера, знаходимо:

$$|\Phi(t,x;\tau,\xi)|\le c(t-\tau)^{\gamma_0-\left(1+\frac{n}{h}\right)}e^{-\delta_*\frac{\widetilde{|x-\xi|}^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A^l}{\Gamma(1+l\gamma_0)},\quad (t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2.$$

Звідси, врахувавши збіжність числового ряду, дістаємо абсолютну збіжність ряду (11) на множині Π_T^2.

Зафіксуємо довільно т. $(x_0;\xi_0)$ із $\mathbb{R}^{2n}$ і розглянемо кулю $\mathbb{K}_\delta(x_0;\xi_0)$ радіуса $\delta>0$ з центром у цій точці. Для нескінченної диференційовності функції Φ у т. $(x_0;\xi_0)$ досить при фіксованих $\tau\in[0;T)$ і $t\in(\tau;T]$ установити рівномірну збіжність у $\mathbb{K}_\delta(x_0;\xi_0)$ формально продиференційованого ряду (11):

$$\sum_{l=1}^{\infty}\partial_\xi^r\partial_x^qK_l(t,x;\tau,\xi)\quad(\forall\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n).$$

Проте ця збіжність стає очевидною, якщо зважити на оцінки (19), (20) і (22).

Далі, ще раз скориставшись оцінками (19), (20) і (22), для $\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n$ і $(t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2$ дістаємо:

$$\left|\sum_{l=1}^{\infty}\partial_\xi^r\partial_x^qK_l(t,x;\tau,\xi)\right|\le\sum_{l=1}^{l^\circ}\left|\partial_\xi^r\partial_x^qK_l(t,x;\tau,\xi)\right|+\sum_{l=l^\circ+1}^{\infty}\left|\partial_\xi^r\partial_x^qK_l(t,x;\tau,\xi)\right|\le$$

$$\le c_*e^{-\delta_*\frac{\widetilde{|x-\xi|}^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}}\left(\sum_{l=1}^{l^\circ}(t-\tau)^{l\gamma_0-\left(1+\frac{n+|r+q|}{h}\right)}+\sum_{l=1}^{\infty}\left(Ec_*^22^{|q|+1}(2^hT_0)^{\frac{p_1+|r+q|}{h}}\right)^l(t-\tau)^{l\gamma_0-\frac{|r+q|}{h}}\times\right.$$

$$\times\prod_{j=0}^{l-1}B(\gamma_0,1+j\gamma_0)\Big)\le c_1(t-\tau)^{\gamma_0-\left(1+\frac{n+|r+q|}{h}\right)}e^{-\delta_*\widetilde{\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^\gamma}}^\lambda}.$$

Отже, виконання оцінки (23) встановлено.

Аналогічним способом, завдяки відповідним оцінкам (17), (20) і (21), переконуємось у правильності оцінки (24). □

Наслідок 2. *Функція* Φ, *що визначається рівністю* (11), *– звичайний розв'язок інтегрального рівняння* (10).

Зазначимо також, що твердження теореми 2 разом із оцінкою (6) забезпечують для всіх $(t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2$ абсолютну збіжність інтеграла, яким визначається потенціал W з рівності (9). Таким чином, функція $Z(t,x;\tau,\xi)$ коректно визначена формулою (9) на всій множині Π_T^2.

Список літератури

[1] Шилов Г.Е. *Об условиях корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами* Успехи матем. наук. 1955, **10** (4), 89–100.

[2] Гельфанд И.М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.

[3] Житомирский Я.И. *Задача Коши для некоторых типов параболических по Г.Е. Шилову систем линейных уравнений в частных производных с непрерывными коэффициентами* Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959, **23**, 925–932.

[4] У Хоу–синь *Об определении параболичности систем уравнений в частных производных* Успехи матем. наук. 1960, **15** (6), 157–161.

[5] Эйдельман С.Д., Ивасишен С.Д., Порпер Ф.О. *Теоремы Лиувилля для параболических в смысле Шилова систем* Изв. вузов. Математика. 1961, (6), 169–179.

[6] Городецкий В.В. *Некоторые теоремы о стабилизации решений задачи Коши для параболических по Шилову систем в классах обобщенных функций* Укр. мат. журн. 1988, **40** (1), 43–48.

[7] Городецкий В.В. *Задача Коши для параболических по Шилову уравнений в классах обобщенных периодических функций* Изв. вузов. Математика. 1988, (5), 82–84.

[8] Литовченко В.А. *Задача Коши для параболических по Шилову уравнений* Сиб. матем. журн. 2004, **45** (4), 809–821. doi: 10.1023/B:SIMJ.0000035831.63036.bb

[9] V. Litovchenko *Cauchy problem for* $\{\overrightarrow{p};\overrightarrow{h}\}$*-parabolic equations with time-dependent coefficients* Math. Notes. 2005, **77** (3-4), 364–379. doi: 10.1007/s11006-005-0036-9

[10] Q. Zheng *Matrices of operators and regularized cosine functions* Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2006, **315** (1), 68–75.

[11] M. Kostic *Shilov Parabolic Systems* Bulletin (Academie serbe des sciences et des arts. Classe des sciences mathematiques et naturelles. Sciences mathematiques). 2012, **37**, 19–39.

[12] I.M. Dovzhytska *Cauchy problem for inhomogeneous parabolic Shilov equations* Carpathian Math. Publ. 2021, **13** (2), 475–484. doi:10.15330/cmp.13.2.475-484

[13] G. Unguryan *Modified Cauchy Problem with Impulse Action for Parabolic Shilov Equations* International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2021, **2021**, 1–10. https://doi.org/10.1155/2021/5539676

[14] Г.М. Унгурян *Нелокальна задача з імпульсною дією для параболічних рівнянь векторного порядку* Укр. мат. журн. 2021, **73** (11), 1532–1540. doi:10.37863/umzh.v73i11.6521

[15] Petrowsky I.G. *Über das Cauchyche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen* Матем. сб. 1937, **2** (5), 815–870.

[16] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.

[17] Эйдельман С.Д. Параболические системы. М.: Наука, 1964.

[18] Litovchenko V.A., Dovzhitska I.M. *The fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem for a class of parabolic systems of the Shilov type with variable coefficients* J. Math. Sci. 2011, **175** (4), 450–476. doi: 10.1007/s10958-011-0356-0

[19] V. Litovchenko and I. Dovzhytska *Cauchy problem for a class of parabolic systems of Shilov type with variable coefficients* Cent. Eur. J. Math. 2012, **10** (3), 1084–1102. doi: 10.2478/s11533-012-0025-7

[20] Литовченко В.А., Довжицкая И.М. *Стабилизация решений параболических типа Шилова систем с неотрицательным родом* Сиб. матем. журн. 2014, **55** (2), 341–349. https://doi.org/10.1134/S0037446614020104

[21] Литовченко В.А., Унгурян Г.М. *Сопряженная задача Коши для параболических типа Шилова систем с неотрицательным родом* Дифф. уравн. 2018, **54** (3), 341–357. https://doi.org/10.1134/S0012266118030060

[22] V. Litovchenko and G. Unguryan *Some properties of Green's functions of Shilov-type parabolic systems* Miskolc Math. Notes. 2019, **20** (1), 365–379. doi: 10.18514/MMN.2019.2089

[23] Літовченко В.А. Системи Шилова у просторах типи S і S‘. Чернівці: ЧНУ, 2019. ISBN: 978-966-423-520-1

[24] Litovchenko V.A. Peculiarities of the Fundamental Solution of Parabolic Systems with a Negative Genus: Chapter of the monograph. Advances in the Solution of Nonlinear Differential Equations: IntelOpen-London, 2021. DOI: 10.5772/intechopen.92489; ISBN: 978-1-83968-657-3

[25] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958.

Список літератури

[1] Shilov G.E. *On conditions of correctness of Cauchy's problem for systems of partial differential equations with constant coefficients* Uspekhi Mat. Nauk. 1955, **10** (4), 89–100. (in Russian)

[2] I. Gel'fand and G. Shilov Generalized Functions. Vol. 3. Theory of Differential Equations. Boston, MA: Academic Press, 1967.

[3] Zhitomirskii Ya.I. *Cauchy problem for some types of systems of linear equations, which are parabolic by G.E. Shilov, with partial derivatives with continuous coefficients* Izv. AN SSSR. Ser. Mat. 1959, **23**, 925–932. (in Russian)

[4] U. Hou-Sin *On the definition of parabolicity of systems of equations with partial derivatives* Uspekhi Mat. Nauk. 1960, **15** (6), 157–161. (in Russian)

[5] S.D. Eidelman, S.D. Ivasishen, and F.O. Porper *The Liouville theorems for systems parabolic by Shilov* Izv. Vyzov. Mat. 1961, (6), 169–179. (in Russian)

[6] Gorodetskii V.V. *Some theorems on the stabilization of solutions of the Cauchy problem for Shilov parabolic systems in classes of generalized functions* Ukr. Math. J. 1988, **40** (1), 43–48. (in Russian)

[7] Gorodetskii V.V. *Cauchy's problem for Shilov parabolic equations in classes of generalized periodic functions* Izv. Vyzov. Mat. 1988, (5), 82–84. (in Russian)

[8] V. Litovchenko *The Cauchy problem for parabolic equations by Shilov* Siber. Mat. Zh. 2004, **45** (4), 809–821. doi: 10.1023/B:SIMJ.0000035831.63036.bb

[9] V. Litovchenko *Cauchy problem for* $\{\overrightarrow{p}; \overrightarrow{h}\}$*-parabolic equations with time-dependent coefficients* Math. Notes. 2005, **77** (3-4), 364–379. doi: 10.1007/s11006-005-0036-9

[10] Q. Zheng *Matrices of operators and regularized cosine functions* Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2006, **315** (1), 68–75.

[11] M. Kostic *Shilov Parabolic Systems* Bulletin (Academie serbe des sciences et des arts. Classe des sciences mathematiques et naturelles. Sciences mathematiques). 2012, **37**, 19–39.

[12] I.M. Dovzhytska *Cauchy problem for inhomogeneous parabolic Shilov equations* Carpathian Math. Publ. 2021, **13** (2), 475–484. doi:10.15330/cmp.13.2.475-484

[13] G. Unguryan *Modified Cauchy Problem with Impulse Action for Parabolic Shilov Equations* International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2021, **2021**, 1–10. https://doi.org/10.1155/2021/5539676

[14] G. Unguryan *Nonlocal problem with impulse action for parabolic equations of vector order* Ukr. Math. J. 2021, **73** (11), 1532–1540. doi:10.37863/umzh.v73i11.6521. (in Ukrainian)

[15] Petrowsky I.G. *Über das Cauchyche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen* Mat. Sb. 1937, **2** (5), 815–870. (in Russian)

[16] Friedman A. Partial Differential Equations of Parabolic Type. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964.

[17] Eidelman S.D. Parabolic Systems. North-Holland, Amsterdam, 1969.

[18] Litovchenko V.A., Dovzhitska I.M. *The fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem for a class of parabolic systems of the Shilov type with variable coefficients* J. Math. Sci. 2011, **175** (4), 450–476. doi: 10.1007/s10958-011-0356-0

[19] V. Litovchenko and I. Dovzhytska *Cauchy problem for a class of parabolic systems of Shilov type with variable coefficients* Cent. Eur. J. Math. 2012, **10** (3), 1084–1102. doi: 10.2478/s11533-012-0025-7

[20] Litovchenko V.A., Dovzhytska I.M. *Stabilization of solutions to Shilov-type parabolic systems with nonnegative genus* Siberian Math. J. 2014, **55** (2), 276–283. https://doi.org/10.1134/S0037446614020104

[21] Litovchenko V.A., Unguryan G.M. *Conjugate Cauchy Problem for Parabolic Shilov Type Systems with Nonnegative Genus* Diff. Equat. 2018, **54** (3), 341–357. https://doi.org/10.1134/S0012266118030060

[22] V. Litovchenko and G. Unguryan *Some properties of Green's functions of Shilov-type parabolic systems* Miskolc Math. Notes. 2019, **20** (1), 365–379. doi: 10.18514/MMN.2019.2089

[23] Litovchenko V.A. Shilov systems in spaces of types S and S'. Chernivtsi: ChNU, 2019. ISBN: 978-966-423-520-1. (in Ukrainian)

[24] Litovchenko V.A. Peculiarities of the Fundamental Solution of Parabolic Systems with a Negative Genus: Chapter of the monograph. Advances in the Solution of Nonlinear Differential Equations: IntelOpen-London, 2021. DOI: 10.5772/intechopen.92489; ISBN: 978-1-83968-657-3

[25] I. M. Gel'fand and G. E. Shilov Spaces of Basic and Generalized Functions. Moscow: Gos. Izd. Fiz. Mat. Lit., 1958. (in Russian)

Надійшло 04.10.2022

Litovchenko V.A., Kharyna D.D. *Repeated Kernels of the Green's Function of Parabolic Shilov Equations with Variable Coefficients and Negative Genus*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 1 (2022), 71–84.

The concept of parabolicity by Shilov generalizes the concept of parabolicity by Petrovsky of equations with partial derivatives and leads to a significant expansion of the known Petrovsky class with those parabolic equations, the order of which may not coincide with the parabolicity index. Generally speaking, such an extension deprives of the parabolic stability concerning the change of the coefficients of parabolic Shilov equations, which is inherent to the Petrovsky class equations. As a result, significant difficulties arise in the study of the Cauchy problem for parabolic Shilov equations with variable coefficients.

In the 60s of the last century, Y.I. Zhytomyrsky defined a special class of parabolic Shilov equations, which extends the Shilov class and at the same time is parabolically resistant to changes in the junior coefficients. For this class, by the method of successive approximations, he established the correct solvability of the Cauchy problem in the class of bounded initial functions of finite smoothness. However, to obtain more general results, it is important to know the Green's function of the Cauchy problem.

In this publication, for parabolic Shilov equations with bounded smooth variable coefficients and negative genus, estimates of repeated kernels of the Green's function of the Cauchy problem are established, which allow us to investigate the properties of the density of volume potential of this function. These results are important for the development of the Cauchy problem theory for parabolic Shilov equations by classical means of the Green's function.