Клевчук І.І., Гритчук М.В.

ПОБУДОВА ОБЛАСТЕЙ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ АВТОНОМНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ БАГАТЬМА ЗАПІЗНЕННЯМИ

Досліджено стійкість лінійних автономних диференціально-різницевих рівнянь. Побудовано області стійкості рівнянь із багатьма запізненнями. Використано принцип аргументу і метод D-розбиттів.

Ключові слова і фрази: диференціально-різницеве рівняння, область стійкості, принцип аргументу, D-розбиття.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

e-mail: *i.klevchuk@chnu.edu.ua*

Вступ

Дослідження стійкості розв'язків диференціально-різницевих рівнянь є важливою прикладною задачею. Необхідною і достатньою умовою асимптотичної стійкості розв'язків лінійних автономних систем диференціальних рівнянь із запізненням є від'ємність дійсних частин всіх коренів характеристичного квазіполінома [1 – 3]. Тому для знаходження області стійкості систем з багатьма запізненнями можна застосовувати амплітудно-фазовий метод, метод D-розбиттів, метод Меймана і Чеботарьова та ін.

Особливо простим є метод D-розбиттів, коли простір коефіцієнтів розбивається на області гіперплощинами, точкам яких відповідають квазіполіноми, що мають хоча б один нуль на уявній осі. Очевидно, що точкам кожної області такого D-розбиття відповідають квазіполіноми з однаковим числом нулів із додатною дійсною частиною. Якщо таких областей скінченне число, то неважко виділити серед них область стійкості. Але часто існує нескінченне число областей D-розбиття.

Тому доцільно спочатку за допомогою принципу аргументу знайти обмеження, які задовольняє область стійкості, а потім уже застосовувати метод D-розбиттів. Такі задачі досліджено, зокрема, в [4 – 8]. У цій статті доведено обмеженість області стійкості при наявності доданка без запізнення із фіксованим коефіцієнтом і побудовано області стійкості при різних відхиленнях аргументу.

УДК 517.9
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34K06, 34K20.

1. Основні результати

Розглянемо рівняння

$$\frac{dz}{dt} = cz(t) + a_1 z(t-1) + a_2 z(t-2) + ... + a_n z(t-n), \tag{1}$$

де коефіцієнти c, a_k, $1 \le k \le n$, дійсні, причому c – фіксоване.

Згідно з [1 – 3] для того, щоб нульовий розв'язок рівняння (1) був асимптотично стійким, необхідно і досить, щоб всі корені характеристичного рівняння

$$\lambda = c + a_1 e^{-\lambda} + a_2 e^{-2\lambda} + ... + a_n e^{-n\lambda} \tag{2}$$

лежали в лівій півплощині $Re\ \lambda < 0$.

Означення. *Областю стійкості рівняння (2) називається множина точок* $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, *для яких всі корені рівняння (2) задовольняють умову* $Re\ \lambda < 0$.

Нехай L – проста неперервна крива, на якій вказано напрямок руху. Через $\Delta Arg_{z\in L}$ $f(z)$ позначимо зміну аргументу функції $f(z)$ при русі вздовж кривої L.

Лема 1. *Нехай функції* $f(z)$ *та* $g(z)$ *аналітичні в комплексній площині і для точок* z *із деякої простої неперервної кривої* L *виконуються нерівності* $|g(z)| < |f(z)|$. *Тоді*

$$\Delta Arg_{z\in L}(f(z) + g(z)) \ge \Delta Arg_{z\in L}\ f(z) - \pi. \tag{3}$$

Доведення. Справджується рівність

$$\Delta Arg_{z\in L}(f(z) + g(z)) =$$

$$= \Delta Arg_{z\in L}\left[f(z)\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right)\right] = \Delta Arg_{z\in L} f(z) + \Delta Arg_{z\in L}\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right).$$

Оскільки $|g(z)/f(z)| < 1$, то функція $1 + g(z)/f(z)$ відображає криву L у внутрішність одиничного круга з центром в точці $z = 1$. Тому образ кривої L при відображенні $1 + g(z)/f(z)$ може змінити аргумент не більше, ніж на π. Із нерівності

$$\Delta Arg_{z\in L}(1 + g(z)/f(z)) \ge -\pi$$

випливає нерівність (3). Лема 1 доведена.

Позначимо $Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z$.

Лема 2. *Нехай для всіх* $\alpha \in [0; 1]$ *існує* z *таке, що* $|z| = e^{-\alpha}$ *і виконується нерівність* $|Q(z)| \le \pi + 1 + |c|$. *Тоді знайдеться стала* $K > 0$ *така, що* $|a_j| \le K$ *для всіх* $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Доведення. Розкладемо поліном $Q(z)$ на множники $Q(z) = a_n z(z - z_1)...(z - z_{n-1})$. Тоді вірна нерівність

$$|a_n||z||(|z| - |z_1|)...(|z| - |z_{n-1}|)| \le |Q(z)|. \tag{4}$$

Розглянемо поліном $Q_1(x) = |a_n| x(x - |z_1|)...(x - |z_{n-1}|)$. Згідно з умовою леми, із (4) випливає, що для всіх $x \in [e^{-1}; 1]$ виконується оцінка $|Q_1(x)| \le \pi + 1 + |c|$.

Застосовуючи теорему Чебишова, одержимо, що існує $x \in [e^{-1}; 1]$ таке, що

$$|Q_1(x)| \geq 2|a_n| \left(\frac{1-e^{-1}}{4}\right)^n.$$

Звідси випливає, що

$$|a_n| \leq ((\pi+1+|c|)/2) \left(\frac{4e}{e-1}\right)^n.$$

Одержимо оцінку для a_{n-1}. Оскільки

$$|a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1 z| \leq |a_n z^n+...+a_1 z|+|a_n z^n| \leq \pi+1+|c|+\frac{\pi+1+|c|}{2}\left(\frac{4e}{e-1}\right)^n,$$

то

$$|a_{n-1}| \leq \frac{1}{2}\left[\pi+1+|c|+\frac{\pi+1+|c|}{2}\left(\frac{4e}{e-1}\right)^n\right]\left(\frac{4e}{e-1}\right)^{n-1}.$$

Аналогічно можна одержати оцінки для всіх коефіцієнтів. Лема 2 доведена.

Теорема 1. *Область стійкості рівняння (2) обмежена.*

Доведення. Позначимо $P(\lambda) = \lambda - c - Q(e^{-\lambda})$. Тоді рівняння (2) перепишеться у вигляді $P(\lambda) = 0$. Застосуємо принцип аргументу до прямокутника на рис. 1.

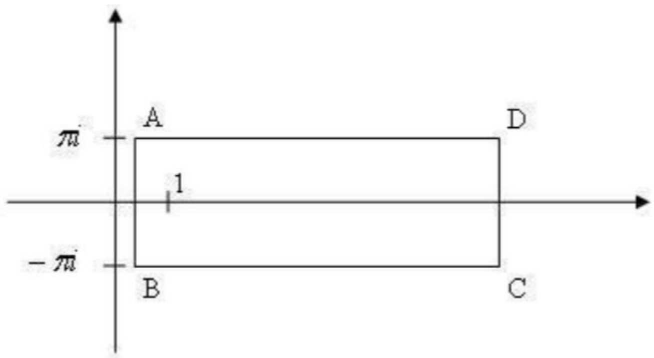

Рис. 1

Згідно з принципом аргументу, число нулів квазіполінома $P(\lambda)$ у прямокутнику дорівнює зміні аргументу функції $P(\lambda)$ при русі λ вздовж контура $ABCD$.

Сторона AB прямокутника перетинає дійсну вісь у точці $x = \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Число α ми виберемо пізніше. Сторону CD виберемо досить далеко від уявної осі. Тоді її образ при відображенні $P(\lambda)$ буде міститися в правій півплощині. На відрізку BC маємо

$$\lambda = -\pi i + x, \quad x \geq \alpha \geq 0, \quad P(\lambda) = -\pi i + x - c - Q(-e^{-x}).$$

Уявна частина функції $P(\lambda)$ залишається сталою, а дійсна частина прямує до $+\infty$ при $x \to +\infty$. На відрізку AD

$$\lambda = \pi i + x, \quad x \geq \alpha \geq 0, \quad P(\lambda) = \pi i + x - c - Q(-e^{-x}).$$

Тут знову уявна частина функції $P(\lambda)$ буде сталою. В результаті сумарна зміна аргументу функції $P(\lambda)$ при русі вздовж відрізків BC, CD і DA буде додатною. Залишилось оцінити зміну аргументу образу відрізка AB. Як ми побачимо, при досить великому $\max\limits_{1\le j\le n}|a_j|$ визначальним на відрізку AB для приросту аргументу функції $P(\lambda)$ буде вплив функції $Q(e^{-\lambda})$.

Приріст аргументу функції $Q(e^{-\lambda})$ при русі по відрізку AB дорівнює приросту аргументу функції $Q(z)$, коли z робить обхід кола $|z|=e^{-\alpha}$ проти годинникової стрілки. Згідно з принципом аргументу

$$\Delta Arg_{|z|=e^{-\alpha}}Q(z)=2\pi N,$$

де $N-$ число нулів функції $Q(z)$ в крузі $|z|<e^{-\alpha}$. Але в цьому крузі завжди є нуль $z=0$, тому $N\ge 1$, отже

$$\Delta Arg_{\pi\ge y\ge -\pi}Q(e^{-(\alpha+iy)})\ge 2\pi.$$

Якщо виконуються умови леми 2, то коефіцієнти полінома $Q(z)$ обмежені. У протилежному випадку, при досить великому $\max\limits_{1\le j\le n}|a_j|$ знайдеться таке α, $0\le\alpha\le 1$, що

$$|Q(e^{-(\alpha+iy)}|\ge \pi+1+|c|\ge|\alpha+iy-c|,\quad \pi\ge y\ge -\pi.$$

Використовуючи лему 1, оцінимо зміну аргументу функції $P(\lambda)$ при русі вздовж відрізка AB

$$\Delta Arg_{\pi\ge y\ge -\pi}(\alpha+iy-c-Q(e^{-(\alpha+iy)}))\ge 2\pi-\pi=\pi.$$

Отже, при досить великому $\max\limits_{1\le j\le n}|a_j|$ зміна аргументу функції $P(\lambda)$ при русі вздовж контура $ABCD$ буде додатною. Отже, згідно з принципом аргументу, функція $P(\lambda)$ матиме нуль в прямокутнику $ABCD$, а тоді $(a_1,...,a_n)$ не належить області стійкості рівняння (2).

Звідси випливає обмеженість області стійкості. Теорема доведена.

Лема 3. *Якщо вектор $(a_1,a_2,...,a_n)$ належить області стійкості рівняння (2), то $c+a_1+a_2+...+a_n<0$.*

Доведення. Нехай $c+a_1+a_2+...+a_n\ge 0$. Тоді квазімногочлен $P(\lambda)=\lambda-c-a_1e^{-\lambda}-...-a_ne^{-n\lambda}$ задовольняє умови

$$P(0)\le 0,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}P(\lambda)=+\infty.$$

Значить, існує число λ_0, $0\le\lambda_0<\infty$, таке, що $P(\lambda_0)=0$. Рівняння (2) має невід'ємний дійсний корінь. Отже, вектор $(a_1,a_2,...,a_n)$ не належить області стійкості. Лема 3 доведена.

2. Рівняння із двома запізненнями

Застосуємо метод $D-$ розбиттів до рівняння

$$\lambda=ae^{-m\lambda}+be^{-n\lambda},\tag{5}$$

де m та n – взаємно прості натуральні числа, $m<n$. Квазіполіном має нульовий корінь, якщо $a+b=0$. Ця пряма і є однією з ліній, що утворюють межу $D-$ розбиття.

Нехай тепер рівняння (5) має суто уявний корінь iy, $y \neq 0$:

$$a(\cos my - i\sin my) + b(\cos ny - i\sin ny) = iy.$$

Відокремлюючи дійсну і уявну частини, одержимо систему

$$a\cos my + b\cos ny = 0, \quad a\sin my + b\sin ny = -y. \tag{6}$$

Розв'яжемо систему (6), якщо

$$\begin{vmatrix} \cos my & \cos ny \\ \sin my & \sin ny \end{vmatrix} = \sin(n-m)y \neq 0.$$

Рівняння ліній $D-$ розбиття в параметричній формі матимуть вигляд

$$a = \frac{y\cos ny}{\sin(n-m)y}, \quad b = -\frac{y\cos my}{\sin(n-m)y}.$$

Ці лінії розбивають площину параметрів (a, b) на нескінченне число областей, всередині кожної з яких рівняння (5) має однакове число коренів з додатною дійсною частиною.

Система (6) може бути сумісною також у випадку, коли її головний визначник $\sin(n-m)y = 0$. Це можливо при $y \neq 0$ тоді і тільки тоді, коли $\cos my = \cos ny = 0$ або $my = \pi/2 + k\pi$, $ny = \pi/2 + l\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}$. Такі рівності виконуються тільки у випадку, коли m та n непарні. Якщо ж m та n непарні, то досить взяти $k = (m-1)/2$, $l = (n-1)/2$, $y = \pi/2$ і система (6) визначатиме пряму лінію $a\sin m\pi/2 + b\sin n\pi/2 = -\pi/2$. Крім цієї прямої існуватиме ще зліченне число однаково віддалених взаємно паралельних прямих, які є лініями $D-$ розбиття. У цьому випадку лініями $D-$ розбиття будуть прямі, кут нахилу яких рівний $\pi/4$ або $-\pi/4$. При непарних m та n відбувається біфуркація появи нових ліній $D-$ розбиття.

У випадку, коли $m = 1$, n – непарне натуральне число ($n > 1$), область стійкості обмежена $\frac{n+3}{2}$ дугами ліній, серед яких дві дуги будуть відрізками прямих. Інші дуги одержуються із параметричного зображення

$$a = \frac{y\cos ny}{\sin(n-1)y}, \quad b = -\frac{y\cos y}{\sin(n-1)y}$$

при $0 < y < \frac{2\pi}{3}$.

Як приклад знайдемо область стійкості рівняння

$$\lambda = ae^{-\lambda} + be^{-3\lambda}.$$

Щоб знайти оцінки для коефіцієнтів a та b, використаємо методику доведення теореми 1. Застосуємо принцип аргументу до прямокутника на рис. 1.

Спочатку припустимо, що $\alpha = 0$. Тоді при $||a| - |b|| \geq \pi$ маємо $|ae^{-iy} + be^{-3iy}| \geq \pi \geq |iy|$, тому зміна аргументу функції $P(\lambda) = \lambda - ae^{-\lambda} - be^{-3\lambda}$ при русі вздовж контура $ABCD$ буде додатною. Отже, функція $P(\lambda)$ буде мати нуль у прямокутнику $ABCD$.

Застосовуючи цю ж методику до прямокутника $ABCD$ при $\alpha = 1$, одержимо, що функція $P(\lambda)$ буде мати нуль у цьому прямокутнику при $||a|e^{-1} - |b|e^{-3}| \geq \sqrt{\pi^2 + 1}$.

Із наших міркувань випливає, що для точок (a, b) із області стійкості правильні нерівності

$$||a| - |b|| \leq \pi, \quad ||a|e^{-1} - |b|e^{-3}| \leq \sqrt{\pi^2 + 1}. \tag{7}$$

Згідно з лемою 3 область стійкості повинна задовольняти ще одну нерівність

$$a + b < 0. \tag{8}$$

Нерівності (7) і (8) визначають на площині параметрів a та b деякий обмежений многокутник.

Для знаходження області стійкості застосуємо тепер метод $D-$ розбиттів. Пряма $a + b = 0$ є однією з ліній, що утворюють межу $D-$ розбиття.

Якщо квазіполіном має суто уявний корінь iy, то рівняння меж $D-$ розбиття в параметричній формі матимуть вигляд

$$a = \frac{y(4\cos^2 y - 3)}{2\sin y}, \quad b = -\frac{y}{2\sin y}. \tag{9}$$

Побудуємо лінії, що відповідають випадку $\cos y = \cos 3y = 0$. Ці рівняння мають сумісні корені $y = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Тому лініями $D-$розбиття будуть прямі $a - b = (-1)^{k+1}(\pi/2 + k\pi)$.

Відзначимо, що лінії $D-$розбиття досить нанести в многокутнику, що обмежує область стійкості. Неважко переконатися, що зв'язна область, обмежена відрізками прямих

$$b = -a, \quad -\frac{\pi}{4} \leq a \leq \frac{1}{2}; \quad b = a + \frac{\pi}{2}, \quad -3\frac{\pi}{4} \leq a \leq -\frac{\pi}{4}$$

та дугою лінії (9) при $0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ є областю стійкості. Область стійкості рівняння (5), у якому $m = 1$, а $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, відповідно, – це заштрихована частина площини, зображена на рис. 2, 3, 4. Область стійкості рівняння (5), у якому $m = 1$, $n = 2$ зображена в [6].

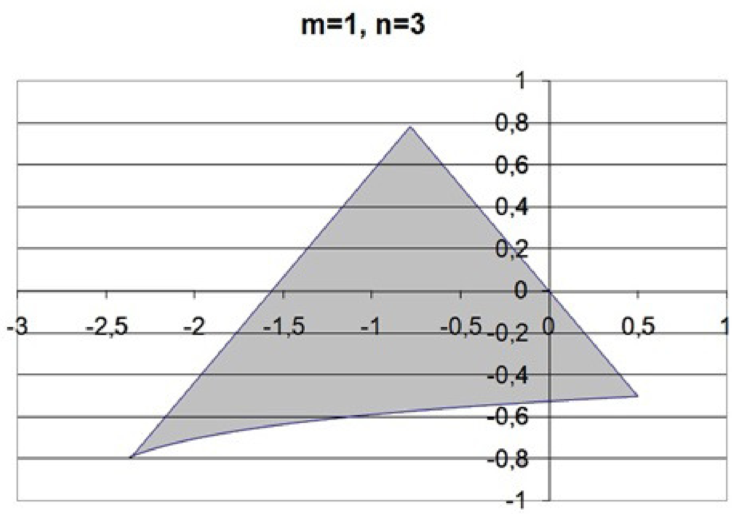

Рис. 2

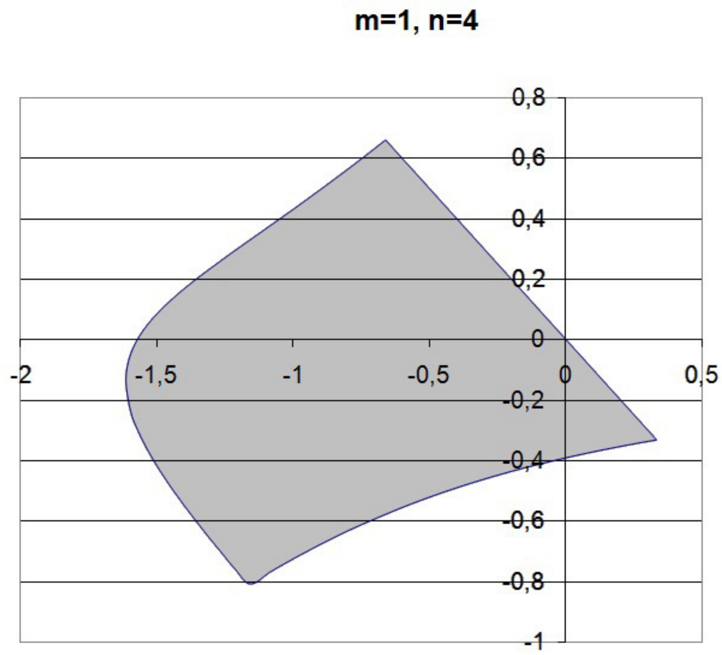

Рис. 3

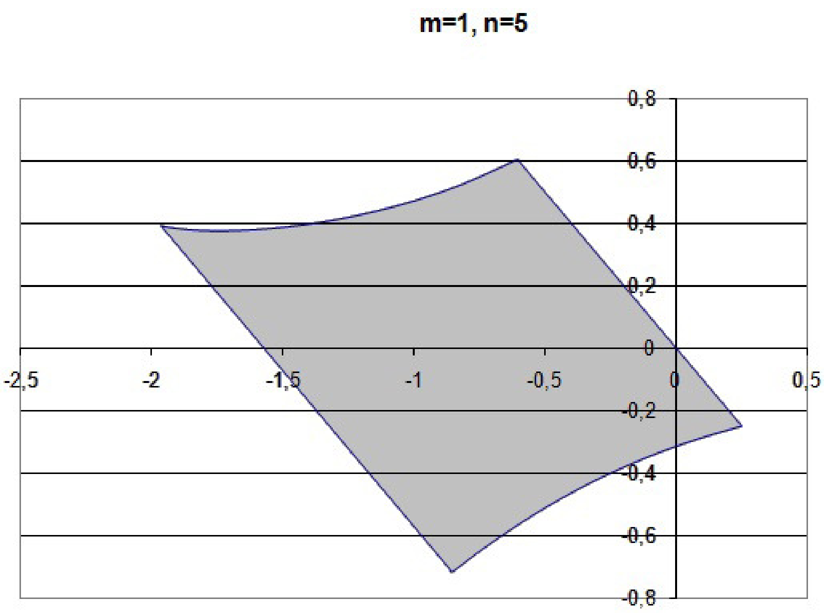

Рис. 4

3. Рівняння із двома запізненнями та доданком без запізнення

Розглянемо рівняння

$$\frac{dx}{dt} = cx(t) + ax(t-m) + bx(t-n),$$

де m та n – взаємно прості натуральні числа, $m < n$, причому c – фіксоване. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda = c + ae^{-m\lambda} + be^{-n\lambda}.$$

Побудуємо D-розбиття у просторі параметрів a, b. Якщо $\lambda = 0$, то одержимо пряму: $c + a + b = 0$, тобто $a + b = -c$. Якщо $\lambda = iy$, то

$$ae^{-imy} + be^{-iny} = iy - c.$$

Використовуючи формулу Ейлера, одержимо

$$a(\cos my - i \sin my) + b(\cos ny - i \sin ny) = iy - c,$$

звідки

$$\begin{cases} a \cos my + b \cos ny = -c, \\ -a \sin my - b \sin ny = y. \end{cases} \tag{10}$$

Домноживши перше рівняння системи (10) на $\sin ny$, друге – на $\cos ny$ і додавши ці рівняння, одержимо

$$a(\sin ny \cos my - \cos ny \sin my) = y \cos ny - c \sin ny,$$

звідки

$$a = \frac{y \cos ny - c \sin ny}{\sin(n-m)y}.$$

Домноживши перше рівняння системи (10) на $\sin my$, друге – на $\cos my$ і додавши ці рівняння, одержимо

$$b(\sin my \cos ny - \cos my \sin ny) = y \cos my - c \sin my,$$

звідки

$$b = \frac{c \sin my - y \cos my}{\sin(n-m)y}.$$

При досить великих фіксованих додатних c область стійкості буде порожньою множиною.

4. Рівняння із трьома запізненнями

Розглянемо рівняння

$$\frac{dx}{dt} = cx(t-p) + a_1 x(t-m) + a_2 x(t-n),$$

де p, m та n – взаємно прості натуральні числа, причому c і p – фіксовані. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda = ce^{-p\lambda} + a_1 e^{-m\lambda} + a_2 e^{-n\lambda}.$$

Побудуємо D-розбиття у просторі параметрів a_1, a_2. Якщо $\lambda = 0$, то одержимо пряму: $c + a_1 + a_2 = 0$, тобто $a_1 + a_2 = -c$. Якщо $\lambda = iy$, то

$$a_1 e^{-imy} + a_2 e^{-iny} = iy - ce^{-ipy}.$$

Використовуючи формулу Ейлера, одержимо

$$a_1(\cos my - i\sin my) + a_2(\cos ny - i\sin ny) = iy - c(\cos py - i\sin py),$$

звідки

$$\begin{cases} a_1\cos my + a_2\cos ny = -c\cos py, \\ -a_1\sin my - a_2\sin ny = y + c\sin py. \end{cases} \tag{11}$$

Домноживши перше рівняння системи (11) на $\sin ny$, друге – на $\cos ny$ і додавши ці рівняння, одержимо

$$a_1(\sin ny\cos my - \cos ny\sin my) = -c(\sin ny\cos py - \cos ny\sin py) + y\cos ny,$$

звідки

$$a_1 = \frac{y\cos ny - c\sin(n-p)y}{\sin(n-m)y}.$$

Домноживши перше рівняння системи (11) на $\sin my$, друге – на $\cos my$ і додавши ці рівняння, одержимо

$$a_2(\sin my\cos ny - \cos my\sin ny) = y\cos my - c(\sin my\cos py - \cos my\sin py),$$

звідки

$$a_2 = \frac{c\sin(m-p)y - y\cos my}{\sin(n-m)y}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Hale J.K.* Theory of Functional Differential Equations. – New York: Springer, 1977. – 365 p.

2. *El'sgol'ts L.E., Norkin S.B.* Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments. – New York and London: Academic Press, 1973. – 356 p.

3. *Pinney E.* Ordinary difference-differential equations. – Los Angeles: University of California Press, 1958. – 262 p.

4. *Klevchuk I.I.* Construction of stability domains for linear differential equations with many delays // Collect. sci. Works "Integral transformations and their applications to boundary value problems 14, Kiev, 1997, P. 126 – 133.

5. *Klevchuk I.I.* Reduction of boundary value problems to difference and differential-difference equations // Nauk. Visn. Chernivets'kogo Univ., Math. – 2003 – No 160, P. 80 – 83.

6. *Klevchuk I.I., Pernay S.A., Cherevko I.M.* Construction of stability domains for linear differential-difference equations // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2012, No 7. – P. 28 – 34.

7. *Levitskaya I.S.* Stability domain of a linear differential equation with two delays // Comput. Math. Appl. – 2006. – **51**, No. 1. – P. 153 – 159.

8. *Vaguina M. Yu., Kipnis M. M.* Stability of the zero solution of delay differential equations // Math. Notes. – 2003. – **74**, No. 5. – P. 740 – 743.

Надійшло 24.10.2022

Klevchuk I.I., Hrytchuk M.V. *Construction of stability domains for linear differential equations with several delays*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 1 (2022), 61–70.

The aim of the present article is to investigate of solutions stability of linear autonomous differential equations with retarded argument. The investigation of stability can be reduced to the root location problem for the characteristic equation. For the linear differential equation with several delays it is obtained the necessary and sufficient conditions, for all the roots of the characteristic equation to have negative real part (and hence the zero solution to be asymptotically stable). For the scalar delay differential equation

$$\frac{dz}{dt} = cz(t) + a_1z(t-1) + a_2z(t-2) + ... + a_nz(t-n)$$

with fixed c, $c \in \mathbb{R}$, $a_k \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq n$, stability domains in the parameter plane are obtained. We investigate the boundedness conditions and construct a domain of stability for linear autonomous differential equation with several delays. We use D-partition method, argument principle and numerical methods to construct of stability domains.