Журавльов В. П., Гонгало Н. В., Слюсаренко І. П.

Керованість інтегро-диференціальних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у гільбертових просторах

У роботі досліджуються інтегро-диференціальні рівняння Фредгольма з виродженим ядром з керуванням у гільбертових просторах. З використанням ортопроєкторів, псевдообернених операторів та псевдообернення інтегральних операторів отримано критерій розв'язності та загальний вигляд розв'язків інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром з керуванням у гільбертових просторах. Отримано зображення загального вигляду керування, при якому ці розв'язки існують.

Ключові слова і фрази: інтегро-диференціальне рівняння, рівняння з керуванням, гільбертовий простір, псевдообернений оператор.

Polissiia National University, Zhytomyr, Ukraine

e-mail: *vfz2008@ukr.net, nataliiahonhalo@gmail.com, islusarenko62@gmail.com*

Вступ

Численні застосування інтегро-диференціальних рівнянь у математиці, фізиці, техніці, економіці та інших галузях ставлять проблему отримання умов розв'язності та аналітичного представлення їх загальних розв'язків. Складність розв'язання цієї задачі пов'язана з тим, що інтегро-диференціальний оператор не є всюди розв'язним [1], тобто не має оберненого [2].

У [3, с. 169] достатньо повно розроблено підхід до розв'язання не всюди розв'язних лінійних операторних рівнянь у банахових просторах з використанням слабкого збурення правої частини рівняння з подальшим застосуванням методу Вішика–Люстерника [4, 5], або введенням в рівняння імпульсної дії [3, 6].

Ще одним з підходів до розв'язання не всюди розв'язних операторниз рівнянь є введення у праву частину керування. Так у [7] з використанням псевдообернення матриць та ортопроекторів розглянуто задачу існування сталого керування для інтегро-диференціального рівняння в евклідовому просторі.

Інтегро-диференціальні рівняння Фредгольма з виродженим ядром та керуванням у гільбертових просторах не досліджувались, тому актуальною є задача про встановлення

УДК 517.983
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34K30.

умов керованості, побудови в аналітичному вигляді загальних розв'язків та відповідних загальних керувань інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром у гільбертових просторах.

Для встановлення критерію керованості не всюди розв'язних інтегро-диференціальних рівнянь з керуванням у гільбертових просторах буде застосовуватись загальна теорія дослідження не всюди розв'язних операторних рівнянь з використанням ортопроєкторів, псевдообернення нормально розв'язних операторів у гільбертових просторах, яка розроблена у [3, 8].

1 Постановка задачі.

Нехай $\mathbf{H}$ —дійсний гільбертовий простір, в якому для $x \in \mathbf{H}$, $y \in \mathbf{H}$ визначений скалярний добуток $(x,y)_{\mathbf{H}}$, $\mathcal{I} = [a,b]$ — скінченний проміжок, $z(t)$ — вектор-функція зі значеннями у гільбертовому просторі $\mathbf{H}$, яка вимірна у сенсі Бохнера [9], така, що $\int\limits_a^b ||z(t)||dt < \infty$. На множині таких функцій визначимо скалярний добуток

$$(z(t), f(t)) = \int\limits_a^b z^*(t)f(t)dt,$$

де " $*$ " — операція транспонування.

Визначений таким чином простір буде гільбертовим. Позначимо його $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$.

Розглянемо інтегро-диференціальне рівняння Фредгольма з виродженим ядром з керуванням

$$\dot{z}(t) - \int\limits_a^b \Big[P(t)W(s)z(s) + Q(t)V(s)\dot{z}(s)\Big]ds = f(t) + \int\limits_a^b K(t,s)u(s)ds, \tag{1}$$

де оператор-функції $P(t) = \{p_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{\infty}$ та $Q(t) = \{q_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{\infty}$ — зліченновимірні матриці, які діють з $\mathbf{H}_2$ у $\mathbf{H}_1$, оператор-функції $W(t) = \{w_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{\infty}$ та $V(t) = \{v_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{\infty}$ — зліченновимірні матриці, які діють з $\mathbf{H}_1$ у $\mathbf{H}_2$ з нормами породженими скалярним добутком, оператор-функція $K(t,s) = \{k_{ij}(t,s)\}_{i,j=1}^{\infty}$ визначена у квадраті $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$ і діє з банахового простору $\mathbf{H}_1$ у $\mathbf{H}_1$ по змінній t і з банахового простору $\mathbf{H}_3$ у $\mathbf{H}_3$ — по змінній s з нормою $||K|| = \sqrt{\int\limits_a^b \int\limits_a^b ||K(t,s)||^2 dtds} < \infty$, вектор-функції $f(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$, $u(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_3)$ визначені на тому ж проміжку $\mathcal{I}$ зі значеннями у гільбертових просторах $\mathbf{H}_1$ та $\mathbf{H}_3$.

Розв'язком $z(t)$ інтегро-диференціального рівняння з керуванням (1) будемо називати таку пару вектор-функцій $z(t)$ та $u(s)$, які задовольняють рівняння (1). При цьому $z(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$, $\dot{z}(t) \in \mathbf{D}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$, де $\mathbf{D}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$ — гільбертовий простір абсолютно неперервних вектор-функцій з нормою $||z|| = \|z(a)\|_{\mathbf{H}_1} + \|\dot{z}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I},\mathbf{H}_1)}$. Похідну $\dot{z}(t)$ будемо розуміти в сенсі [9, с. 140].

2 Проміжний результат.

Застосовуючи теорію псевдообернених операторів [3, 8] отримаємо умови розв'язності та загальний вигляд розв'язків рівняння (1) без керування ($u(s) = 0$).

У рівнянні (1) зробимо заміну $\dot{z}(t) = y(t)$, тоді

$$z(t) = \int_a^t y(t)dt + c_0, \tag{2}$$

де $c_0 \in \mathbf{H}_1$ — довільний вектор.

Позначимо $\mathcal{H}_1 = \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_1$,

$$M(t) = \Big[P(t),\ \ Q(t)\Big],\ \ N(s) = col\Big[\widetilde{W}(s),\ \ V(s)\Big],$$

$$g(t) = f(t) + P(t)Wc,\ \ \widetilde{W}(s) = \int_s^b W(\tau)d\tau,\quad W = \widetilde{W}(a).$$

Тоді інтегро-диференціальне рівняння (1) без керуванням ($u(s) = 0$) зведемо до інтегрального рівняння

$$(L_1y)(t) := y(t) - M(t)\int_s^b N(s)y(s)ds = g(t). \tag{3}$$

Нехай $D = I_{\mathcal{H}_1} - \int_a^b N(s)M(s)\,ds$, $D : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ — нормально розв'язний оператор. Позначимо ортопроєктори $P_{N(D)} : \mathcal{H}_1 \to N(D)$ — на нуль-простір $N(D)$ та $P_{N(D^*)} : \mathcal{H}_1 \to N(D^*)$ — на нуль простір $N(D^*)$ спряженого до D оператора D^* та D^+ — обмежений псевдообернений оператор до оператора D [3].

Позначимо через $P_{N_0(D)}$ звуження оператора $P_{N(D)}$ на підпростір $N_0(D)$, який породжується системою лінійно незалежних вектор-стовпців матриці-ортопроєктора $P_{N(D)}$. Аналогічно позначимо через $P_{N_0(D^*)}$ звуження оператора $P_{N(D^*)}$ на підпростір $N_0(D^*)$, який породжується системою лінійно незалежних вектор-стовпців матриці-ортопроєктора $P_{N(D^*)}$.

Тоді оператор-функції

$$X(t) = M(t)P_{N_0(D)},\quad Y(t) = N^*(t)P_{N_0(D^*)}$$

будуть повними системами лінійно незалежних вектор-функцій, які є базисами нуль-просторів $N(L_1)$ та $N(L_1^*)$ інтегральних операторів L_1 та L_1^*.

Відомо [3], що при виконанні умов

$$P_{N(D^*)}\int_a^b N(s)g(s)ds = P_{N(D^*)}\int_a^b N(s)\big[f(s) + P(s)Wc_0\big]ds = 0 \tag{4}$$

і лише при них інтегральне рівняння (3) має сім'ю розв'язків

$$y(t) = M(t)\, P_{N(D)}\hat{c} + (L_1^{+}g)(t), \tag{5}$$

де $\hat{c}$ — довільний елемент гільбертового простору $\mathcal{H}_1$, L_1^{+} — псевдообернений по Муру-Пенроузу оператор до інтегрального оператора L, який має вигляд [3, с. 261]

$$(L_1^{+}g)(t) = g(t) + M(t)\int\limits_a^b \big[D^{+}N(s) - \tilde{\alpha}^{(-1)}M^{*}(s)\big]g(s)ds +$$

$$+\big[M(t)\tilde{\alpha}^{(-1)}\tilde{\beta}^{(-1)} - N^{*}(t)\tilde{\beta}^{(-1)}\big]\int\limits_a^b N(s)g(s)ds,$$

де

$$\tilde{\alpha}^{(-1)} = P_{N_0(D)}\alpha^{-1}P^{*}_{N_0(D)}, \quad \tilde{\beta}^{(-1)} = P_{N_0(D^{*})}\beta^{-1}P^{*}_{N_0(D^{*})},$$

α^{-1}, β^{-1} — нескінченновимірні матриці, які обернені до самоспряжених невироджених матриць Грама

$$\alpha = \int\limits_a^b X^{*}(t)X(t)dt, \quad \beta = \int\limits_a^b Y^{*}(t)Y(t)dt.$$

З умов (4) знайдемо довільну константу c_0, при якій інтегральне рівняння (3) буде розв'язним. В результаті отримаємо алгебраїчне рівняння

$$Sc_0 = f_0, \quad S : \mathbf{H}_1 \to \mathcal{H}_1, \tag{6}$$

де

$$S = P_{N(D^{*})}\int\limits_a^b N(s)P(s)W ds, \;\; f_0 = -P_{N(D^{*})}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds = 0.$$

Нехай S — нормально розв'язний оператор. Позначимо через $P_{N(S)} : \mathbf{H}_1 \to N(S)$ — матрицю-ортопроектор, а через $P_{N(S^{*})} : \mathcal{H}_1 \to N(S^{*})$ — матрицю-ортопроектор $P_{N(S^{*})}$ та $S^{+} : \mathcal{H}_1 \to \mathbf{H}_1$ — псевдообернену матрицю до матриці S.

Алгебраїчнене рівняння (6) розв'язне тоді і лише тоді, коли виконується умова [3]

$$P_{N(S^{*})}f_0 = -P_{N(S^{*})}P_{N(D^{*})}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds = 0,$$

при виконанні яких воно має сім'ю розв'язків

$$c_0 = P_{N(S)}\tilde{c} + S^{+}f_0, \tag{7}$$

де $\tilde{c}$ — довільний елемент гільбертового простору $\mathbf{H}_1$.

Враховуючи (7), підставимо $g(s) = f(s) + P(s)W[P_{N(S)}\tilde{c} + S^{+}f_0]$ у (5). В результаті отримаємо загальний розв'язок інтегрального рівняння (3)

$$y(t) = M(t)\, P_{N(D)}\hat{c} + \big(L_1^{+}[f(\cdot) + P(\cdot)W\{P_{N(S)}\tilde{c} + S^{+}f_0\}]\big)(t) =$$

$$= M(t)\,P_{N(D)}\hat{c} + (L_1^{+}P)(t)WP_{N(S)}\tilde{c} + (L_1^{+}f)(t) + (L_1^{+}P)(t)WS^{+}f_0.$$

Використовуючи заміну (2), отримаємо загальний розв'язок інтегро-диференціального рівняння (1) без керування ($u(s) = 0$)

$$z(t) = \int\limits_a^t y(s)ds + c_0 = \Big[X_1(t), \;\; X_2(t)\Big]\begin{bmatrix} \hat{c} \\ \tilde{c} \end{bmatrix} +$$

$$+(\widetilde{L}_1^{+}f)(t) + (\widetilde{L}_1^{+}P)(t)WS^{+}f_0 + S^{+}f_0,$$

де

$$X_1(t) = \int\limits_a^t M(s)\,P_{N(D)}ds, \;\; X_2(t) = (\widetilde{L}_1^{+}P)(t)WP_{N(S)} + P_{N(S)},$$

$$(\widetilde{L}_1^{+}f)(t) = \int\limits_a^t (L_1^{+}f)(s)ds, \;\; (\widetilde{L}_1^{+}P)(t) = \int\limits_a^t (L_1^{+}P)(s)ds.$$

Теорема 1. *Нехай оператори* $D : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ *та* $S : \mathbf{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ *— нормально розв'язні. Тоді інтегро-диференціальне рівняння без керування (1)* ($u(t) = 0$) *розв'язне для тих і лише тих* $f(t) \in \mathbf{L}_2([a, b], \mathbf{H}_1)$, *які задовольняють умову*

$$\mathcal{P}_{N(S^*)}\mathcal{P}_{N(D^*)}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds = 0 \qquad (8)$$

і при цьому має сім'ю розв'язків

$$z(t) = \Big[X_1(t), \;\; X_2(t)\Big]\begin{bmatrix} \hat{c} \\ \tilde{c} \end{bmatrix} + (\widetilde{L}_1^{+}f)(t) + (\widetilde{L}_1^{+}P)(t)WS^{+}f_0 + S^{+}f_0,$$

де $\hat{c} \in \mathcal{H}_1$, $\tilde{c} \in \mathbf{H}_1$ *— довільні сталі.*

Зауваження 1. *У випадку, коли* $P_{N(S^*)}P_{N(D^*)} = 0$, *інтегро-диференціальне рівняння (1) без керування буде розв'язним при довільній функції* $f(t)$.

3 Основний результат.

Припустимо, що умова розв'язності (8) рівняння (1) без керування не виконується, тобто

$$P_{N(S^*)}P_{N(D^*)}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds \neq 0.$$

Розглянемо наступну задачу: при яких умовах рівняння (1) з керуванням буде мати розв'язки.

Рівняння (1) буде розв'язним для тих і лише тих правих частин, які задовольняють умови [3]

$$P_{N(S^*)}P_{N(D^*)}\int\limits_a^b N(s)\Big[f(s)+\int\limits_a^b K(s,\tau)u(\tau)d\tau\Big]ds=0. \tag{9}$$

З (9) отримаємо рівняння відносно керування $u(s)$

$$\int\limits_a^b \Psi(s)u(s)ds=P_{N(S^*)}f_0, \tag{10}$$

де $\Psi(s)=P_{N(S^*)}P_{N(D^*)}\int\limits_a^b N(\tau)K(\tau,s)d\tau$.

Розв'язок рівняння (10) будемо шукати у вигляді

$$u(s)=\Psi^*(s)c_1, \tag{11}$$

де $\Psi^*(s)$ — матриця транспонована до матриці $\Psi(s)$, $c_1\in\mathbf{H}_3$ — невідомий вектор, який треба знайти.

Півдставивши (11) у (10) отримаємо алгебраїчне рівняння

$$Hc_1=P_{N(S^*)}f_0, \tag{12}$$

де $H=\int\limits_a^b\Psi(s)\Psi^*(s)ds$, $H:\mathbf{H}_3\to\mathcal{H}_1$.

Нехай H — нормально розв'язний оператор. Позначимо через $P_{N(H)}:\mathbf{H}_3\to N(H)$ та $P_{N(H^*)}:\mathbf{H}_1\to N(H^*)$ — матриці-ортопроектори, а через H^+ — псевдообернену по Муру-Пенроузу матрицю до матриці H.

Алгебраїчна система (12) має розв'язок відносно вектора $c_1\in\mathbf{H}_3$ тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$P_{N(H^*)}P_{N(S^*)}f_0=-P_{N(H^*)}P_{N(S^*)}P_{N(D^*)}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds=0, \tag{13}$$

при виконанні якої вона має сім'ю розв'язків

$$c_1=P_{N(H)}\bar{c}+H^+P_{N(S^*)}f_0,\ \bar{c}\in\mathbf{H}_3. \tag{14}$$

Після підстановки (14) у (11) отримаємо сім'ю керувань

$$u(s)=\Psi^*(s)P_{N(H)}\bar{c}+\Psi^*(s)H^+P_{N(S^*)}f_0, \tag{15}$$

при яких інтегро-диференціальне рівняння (1) буде мати сім'ю розв'язків

$$\begin{gathered}z(t)=\Big[X_1(t),\ \ X_2(t)\Big]\left[\begin{array}{c}\hat{c}\\ \tilde{c}\end{array}\right]+\\ +\Big(\widetilde{L}_1^+\big\{f(\cdot)+\int\limits_a^b K(\cdot,s)u(s)ds\big\}\Big)(t)+(\widetilde{L}_1^+P)(t)WS^+f_0+S^+f_0.\end{gathered} \tag{16}$$

Підставивши (15) у (16), отримаємо

$$z(t) = \Big[X_1(t), \ \ X_2(t)\Big] \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \tilde{c} \end{bmatrix} +$$

$$+\Big(\widetilde{L}_1^+\big\{f(\cdot) + \int\limits_a^b K(\cdot,s)\Big[\Psi^*(s)P_{N(H)}\bar{c} + \Psi^*(s)H^+P_{N(S^*)}f_0\Big]ds\big\}\Big)(t) +$$

$$+(\widetilde{L}_1^+P)(t)WS^+f_0 + S^+f_0.$$

Позначивши

$$[K\Psi^*](t) = \int\limits_a^b K(t,s)\Psi^*(s)ds,$$

після перетворень отримаємо

$$z(t) = \Big[X_1(t), \ \ X_2(t), \ \ X_3(t)\Big] \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \tilde{c} \\ \bar{c} \end{bmatrix} + \big(\widetilde{L}_1^+ f\big)(t) +$$

$$+\big(\widetilde{L}_1^+[K\Psi^*]\big)(t)H^+P_{N(S^*)}f_0 + (\widetilde{L}_1^+P)(t)WS^+f_0 + S^+f_0,$$

де

$$X_3(t) = \big(\widetilde{L}_1^+[K\Psi^*]\big)(t)P_{N(H)}, \quad \big(\widetilde{L}_1^+[K\Psi^*]\big)(t) = \int\limits_a^t \big(L_1^+[K\Psi^*]\big)(s)ds.$$

Теорема 2. *Нехай оператори* $D : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$, $S : \mathbf{H}_1 \to \mathcal{H}_1$, $H : \mathbf{H}_3 \to \mathcal{H}_1$ *— нормально розв'язні.*

Тоді при виконанні умов (13) і лише при них інтегро-диференціальне рівняння з керуванням (1) має сім'ю розв'язків

$$z(t) = \Big[X_1(t), \ \ X_2(t), \ \ X_3(t)\Big] \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \tilde{c} \\ \bar{c} \end{bmatrix} + \big(\widetilde{L}_1^+ f\big)(t) +$$

$$+\big(\widetilde{L}_1^+[K\Psi^*]\big)(t)H^+P_{N(S^*)}f_0 + (\widetilde{L}_1^+P)(t)WS^+f_0 + S^+f_0,$$

де $\hat{c} \in \mathcal{H}_1$, $\tilde{c} \in \mathbf{H}_1$ *та* $\bar{c} \in \mathbf{H}_3$ *— довільні сталі.*

При цьому воно має сім'ю допустимих керувань

$$u(s) = \Psi^*(s)P_{N(H)}\bar{c} - \Psi^*(s)H^+P_{N(S^*)}P_{N(D^*)}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds.$$

Зауваження 2. *У випадку, коли* $P_{N(H^*)}P_{N(S^*)}P_{N(D^*)} = 0$, *інтегро-диференціальне рівняння (1) з керуванням буде розв'язним при довільній функції* $f(t)$.

Зауваження 3. *Якщо проєктор* $P_{N(S)} = 0$, *то операторне рівняння (6) буде* n*-нормальним [1] (*$dimkerS = 0$*).*

Тоді операторне рівняння (6) при виконанні умови (13) буде мати єдиний розв'язок

$$c_1 = S_l^+ f_0,$$

де S_l^+ *— лівий псевдообернений оператор до оператора* S *[10].*

У цьому випадку $X_2(t) = (\widetilde{L}_1^+ P)(t) W P_{N(S)} + P_{N(S)} = 0$ *і інтегро-диференціальне рівняння (1) з керуванням при виконанні умови (13) буде мати сім'ю розв'язків*

$$z(t) = \Big[X_1(t), \quad X_3(t) \Big] \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \bar{c} \end{bmatrix} +$$

$$+(\widetilde{L}^+ f)(t) + \big(\widetilde{L}_1^+[K\Psi^*]\big)(t) H^+ P_{N(S^*)} f_0 + (\widetilde{L}_1^+ P)(t) W S^+ f_0 + S^+ f_0.$$

При цьому воно має сім'ю допустимих керувань

$$u(s) = \Psi^*(s) P_{N(H)} \bar{c} + \Psi^* H^+ P_{N(S^*)} f_0.$$

Зауваження 4. *Якщо* $P_{N(H)} = 0$, *то операторне рівняння (12) буде* n*-нормальним [1] (*$dimkerH = 0$*) Тоді при виконання умови розв'язності (13) рівняння (12) буде мати єдиний розв'язок* $c_1 = H_l^+ P_{N(S^*)} f_0$, *де* H_l^+ *— лівий псевдообернений оператор до оператора* H *[10].*

У цьому випадку інтегро-диференціальне рівняння з керуванням (1) буде мати сім'ю розв'язків

$$z(t) = \Big[X_1(t), \quad X_3(t) \Big] \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \bar{c} \end{bmatrix} + \big(\widetilde{L}_1^+ f\big)(t) +$$

$$+\big(\widetilde{L}_1^+[K\Psi^*]\big)(t) H_l^+ P_{N(S^*)} f_0 + (\widetilde{L}_1^+ P)(t) W S^+ f_0 + S^+ f_0,$$

при єдиному керуванні

$$u(s) = -\Psi^*(s) H_l^+ P_{N(S^*)} P_{N(D^*)} \int_a^b N(s) f(s) ds.$$

Список літератури

[1] Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М. Нормально разрешимые краевые задачи, Нукова думка, Киев, 2019.

[2] Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems. 2nd edition, De Gruyter, Berlin, 2016.

[3] Бондар І. А. *Імпульсні крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь.* Буковин. мат. журн. 2014, **2** (4), 7 — 11.

[4] Бондар І. А., *Умови керування для незавжди розв'язних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром та крайових задач для них.* Буковин. мат. журн. 2016, **4** (1 – 2), 13 — 17.

[5] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, Наука, Москва, 1970.

[6] Журавлев В.Ф. *Критерий разрешимости и представление решений линейных $n-$ $(d-)$ нормальных операторных уравнений в банаховом пространстве.* Укр. мат. журн. 2010, **62** (2), 167 — 182.

[7] Zhuravlev V. F. *Bifurcation Conditions for the Solutions of Weakly Perturbed Boundary-Value Problems for Operator Equations in Banach Spaces.* Ukrainian Mathematical Journal 2018, **70** (3), 422 — 436.

[8] Журавльов В. П., Фомін М. П. *Слабко збурені інтегро-диференціальні рівняння з виродженим ядром у банахових просторах* . Нелінійні коливання. 2020, **23** (2), 184 — 199.

[9] Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве, Наука, Москва, 1971.

[10] Ландо Ю. К. *Об индексе и нормальной разрешимости интегро-дифференциальных операторов.* Дифференц. уравнения. 1968, **4** (6), 1112 — 1126.

Список літератури

[1] Crane S. G., *Linear equations in Banach space* , Nauka, Moscow, 1971. (in Russian) .

[2] Lando Yu. K., *On the index and normal solvability of integro-differential operators*, Differential equations, **4** (6), 1112 — 1126 (1968). (in Russian)

[3] Boichuk A. A., Zhuravlov V. F., Samoilenko A. M., *Normally solvable boundary value problems*, Naukova Dumka, Kyiv (2019). (in Russian)

[4] Zhuravlev V. F., *Bifurcation Conditions for the Solutions of Weakly Perturbed Boundary-Value Problems for Operator Equations in Banach Spaces*, Ukrainian Mathematical Journal, **70** (3), 422 — 436 (2018). (in Russian)

[5] Zhuravl'ov V. P., Fomin M. P., *Weakly Perturbed Integro-differential Equations with Degenerate Kernel in Banach Spaces*, Nonlinear Oscillations, **23** (2), 184 — 199 (2020). (in Ukrainian)

[6] Bondar I. A.,*Impulse boundary value problems for systems of linear integro-differential equations*, Bukovinski Mathematical Journal, **2** (4), 7 — 11 (2014). (in Ukrainian)

[7] Bondar I. A., *Control conditions for not always solvable integro-differential equations with a degenerate kernel and boundary value problems for them*, Bukovinski Mathematical Journal, **4** (1 – 2), 13 — 17 (2016). (in Ukrainian)

[8] Boichuk A. A., Samoilenko A. M., *Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems. 2nd edition*, Berlin, De Gruyter (2016).

[9] Daletsky Yu. L., Crane M. G., *Stability of solutions of differential equations in Banach space*, Nauka, Moscow, 1970. (in Russian) .

[10] Zhuravlev V. F., *Criterion of solvability and representation of solutions of linear $n-$ $(d-)$ normal operator equations in Banach space* , Ukrainian Mathematical Journal, **62** (2), 167 — 182 (2010). (in Russian)

Надійшло 12.10.2022

Zhuravlov V. P., Gongalo N. V., Slusarenko I. P. *Controllability of Fredholm's integro-differential equations with by a degenerate kernel in Hilbert spaces*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 1 (2022), 51–60.

The work examines integro-differential equations Fredholm with a degenerate kernel with Hilbert control spaces.

The need to study these equations is related to numerous ones applications of integro-differential equations in mathematics, physics, technology, economy and other fields. Complexity the study of integro-differential equations is connected with the fact that the integro-differential operator is not solvable everywhere.

There are different approaches to the solution of not everywhere solvable linear operator equations: weak perturbation of the right-hand side of this equation with further application of the Vishyk-Lyusternyk method, introduction to system of impulse action, control, etc.

The problem of obtaining coefficient conditions of solvability and analytical presentation of general solutions of integro-differential equations is a rather difficult problem, so frequent solutions will suffice are obtained by numerical methods.

In this connection, Fredholm's integro-differential equations with degenerate kernel and control in Hilbert spaces no were investigated. Therefore, the task of establishing conditions is urgent controllability, construction of general solutions in an analytical form and corresponding general controls of integro-differential equations with a degenerate kernel in abstract Hilbert spaces.

As an intermediate result in the work using the results of pseudoinversion of integral operators in Hilbert spaces the solvability criterion and the form of general solutions are established integro-differential equations without control in the abstract Hilbert spaces.

To establish the controllability criterion is not solvable everywhere integro-differential equations with Hilbert control spaces, the general theory of research is not applied everywhere solvable operator equations. At the same time, they are used significantly orthoprojectors, pseudo-inverse operators to normally solvable ones operators in Hilbert spaces.

With the use of orthoprojectors, pseudo-inverse operators and pseudoinversion of integral operators, a criterion is obtained solutions and the general form of solutions of integro-differential equations with a degenerate kernel with control y Hilbert spaces. An image of the general appearance is obtained control under which these solutions exist.