Bukovinian Math. Journal. 2022, **10**, 1, 41–50 Буковинський матем. журнал 2022, Т.10, №1, 41–50

Бедратюк Л.П.

# Породжуюча функція для многочленів Шура

Нехай $\boldsymbol{s}_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – многочлен Шура, який індексується розбиттям $\lambda$ довжини не більше $n$. Для породжуючої функції

$$G_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = \sum_\lambda \boldsymbol{s}_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) t_1^{\lambda_1} t_2^{\lambda_2} \cdots t_n^{\lambda_n},$$

обчислено її явний вигляд для $n = 2, 3$ і знайдено рекурентне співвідношення для довільного $n$. Доведено, що $G_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ є раціональним дробом

$$G_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = \frac{P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})}{Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})},$$

чисельник і знаменник якого належать ядру диференціального оператора

$$\mathcal{D}_n = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial}{\partial t_i}.$$

Для чисельника $P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ знайдена його спеціалізація при $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 1$.

*Ключові слова і фрази:* породжуючі функції, многочлени Шура, рекурентне співвідношення, диференціальні оператори.

Khmelnytskyi National University, Khmelnytskyi, Ukraine
e-mail: *LeonidBedratyuk@khmnu.edu.ua*

## Вступ

Нехай $\boldsymbol{s}_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – многочлен Шура, який індексується розбиттям $\lambda$ довжини не більше $n$. Многочлени Шура є симетричними многочленами, які знайшли широке застосування в теорії зображень груп, алгебраїчній комбінаториці та в теоретичній фізиці. Вперше вони розглядалися ще Коші та Якобі, а їхнє основне застосування в теорії зображень симетричної групи з'явилися значно пізніше в дисертації Шура [8]. Многочлени Шура є характерами незвідних зображень повної матричної групи, а їхня спеціалізація є характерами спеціальної лінійної групи, див. [2]. Однією із відкритих проблем в теорії зображень класичних груп є знаходження породжуючої функції для

УДК 517.929.7
2010 *Mathematics Subject Classification:* 05A15.

характерів зображень таких груп, див. [7], [1], [9],[5], [6], зокрема для спеціальної лінійної групи $SL(n,\mathbb{C})$. Оскільки для цієї групи її характери є спеціалізацією многочленів Шура, то викликає інтерес знаходження породжуючої функції

$$G_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})=\sum_{\lambda}\boldsymbol{s}_\lambda(x_1,x_2,\ldots,x_n)t_1^{\lambda_1}t_2^{\lambda_2}\cdots t_n^{\lambda_n},$$

многочленів Шура. Така функція була описана Стенлі [9], щоправда в суто комбінаторних термінах зсунутих таблиць Юнга, що виявилося не зовсім зручно з обчислювальної точки зору.

В цій статті обчислено явний вигляд породжуючої функції для $n=2,3$ у вигляді визначників, а для довільного $n$ знайдено рекурентне співвідношення, яке виражає породжую функцію $G_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ через породжуючу функцію від меншої кількості змінних, що дозволяє організувати ефективний обчислювальний процес. Також доведено, що чисельник і знаменник породжуючої функції є розв'язками деякого диференціального рівняння. Встановлено явний вигляд знаменника та знайдено спеціалізацію чисельника породжуючої функції при $t_1=t_2=\cdots=t_n=1$.

## 1 Многочлени Шура

Розглянемо кільце $\mathbb{Z}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ многочленів від $n$ змінних з цілими коефіцієнтами. Симетрична група $S_n$ діє на цьому кільці перестановками змінних:

$$\omega\circ f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f(x_{\omega(1)},x_{\omega(2)},\ldots,x_{\omega(n)}),\omega\in S_n.$$

Многочлени, які не змінюються при цій дії, називаються *симетричними многочленами* і утворюють підкільце

$$\Lambda_n=\mathbb{Z}[x_1,x_2,\ldots,x_n]^{S_n},$$

в $\mathbb{Z}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$, яке називається *кільцем симетричних многочленів*.

Найпростішим прикладом симетричних многочленів є суми всіх можливих добутків змінних фіксованої довжини

$$\boldsymbol{e}_r=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r},0\le r\le n,\boldsymbol{e}_0=1,$$

які називаються *елементарними симетричними многочленами.*

Елементарні симетричні многочлени мають породжуючу функцію

$$E(t)=\sum_{r=0}^{n}\boldsymbol{e}_rt^r=\prod_{i=1}^{n}(1+x_it),$$

і є базисом кільця симетричних многочленів $\Lambda_n$.

Многочлени $f$, які при дії перестановки змінюються за правилом $\omega\circ f=(-1)^{|\omega|}f$, де $|\omega|$ – парність перестановки $\omega$, називаються *кососиметричними многочленами.* Антисиметризатори мономів $\boldsymbol{x}^\mu=x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\cdots x_n^{\mu_n}$:

$$\Delta_\mu=\sum_{\omega\in S_n}(-1)^{|\omega|}\omega(\boldsymbol{x}^\mu)=\sum_{\omega\in S_n}(-1)^{|\omega|}x_{\omega(1)}^{\mu_1}x_{\omega(2)}^{\mu_2}\cdots x_{\omega(n)}^{\mu_n}$$

утворюють базис $Z$-модуля кососиметричних многочленів. Многочлен $\Delta_\mu$ можна записати у вигляді визначника

$$\Delta_\mu = \det(x_i^{\mu_j})_{1\le i,j\le n} = \begin{vmatrix} x_1^{\mu_1} & x_2^{\mu_1} & \dots & x_n^{\mu_1} \\ x_1^{\mu_2} & x_2^{\mu_2} & \dots & x_n^{\mu_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{\mu_n} & x_2^{\mu_n} & \dots & x_n^{\mu_n} \end{vmatrix}.$$

Зокрема, при $\delta_n = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$ отримуємо визначник Вандермонда

$$\Delta_{\delta_n} = \det(x_i^{n-j})_{1\le i,j\le n} = \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(x_i - x_j).$$

Якщо в наборі $\mu$ присутні дві однакових компоненти, то тоді многочлен $\Delta_\mu$ рівний нулю. Тому для ненульових многочленів можна вважати що, $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_n \ge 0$. Отже, набір $\mu$ можна подати у вигляді суми $\mu = \lambda + \delta_n$, де набір $\lambda$ вже буде *розбиттям* $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots \ge \lambda_n \ge 0$.

Симетричний многочлен Шура $\boldsymbol{s}_\lambda(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{s}_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)$, який відповідає розбиттю $\lambda$, визначається як відношення двох кососиметричних многочленів

$$\boldsymbol{s}_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\Delta_{\lambda+\delta_n}}{\Delta_{\delta_n}}.$$

Наведемо приклади многочленів Шура:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{s}_{(1,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \\ &\boldsymbol{s}_{(1,1,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \\ &\boldsymbol{s}_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3)(x_1 + x_3)(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Якщо $\lambda$ пробігає всі розбиття довжини не більше $n$, то відповідні многочлени Шура утворюють базис кільця $\Lambda_n$.

Многочлени Шура є узагальненням всіх інших відомих базисів $\Lambda_n$, наприклад у випадку розбиття $\lambda = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k \text{ одиниць}})$ отримуються елементарні симетричні многочлени $\boldsymbol{s}_{(1,1,\dots,1)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \boldsymbol{e}_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

## 2 Породжуюча функція для многочленів Шура

Наведене нами визначення многочленів Шура як частки двох визначників має серйозний недолік – у загальному випадку воно не дозволяє записати ці многочлени явно. В результаті працювати з многочленами Шура досить важко, і існує багато відкритих проблем пов'язаних з ними. Однією з таких проблем є задача визначення породжучої функції

$$G_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = \sum_\lambda \boldsymbol{s}_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) t_1^{\lambda_1} t_2^{\lambda_2} \cdots t_n^{\lambda_n} = \sum_\lambda \boldsymbol{s}_\lambda(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{t}^\lambda,$$

де $\lambda$ пробігає всі розбиття довжини не більше за $n$.

Вперше комбінаторних вираз для $G_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ був отриманий в [9] в термінах зсунутих таблиць Юнга. Пізніше інший комбінаторний вираз для породжуючої було отримано в [1]. Всі ці вирази є громіздкими, і явно виписані лише для $n \leq 5$. Ми пропонуємо ефективну рекурентну формулу для обчислення породжуючої функції.

Спочатку розглянемо випадки $n = 2$ і $n = 3$. Має місце наступна теорема

**Теорема 1.** *Породжуючі функції для многочленів Шура від двох і трьох змінних мають такий вигляд*

$$(i) \quad G_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{1}{(1 - x_1t_1)(1 - x_2t_1)(1 - x_1x_2t_1t_2)},$$

$$(ii) \quad G_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = \frac{(1-t_1^2t_2x_1x_2x_3)\,(1-x_1x_2x_3t_1t_2t_3)^{-1}}{(1-x_1t_1)(1-x_1x_2t_1t_2)(1-x_1x_3t_1t_2)(1-x_2t_1)(1-x_3t_1)(1-x_2x_3t_1t_2)}.$$

*Доведення.* $(i)$ Кожне розбиття $\lambda$ довжини 2 можна подати у вигляді $\lambda = (a+b, b)$, де $a, b$ пробігають всю множину натуральних чисел. Тоді, вносячи суми під знак визначника, отримаємо

$$G_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = \sum_{a,b=0}^{\infty} \boldsymbol{s}_{(a+b,b)}(x_1, x_2)t_1^{a+b}t_2^b = \frac{1}{x_1 - x_2} \sum_{a,b=0}^{\infty} \begin{vmatrix} x_1^{a+b+1} & x_2^{a+b+1} \\ x_1^b & x_2^b \end{vmatrix} t_1^{a+b}t_2^b =$$

$$= \frac{1}{x_1 - x_2} \sum_{a,b=0}^{\infty} \begin{vmatrix} x_1^{a+1} & x_2^{a+1} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} (x_1x_2t_1t_2)^b t_1^a = \frac{1}{x_1 - x_2} \sum_{a,b=0}^{\infty} \begin{vmatrix} x_1^{a+1} & x_2^{a+1} \\ (x_1x_2t_1t_2)^b & (x_1x_2t_1t_2)^b \end{vmatrix} t_1^a =$$

$$= \frac{1}{x_1 - x_2} \sum_{a,b=0}^{\infty} \begin{vmatrix} x_1^{a+1}t_1^a & x_2^{a+1}t_1^a \\ (x_1x_2t_1t_2)^b & (x_1x_2t_1t_2)^b \end{vmatrix} = \frac{1}{x_1 - x_2} \begin{vmatrix} \sum\limits_{a=0}^{\infty} x_1^{a+1}t_1^a & \sum\limits_{a=0}^{\infty} x_2^{a+1}t_1^a \\ \sum\limits_{b=0}^{\infty}(x_1x_2t_1t_2)^b & \sum\limits_{b=0}^{\infty}(x_1x_2t_1t_2)^b \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{x_1 - x_2} \begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{1 - x_1t_1} & \dfrac{x_2}{1 - x_2t_1} \\ \dfrac{1}{1 - x_1x_2t_1t_2} & \dfrac{1}{1 - x_1x_2t_1t_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(1 - x_1t_1)(1 - x_2t_1)(1 - x_1x_2t_1t_2)}.$$

При обчисленнях ми використали елементарні властивості визначників та формулу для формальної суми геометричної прогресії.
$(ii)$ Кожне розбиття довжини 3 можна подати у вигляді $\lambda = (a + b + c, b + c, c)$, де $a, b, c$ пробігають всю множину натуральних чисел. Тому

$$G_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = \sum_{\lambda} \boldsymbol{s}_\lambda(x_1, x_2, x_3)t_1^{\lambda_1}t_2^{\lambda_2}t_3^{\lambda_3} = \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \boldsymbol{s}_{a+b+c,b+c,c}(x_1, x_2, x_3)t_1^{a+b+c}t_2^{b+c}t_3^c =$$

$$= \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)} \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \begin{vmatrix} {x_1}^{a+b+c+2} & {x_2}^{a+b+c+2} & {x_3}^{a+b+c+2} \\ {x_1}^{b+c+1} & {x_2}^{b+c+1} & {x_3}^{b+c+1} \\ x_1^c & x_2^c & x_3^c \end{vmatrix} t_1^{a+b+c}t_2^{b+c}t_3^c.$$

Покладемо

$$S_3=\sum_{c=0}^{\infty}(x_1x_2x_3t_1t_2t_3)^c=\frac{1}{1-x_1x_2x_3t_1t_2t_3},$$

і обчислимо окремо суму

$$S=\sum_{a,b,c=0}^{\infty}\begin{vmatrix} {x_1}^{a+b+c+2} & {x_2}^{a+b+c+2} & {x_3}^{a+b+c+2}\\ {x_1}^{b+c+1} & {x_2}^{b+c+1} & {x_3}^{b+c+1}\\ x_1^c & x_2^c & x_3^c\end{vmatrix} t_1^{a+b+c}t_2^{b+c}t_3^c.$$

Винісши $x_1^c$, $x_2^c$, $x_3^c$ з відповідних стовпчиків визначника, отримаємо

$$S=\sum_{a,b,c=0}^{\infty}\begin{vmatrix} {x_1}^{a+b+2} & {x_2}^{a+b+2} & {x_3}^{a+b+2}\\ {x_1}^{b+1} & {x_2}^{b+1} & {x_3}^{b+1}\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}(x_1x_2x_3t_1t_2t_3)^c t_1^{a+b}t_2^b=$$

$$=S_3\sum_{a,b=0}^{\infty}\begin{vmatrix} {x_1}^{a+b+2}t_1^a & {x_2}^{a+b+2}t_1^a & {x_3}^{a+b+2}t_1^a\\ {x_1}^{b+1} & {x_2}^{b+1} & {x_3}^{b+1}\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}(t_1t_2)^b=$$

$$=S_3\sum_{b=0}^{\infty}\begin{vmatrix} \dfrac{x_1^{b+2}}{1-x_1t_1} & \dfrac{x_2^{b+2}}{1-x_2t_1} & \dfrac{x_3^{b+2}}{1-x_3t_1}\\ {x_1}^{b+1} & {x_2}^{b+1} & {x_3}^{b+1}\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}(t_1t_2)^b=$$

$$=S_3\sum_{b=0}^{\infty}\begin{vmatrix} \dfrac{x_1^{2}}{1-x_1t_1} & \dfrac{x_2^{2}}{1-x_2t_1} & \dfrac{x_3^{2}}{1-x_3t_1}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ x_1^{-b} & x_2^{-b} & x_3^{-b}\end{vmatrix}(x_1x_2x_3t_1t_2)^b=$$

$$=S_3\sum_{b=0}^{\infty}\begin{vmatrix} \dfrac{x_1^{2}}{1-x_1t_1} & \dfrac{x_2^{2}}{1-x_2t_1} & \dfrac{x_3^{2}}{1-x_3t_1}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ (x_2x_3t_1t_2)^b & (x_1x_3t_1t_2)^b & (x_1x_2t_1t_2)^b\end{vmatrix}=S_3\begin{vmatrix} \dfrac{x_1^{2}}{1-x_1t_1} & \dfrac{x_2^{2}}{1-x_2t_1} & \dfrac{x_3^{2}}{1-x_3t_1}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ \dfrac{1}{1-x_2x_3t_1t_2} & \dfrac{1}{1-x_1x_3t_1t_2} & \dfrac{1}{1-x_1x_2t_1t_2}\end{vmatrix}.$$

Розкривши визначник, після спрощень знаходимо

$$S=\frac{(1-t_1^2t_2x_1x_2x_3)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)}{(1-x_1t_1)(1-x_1x_2t_1t_2)(1-x_1x_3t_1t_2)(1-x_2t_1)(1-x_3t_1)(1-x_2x_3t_1t_2)(1-x_1x_2x_3t_1t_2t_3)},$$

звідки зразу слідує потрібний вираз для $G_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$. □

Для $n>3$ такий підхід не дозволяє відокремити суми для кожного індексу сумування і така техніка вже не приводить до бажаної замкнутої формули. Тим не менше, ми можемо отримати рекурентне співвідношення, яке ми потім узагальнимо для довільного $n$.

Має місце наступна теорема, яка виражає породжуючу функцію $G_4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ через породжуючі функції від меншого числа змінних:

**Теорема 2.**

$$G_4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \frac{1}{1-x_1x_2x_3x_4t_1t_2t_4}\Big(\frac{x_1x_3x_4G_3(\hat{\boldsymbol{x}}_2,\hat{\boldsymbol{t}}_4)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} - \frac{x_1x_2x_4G_3(\hat{\boldsymbol{x}}_3,\hat{\boldsymbol{t}}_4)}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)(x_3-x_4)} +$$
$$+\frac{x_1x_2x_3G_3(\hat{\boldsymbol{x}}_4,\hat{\boldsymbol{t}}_4)}{(x_1-x_4)(x_2-x_4)(x_3-x_4)} - \frac{x_2x_3x_4G_3(\hat{\boldsymbol{x}}_1,\hat{\boldsymbol{t}}_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}\Big),$$

*де* $\hat{\boldsymbol{x}}_i, \hat{\boldsymbol{t}}_4$ – *набори символів* $x_1, x_2, x_3, x_4$ *і* $t_1, t_2, t_3, t_4$ *в яких відсутні* $x_i$ *і* $t_4$ *відповідно.*

*Доведення.* Для $\lambda = (a+b+c+d, b+c+d, c+d, d)$ знаходимо

$$\Delta_{\lambda+\delta_4} = \begin{vmatrix} {x_1}^{a+b+c+d+3} & {x_2}^{a+b+c+d+3} & {x_3}^{a+b+c+d+3} & {x_4}^{a+b+c+d+3} \\ {x_1}^{b+c+d+2} & {x_2}^{b+c+d+2} & {x_3}^{b+c+d+2} & {x_4}^{b+c+d+2} \\ {x_1}^{c+d+1} & {x_2}^{c+d+1} & {x_3}^{c+d+1} & {x_4}^{c+d+1} \\ x_1^d & x_2^d & x_3^d & x_4^d \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} {x_1}^{a+b+c+3} & {x_2}^{a+b+c+3} & {x_3}^{a+b+c+3} & {x_4}^{a+b+c+3} \\ {x_1}^{b+c+2} & {x_2}^{b+c+2} & {x_3}^{b+c+2} & {x_4}^{b+c+2} \\ {x_1}^{c+1} & {x_2}^{c+1} & {x_3}^{c+1} & {x_4}^{c+1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} (x_1x_2x_3x_4)^d =$$
$$= (-x_2x_3x_4A(x_2,x_3,x_4) + x_1x_3x_4A(x_1,x_3,x_4) -$$
$$-x_1x_2x_4A(x_1,x_2,x_4) + x_1x_2x_3A(x_1,x_2,x_3))(x_1x_2x_3x_4)^d.$$

Тут ми розклали визначник за останнім рядком і поклали

$$A(x,y,z) = \begin{vmatrix} x^{a+b+c+2} & y^{a+b+c+2} & z^{a+b+c+2} \\ x^{b+c+1} & y^{b+c+1} & z^{b+c+1} \\ x^c & y^c & z^c \end{vmatrix}$$

З теореми 3 випливає, що

$$\sum_{a,b,c=0}^{\infty} A(x,y,z)t_1^{a+b+c}t_2^{b+c}t_3^c = S_3(x,y,z) = (x-y)(x-z)(y-z)G_3(x,y,z,t_1,t_2,t_3).$$

Тому

$$\sum_{a,b,c,d=0}^{\infty} \Delta_{\lambda+\delta_4}t_1^{a+b+c}t_2^{b+c}t_3^c = \frac{1}{1-x_1x_2x_3x_4t_1t_2t_4}\Big(x_1x_3x_4S_3(x_1,x_3,x_4) - x_1x_2x_4S_3(x_1,x_2,x_4) +$$
$$+x_1x_2x_3S_3(x_1,x_2,x_3) - x_2x_3x_4S_3(x_2,x_3,x_4)\Big)$$

Поділивши цей вираз на визначник Вандермонда $\Delta_{\delta_4}$ отримаємо твердження теореми.

□

В загальному випадку, аналогічно доводиться наступна теорема, яка визначає рекурентне рівняння, що пов'язує породжуючу функцію для многочленів Шура від $n$ змінних з породжуючими функціями для многочленів Шура від $n-1$ змінної:

**Теорема 3.** *Породжуюча функція для многочленів Шура $\boldsymbol{s}_\lambda(\boldsymbol{x})$ має вигляд*

$$G_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})= \frac{1}{1-\prod\limits_{i=1}^{n} x_i t_i} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} \frac{G_{n-1}(\hat{\boldsymbol{x}}_i,\hat{\boldsymbol{t}}_n)\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_j}{\prod\limits_{j=1}^{i-1}(x_i-x_j)\prod\limits_{j=i+1}^{n}(x_j-x_i)},$$

*де $\hat{\boldsymbol{x}}_i, \hat{\boldsymbol{t}}_i$ – набори символів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і $t_1, t_2, \ldots, t_n$ в яких відсутні $x_i$ і $t_n$ відповідно.*

## 3 Чисельник та знаменник породжуючої функції

З Теореми 3 випливає, що $G_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ є раціональною функцією. Вивчимо властивості цієї функції. Наступна теорема встановлює явний вигляд диференціального рівняння в частинних похідних, якому задовольняє $G_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$

**Теорема 4.** *Для диференціального оператора*

$$\mathcal{D}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{\partial}{\partial t_i}.$$

*виконується $\mathcal{D}_n\left(G_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\right)=0$.*

*Доведення.* Спочатку покажемо, що кожен многочлен Шура $\boldsymbol{s}_\lambda(\boldsymbol{x})$ є однорідним многочленом степеня $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$. Справді, при розкритті визначника

$$\Delta_{\lambda+\delta_n} = \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & x_2^{\lambda_1+n-1} & \ldots & x_n^{\lambda_1+n-1} \\ x_1^{\lambda_2+n-2} & x_2^{\lambda_2+n-2} & \ldots & x_n^{\lambda_2+n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{\lambda_{n-1}+1} & x_2^{\lambda_{n-1}+1} & \ldots & x_n^{\lambda_{n-1}+1} \\ x_1^{\lambda_n} & x_2^{\lambda_n} & \ldots & x_n^{\lambda_n} \end{vmatrix}$$

який знаходиться в чисельнику $\boldsymbol{s}_\lambda(\boldsymbol{x})$, отримаємо суму мономів, кожен з яких є добутком елементів визначника які знаходяться в різних стовпчиках і рядках. Тому загальні степені всіх таких мономів рівні

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n+1+2+\cdots+(n-1).$$

З іншого боку, в чисельнику дробу знаходиться визначник Вандемонда, який є однорідним многочленом і складається з мономів загального степеня

$$1+2+\cdots+(n-1).$$

Оскільки чисельник ділиться без остачі на знаменник то многочлен Шура є однорідним многочленом степеня $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$. Тоді, з теореми Ейлера про однорідні функції випливає, що

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \boldsymbol{s}_\lambda(\boldsymbol{x}) = (\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\boldsymbol{s}_\lambda(\boldsymbol{x}).$$

Враховуючи очевидне співвідношення

$$\left(\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{\partial}{\partial t_i}\right) \boldsymbol{t}^\lambda = (\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\boldsymbol{t}^\lambda,$$

отримуємо потрібний результат

$$\mathcal{D}_n\left(G_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\right) = \mathcal{D}_n\left(\sum_\lambda \boldsymbol{s}_\lambda(\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}^\lambda\right) = \sum_\lambda (\mathcal{D}_n(\boldsymbol{s}_\lambda(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{t}^\lambda + \boldsymbol{s}_\lambda(\boldsymbol{x})\mathcal{D}_n(\boldsymbol{t}^\lambda)) =$$
$$= \sum_\lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \boldsymbol{s}_\lambda(\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}^\lambda - \sum_\lambda \boldsymbol{s}_\lambda(\boldsymbol{x}) \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{\partial}{\partial t_i}\right) \boldsymbol{t}^\lambda = 0.$$

□

Головною технічною проблемою в описі породжуючої функції $G_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ є знаходження явного вигляду чисельника цього дробу. В наступній теоремі ми показуємо, що чисельник задовольняє тому ж диференціальному рівнянню що і породжуюча функція, а також знаходимо значення чисельника при $\boldsymbol{t}=\mathbf{1}$.

**Теорема 5.** *Нехай*

$$G_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \frac{P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}{Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}$$

*Тоді виконується,*

$$\begin{aligned} &(i) \quad \mathcal{D}_n(Q_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})) = 0 \ i\ \mathcal{D}_n(P_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})) = 0;\\ &(ii) \quad P_n(\boldsymbol{x},1,1,\ldots,1) = \prod_{i=3}^{n} Q_i(\boldsymbol{x},1,1,\ldots,1). \end{aligned}$$

*Доведення.* $(i)$ З Теореми 3 випливає, що знаменник $Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ має вигляд

$$Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \prod_{i=1}^{n} Q_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$$

де

$$Q_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \prod_{i=1}^{n}(1-x_i t_1),$$
$$Q_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \prod_{1\le i_1<i_2\le n}(1-x_{i_1}x_{i_2}t_1t_2),$$
$$\cdots$$
$$Q_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = 1-x_1x_2\cdots x_n t_1t_2\cdots t_n$$

В многочлена $Q_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ кожен співмножник є однорідним многочленом однакового степеня відносно наборів змінних $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{t}$. Тому кожен такий співмножник оператор $\mathcal{D}_n$ перетворює в нуль, а отже і $\mathcal{D}_n(Q_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})) = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$. Звідси зразу випливає, що $\mathcal{D}_n(Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})) = 0$.

Оскільки

$$0 = \mathcal{D}_n \left( \frac{P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})}{Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})} \right) = \frac{\mathcal{D}_n(P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}))Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) - P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})\mathcal{D}_n Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}))}{Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})^2} = \frac{\mathcal{D}_n(P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}))}{Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})},$$

то $\mathcal{D}_n(P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})) = 0$.

$(ii)$ Хоча явний вигляд породжуючої функції $G_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ поки що невідомий, проте її спеціалізація $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 1$ має досить простий вираз

$$\sum_{\lambda} \boldsymbol{s}_\lambda(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1 - x_i)} \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{(1 - x_i x_j)},$$

який називається тотожністю Літвуда, див [3], [4].

В термінах функцій $Q_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ тотожність Літвуда перепишеться так

$$\sum_{\lambda} \boldsymbol{s}_\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{Q_1(\boldsymbol{x}, \mathbf{1}) \cdot Q_2(\boldsymbol{x}, \mathbf{1})}.$$

З іншого боку,

$$\sum_{\lambda} \boldsymbol{s}_\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{P(\boldsymbol{x}, \mathbf{1})}{Q(\boldsymbol{x}, \mathbf{1})}.$$

Отже

$$\frac{P(\boldsymbol{x}, \mathbf{1})}{Q(\boldsymbol{x}, \mathbf{1})} = \frac{1}{Q_1(\boldsymbol{x}, \mathbf{1}) \cdot Q_2(\boldsymbol{x}, \mathbf{1})},$$

звідки зразу отримуємо необхідне твердження. □

## Список літератури


[1] Baclawski K. *Character generators for unitary and symplectic groups.* Journal of Mathematical Physics 1983,**24**, 1688. doi: 10.1063/1.525912

[2] Fulton W., Harris, J. Representation theory: a first course. Graduate texts in mathematics, **129**, Springer, 2004.

[3] Littlewood D. The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups. Oxford University Press, New York, 1940.

[4] Macdonald I. Symmetric Functions and Hall Polynomials. Clarendon Press, 1998.

[5] Nunez J. F., Fuertes W. G., Perelomov A. *On an approach for computing the generating functions of the characters of simple Lie algebras.* Journal of Physics A-Mathematical And Theoretical 2014, **47**, 145202. doi:10.1088/1751-8113/47/14/145202

[6] Nunez J. F., Fuertes W. G., Perelomov A. *Generating functions for characters and weight multiplicities of irreducible sl(4)-modules.* Journal of Nonlinear Mathematical Physics 2018, **25**, №4, p.618–632. doi: 10.1080/14029251.2018.1503436

[7] Patera J., Sharp R. T. *Generating functions for characters of group representations and their application.* In: Takasugi, E. (Ed.) Lect. Notes Phys., **94**, Springer, 1979.

[8] Schur I. Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen. Dieterich, 1901.

[9] Stanley R. *The character generator of SU(n).* Journal of Mathematical Physics 1980, **21**, 2321. doi:10.1063/1.524687

*Надійшло 11.01.2022*

---

Bedratyuk L.P. *Generating function for Schur polynomials*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 1 (2022), 41–50.

For the generating function

$$G_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})=\sum_{\lambda}\boldsymbol{s}_{\lambda}(x_1,x_2,\ldots,x_n)t_1^{\lambda_1}t_2^{\lambda_2}\cdots t_n^{\lambda_n},$$

where the Schur polynomials $\boldsymbol{s}_{\lambda}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ are indexed by partitions $\lambda$ of length no more than $n$ the explicit form for $n=2,3$ is calculated and a recurrent relation for an arbitrary $n$ is found. It is proved that $G_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ is a rational function

$$G_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})=\frac{P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}{Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})},$$

the numerator and denominator of which belong to the kernel of the differential operator

$$\mathcal{D}_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}-\sum_{i=1}^{n}t_i\frac{\partial}{\partial t_i}.$$

For the numerator $P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ we find its specialization at $t_1=t_2=\cdots=t_n=1$.