Симотюк М. М.

ДВОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Досліджено коректність задачі з двоточковими умовами за часовою змінною t та умовами періодичності за просторовими координатами $x_1, \ldots, x_p$ для лінійних безтипних рівнянь із частинними похідними. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку розглядуваної задачі у просторах експоненційного типу на торі. Доведено теореми про оцінки знизу послідовності характеристичних визначників задачі.

Ключові слова і фрази: двоточкова задача, рівняння із частинними похідними, малі знаменники, метричний підхід.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
e-mail: *mykhailo.m.symotiuk@gmail.com*

1. Основні позначення

Будемо використовувати такі позначення: Ω_p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $Q_p^T = (0,T)\times\Omega^p$, $T>0$, $k=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $x=(x_1,\ldots,x_p)\in\Omega^p$; $(k,x)=k_1x_1+\ldots+k_px_p$; $D_x=(-i\partial/\partial x_1,\ldots,-i\partial/\partial x_p)$; $C(n,m)$, $1\le m\le n$, – множина всіх наборів $(i_1,\ldots,i_m)$, складених з натуральних чисел $i_1,\ldots,i_m$ таких, що $1\le i_1<\ldots<i_m\le n$; кількість усіх наборів, які належать до множини $C(n,m)$, дорівнює C_n^m; для набору $\omega=(i_1,\ldots,i_m)\in C(n,m)$ символом $\operatorname{set}\omega$ позначатимемо множину $\{i_1,\ldots,i_m\}$; $\delta_{j,q}$ – символ Кронекера, $v_k(\alpha)=(1+|k|^\alpha)$; $w_k(\alpha,\beta,\gamma)=v_k(\alpha)\exp(\beta v_k(\gamma))$; $W^\gamma_{\alpha,\beta}$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, – простір, який є поповненням множини скінченних тригонометричних поліномів $\varphi=\sum\varphi_k\exp(ik,x)$ за нормою

$$\|\varphi;W^\gamma_{\alpha,\beta}\|=\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}|\varphi_k|^2w_k^2(\alpha,\beta,\gamma)};$$

$C^n([0,T];W^\gamma_{\alpha,\beta})$ – банахів простір функцій $u(t,x)$ таких, що для кожного фіксованого $t\in[0,T]$ похідні $\partial^ju(t,x)/\partial t^j$, $0\le j\le n$, належать до простору $W^\gamma_{\alpha,\beta}$ і як елементи цього простору є неперервними за t на $[0,T]$; норму в просторі $C^n([0,T];W^\gamma_{\alpha,\beta})$ задаємо формулою

$$\left\|u(t,x);C^n([0,T];W^\gamma_{\alpha,\beta})\right\|=\sum_{j=0}^n\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial^ju(t,x)}{\partial t^j};W^\gamma_{\alpha,\beta}\right\|.$$

УДК 517.95, 511.42
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35G15.

2. Постановка задачі.

Розглянемо таку двоточкову задачу:

$$L_n\left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x\right) u(t,x) \equiv \frac{\partial^n u}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j}(D_x)\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = 0, \quad (t,x) \in Q_p^T, \tag{1}$$

$$\begin{cases} U_j[u] \equiv \dfrac{\partial^{l_j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=0} = \varphi_j(x),\ j=1,\dots,m,\ 1 \le m < n,\ x \in \Omega_p, \\ U_{r+j}[u] \equiv \dfrac{\partial^{r_j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=T} = \varphi_{r+j}(x),\ j=1,\dots,n-m,\ x \in \Omega_p, \end{cases} \tag{2}$$

де $A_j(\xi)$, $j=1,\dots,n$, – многочлени з комплексними коефіцієнтами вигляду

$$A_j(\xi) = \sum_{|s_q| \le N_{j,q}} A_j^s \xi_1^{s_1}\dots\xi_p^{s_p}, \quad A_j^s \in \mathbb{C}, \quad s=(s_1,\dots,s_p) \in \mathbb{Z}_+^p, \quad N_{j,q} \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Вважаємо, що для порядків похідних в умовах (2) справджуються нерівності

$$1 \le l_1 < \dots < l_m \le n, \quad 1 \le r_1 < \dots < r_{n-m} \le n.$$

Важливими частковими випадками досліджуваної задачі (1), (2) є:

1) задача з двома кратними вузлами інтерполяції [4, 10, 12, 13], коли

$$(l_1,\dots,l_m) = (1,\dots,m), \quad (r_1,\dots,r_{n-m}) = (1,\dots,n-m); \tag{4}$$

2) задача типу Діріхле для рівнянь парного порядку за змінною t [2, 14], коли $n = 2m$, і

$$(l_1,\dots,l_m) = (r_1,\dots,r_m) = (1,3,\dots,2m-1); \tag{5}$$

3) задача типу Діріхле-Неймана для рівнянь парного порядку за змінною t, коли $n=2m$, і [3, 11]

$$(l_1,\dots,l_m) = (1,3,\dots,2m-1), \quad (r_1,\dots,r_m) = (2,4,\dots,2m). \tag{6}$$

Інтерес до вивчення крайових задач з умовами типу (2) для рівнянь із частинними похідними зумовлений побудовою загальної теорії крайових задач, а також зумовлений тим, що такі задачі виникають при математичному моделюванні багатьох фізичних процесів [7, 8, 9].

Розв'язність двоточкових крайових задач з умовами вигляду (2), (4) для рівнянь із частинними похідними досліджено у роботах [4, 10, 12, 13]. Так, у праці [10] встановлено умови коректної розв'язності у соболєвській шкалі просторів задачі з умовами (2), (4) для випадку гіперболічних рівнянь, які містять похідні за змінною t тільки парного порядку. Ці умови полягають у виконанні степеневих оцінок знизу для послідовності певних характеристичних визначників, пов'язаних із задачею. Для дослідження питання про виконання таких оцінок у праці [10] використано метричний підхід і запропоновано методику доведення метричних оцінок знизу для визначників задач з умовами (2), (4).

За допомогою цієї методики у [10] встановлено результат про виконання степеневих оцінок знизу для визначників таких задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, компонентами яких є коефіцієнти рівняння та значення T правого вузла інтерполяції. Із цитованого результату випливає розв'язність задач з умовами (2), (4) для гіперболічних рівнянь, які містять похідні за змінною t тільки парного порядку, у соболєвській шкалі просторів для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, компонентами яких є коефіцієнти рівняння та число T.

У праці [4] методику роботи [10] узагальнено на випадок крайових задач (2), (4) для безтипних рівнянь із частинними похідними, які містять похідні за змінною t як парного, так і непарного порядків. Із доведених у [4] метричних оцінок знизу для визначників задач з умовами (2), (4) для безтипних рівнянь випливає розв'язність цих задач у просторах періодичних функцій експоненційного типу для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених з коефіцієнтів рівняння та числа T.

У роботах [12, 13] запропоновано новий, порівняно з методами в [4, 10], метод доведення метричних теорем про оцінки знизу для визначників задач з умовами (2), (4) для безтипних рівнянь із частинними похідними. На основі цього методу у [12, 13] встановлено розв'язність таких крайових задач для майже всіх чисел $T > 0$ для довільного безтипного рівняння у просторах періодичних функцій експоненційного типу.

У роботах [2, 3, 11] встановлено розв'язність задач з умовами (2), (5) ((2), (6)) для рівнянь із частинними похідними, які містять похідні за змінною t тільки парного порядку, для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених з коефіцієнтів рівняння та числа T. Важливою особливістю таких задач є те, що відповідні характеристичні визначники допускають факторизацію, це спрощує метричний аналіз оцінок знизу для них. Для безтипних рівнянь рівнянь, які містять похідні за змінною t як парного, так і непарного порядків, характеристичні визначники задач з умовами (2), (5) ((2), (6)), взагалі кажучи, не факторизуються. Для випадку задачі з умовами (2), (5) для безтипного рівняння (1) у праці [14] встановлено виконання оцінок знизу для характеристичних визначників для майже всіх чисел T.

Дана робота розвиває і доповнює дослідження, проведені у [2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14], на випадок складніших двоточкових умов (2).

3. Умови єдиності розв'язку задачі

Через $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_{m(k)}(k)$, $m(k) \le n$, будемо позначати різні λ-корені рівняння

$$L_n(\lambda, k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{7}$$

а через γ позначимо число

$$\gamma = \max_{1 \le j \le n} \{N_j / j\}. \tag{8}$$

Добре відомо (див. [5, розд. 5, §7]), що скінченними є числа

$$\begin{gathered} M_1 = \sup_{k \in \mathbb{Z}^p} \max_{1 \le j \le m(k)} \left\{ \frac{|\lambda_j(k)|}{\upsilon_k(\gamma)} \right\}, \\ M_2 = \max \left\{ 0; \sup_{k \in \mathbb{Z}^p} \max_{1 \le j \le m(k)} \left\{ \frac{\operatorname{Re} \lambda_j(k)}{\upsilon_k(\gamma)} \right\} \right\}. \end{gathered} \tag{9}$$

Тоді для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned} |\lambda_j(k)| &\le M_1 w_k(\gamma, 0, 0), \quad j = 1, \ldots, m(k), \\ \operatorname{Re} \lambda_j(k) &\le M_2 w_k(\gamma, 0, 0), \quad j = 1, \ldots, m(k), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\max_{t \in [0,T]} |\exp(\lambda_j(k)t)| \le \widetilde{M_2} w_k(0, M_2 T, \gamma), \quad \widetilde{M_2} = \exp(M_2 T), \quad j = 1, \ldots, m(k). \tag{11}$$

Розв'язок задачі (1), (2) з простору $C^n([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(ik, x). \tag{12}$$

Кожна функція $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком такої двоточкової задачі:

$$L_n\left(d/dt, k\right) u_k(t) = 0, \tag{13}$$

$$u_k^{(l_j-1)}(0) = \varphi_{j,k}, \;\; j = 1, \ldots, m, \quad u_k^{(r_j-1)}(T) = \varphi_{r+j,k}, \;\; j = 1, \ldots, n-m, \tag{14}$$

де $\varphi_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, – коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$, відповідно. Через $f_1(t,k), \ldots, f_n(t,k)$ позначимо таку фундаментальну систему розв'язків рівняння (13), що $f_q^{(j-1)}(0,k) = \delta_{j,q}$, $j, q = 1, \ldots, n$. Розв'язок задачі (13), (14) з класу $C^n[0,T]$ зображується формулою

$$u_k(t) = \sum_{q=1}^{n} C_{k,q} f_q(t,k), \tag{15}$$

де сталі $C_{k,q}$, $q = 1, \ldots, n$, визначаються зі системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{q=1}^{n} C_{k,q} f_q^{(l_j-1)}(0,k) = \varphi_{j,k}, \quad j = 1, \ldots, m, \\ \displaystyle\sum_{q=1}^{n} C_{k,q} f_q^{(r_j-1)}(T,k) = \varphi_{m+j,k}, \quad j = 1, \ldots, n-m. \end{cases} \tag{16}$$

З перших m рівнянь системи (16) випливає, що $C_{k,l_q} = \varphi_{q,k}$, $q = 1, \ldots, m$. Тоді останні $(n-m)$ рівнянь системи (16) набувають вигляду

$$\sum_{q=1}^{n-m} C_{k,\widetilde{r}_q} f_{\widetilde{r}_q}^{(r_j-1)}(T,k) = \varphi_{m+j,k} - \sum_{q=1}^{m} \varphi_{q,k} f_{l_q}^{(r_j-1)}(T,k), \quad j = 1, \ldots, n-m. \tag{17}$$

Визначник лінійної системи (17) позначимо через $\Delta(k)$:

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} f_{\widetilde{r}_1}^{(r_1-1)}(T,k) & \ldots & f_{\widetilde{r}_{n-m}}^{(r_1-1)}(T,k) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{\widetilde{r}_1}^{(r_{n-m}-1)}(T,k) & \ldots & f_{\widetilde{r}_{n-m}}^{(r_{n-m}-1)}(T,k) \end{vmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{18}$$

де $\widetilde{r}_1, \ldots, \widetilde{r}_{n-m}$ – такі числа, що $\widetilde{r}_1 < \ldots < \widetilde{r}_{n-m}$ і $\{\widetilde{r}_1, \ldots, \widetilde{r}_{n-m}\} = \{1, \ldots, n\} \backslash \{l_1, \ldots, l_m\}$.

Для дослідження єдиності розв'язку задачі (1), (2) будемо використовувати умови

$$\left.\frac{\partial^{l_j-1} u(t,x)}{\partial t^{l_j-1}}\right|_{t=0} = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \quad \left.\frac{\partial^{r_j-1} u(t,x)}{\partial t^{r_j-1}}\right|_{t=T} = 0, \; j = 1, \ldots, n-m. \tag{19}$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $C^n([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$, *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \quad \Delta(k) \neq 0. \tag{20}$$

Доведення. Необхідність. Якщо $\Delta(k^0) = 0$ для деякого $k^0 \in \mathbb{Z}^p$, то при $k = k^0$ система (17) з нульовими правими частинами ($\varphi_{j,k^0} = 0$, $j = 1,\ldots,n$) має нетривіальний розв'язок $\widetilde{C}_{k^0,\widetilde{r}_q}$, $q = 1,\ldots,n-m$. Тоді функція $v(t,x) = \sum\limits_{q=1}^{n-m} \widetilde{C}_{k^0,\widetilde{r}_q} f_{\widetilde{r}_q}(t,k^0)\exp(ik^0,x)$ належить до простору $C^n([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ і є ненульовим розв'язком однорідної задачі (1), (19). Таким чином, розв'язок задачі (1), (2), якщо він існує, не буде єдиним.

Достатність. Припустимо, що задача (1), (2) має два різні розв'язки u_1, u_2 з простору $C^n([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$. Тоді функція $u = u_1 - u_2$ є нетривіальним розв'язком задачі (1), (19). Для коефіцієнтів Фур'є $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, функції u справедливі зображення (15), в яких слід прийняти, що сталі $C_{k,q}$, $q = 1,\ldots,n$, є розв'язками однорідної системи лінійних рівнянь, визначник якої дорівнює $\Delta(k)$. Оскільки, згідно з умовою теореми, $\Delta(k) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, то $C_{k,q} = 0$, $q = 1,\ldots,n$, для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, а, отже, $u_k(t) \equiv 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$. Звідси отримуємо, що $u \equiv 0$, всупереч припущенню. □

Наступні твердження описують достатні умови нетривіальної розв'язності однорідної двоточкової задачі (1), (19).

Теорема 2. *Якщо для нескінченної кількості векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *визначник* $\Delta(k)$ *перетворюється в нуль, тобто множина* $K = \{k \in \mathbb{Z}^p : \Delta(k) = 0\}$ *є нескінченною, то однорідна задача* (1), (19) *має нескінченну кількість лінійно незалежних розв'язків в просторі* $C^n([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$.

Доведення. Як і при доведенні необхідності в теоремі 1, легко показати, що при виконанні умов теореми 2 задача (1), (19) має в просторі $C^n([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ нескінченну кількість розв'язків вигляду

$$v_k(t,x) = \sum_{q=1}^{n-m} \widetilde{C}_{k,\widetilde{r}_q} f_{\widetilde{r}_q}(t,k)\exp(ik,x), \quad k \in K, \tag{21}$$

де для кожного $k \in K$ сталі $\widetilde{C}_{k,\widetilde{r}_q}$, $q = 1,\ldots,n-m$, не можуть одночасно дорівнювати нулеві. Доведемо, що отримані розв'язки (21) є лінійно незалежними в просторі $C^n([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$. Припустимо, всупереч цьому, що для деякого $N \in \mathbb{N}$ існують такі $k_1,\ldots,k_N \in K$ ($k_j \neq k_q$, $j \neq q$) та числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_N \in \mathbb{C}$, які одночасно не дорівнюють нулеві, що

$$\lambda_1 v_{k_1}(t,x) + \ldots + \lambda_N v_{k_N}(t,x) = 0.$$

Згідно з означенням норми в $C^n([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$, звідси випливає, що для довільного j, $j = 1,\ldots,N$, функції $w_j(t) \equiv \sum\limits_{q=1}^{n-m} \lambda_j \widetilde{C}_{k_j,\widetilde{r}_q} f_{\widetilde{r}_q}(t,k)$ тотожньо дорівнюють нулеві в просторі $C^n[0,T]$. З незалежності функцій $f_{\widetilde{r}_1}(t,k),\ldots,f_{\widetilde{r}_{n-m}}(t,k)$ випливає, що $\lambda_j \widetilde{C}_{k_j,\widetilde{r}_q} = 0$ для всіх q, $q = 1,\ldots,n-m$. Оскільки серед сталих $\widetilde{C}_{k_j,\widetilde{r}_q}$, $q = 1,\ldots,n-m$, хоча б одна відмінна від нуля, то $\lambda_j = 0$. Внаслідок довільності j отримуємо, що $\lambda_1 = \ldots = \lambda_N = 0$, тобто функції (21) є лінійно незалежними. □

Теорема 3. *Якщо для деякого $k^0 \in \mathbb{Z}^p$ рівняння* (7) *має прості корені $\lambda_1(k^0), \ldots, \lambda_n(k^0)$ такі, що*

$$\{i\lambda_1(k^0)T, \ldots, i\lambda_n(k^0)T\} \subset 2\pi\mathbb{Z},$$

то задача (1), (19), *у якій $l_{j_0} = r_{q_0}$ для деяких $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$, $q_0 \in \{1, \ldots, n-m\}$, має в просторі $C^n([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ нетривіальний розв'язок.*

Доведення. Досить встановити, що $\Delta(k^0) = 0$. Оскільки корені $\lambda_1(k^0), \ldots, \lambda_n(k^0)$ є простими, то функції $\exp(\lambda_q(k^0)t)$, $q = 1, \ldots, n$, є фундаментальною системою розв'язків рівняння (13). Нехай $\Delta_1(k^0) = \det \|U_j[\exp(\lambda_q(k^0)t)]\|^n_{j,q=1}$. Визначники $\Delta(k^0)$ та $\Delta_1(k^0)$ відрізняються сталим множником, який дорівнює значенню в нулі вронскіана фундаментальної системи $\exp(\lambda_q(k^0)t)$, $q = 1, \ldots, n$, тобто

$$\Delta(k^0) = \Delta_1(k^0) \prod_{n \geq j > q \geq 1} (\lambda_j(k^0) - \lambda_q(k^0))^{-1}.$$

Якщо виконується умова теореми 3, то визначник $\Delta_1(k^0)$ має два однакові рядки – j_0-ий та $(m+q_0)$-ий:

$$\mathrm{col}(\underbrace{\lambda_1^{l_{j_0}-1}(k^0), \ldots, \lambda_n^{l_{j_0}-1}(k^0))}_{n}) = \mathrm{col}(\underbrace{\lambda_1^{r_{q_0}-1}(k^0)\exp(\lambda_1(k^0)T), \ldots, \lambda_n^{r_{q_0}-1}(k^0)\exp(\lambda_n(k^0)T)}_{n}).$$

Тому $\Delta_1(k^0) = 0$, а, отже, й $\Delta(k^0) = 0$. Теорему доведено. □

Теорема 4. *Нехай у рівнянні* (1) *кількість p просторових змінних дорівнює* 1, *і нехай рівняння* (1) *є однорідним за порядком диференціювання. Якщо многочлен $L_n(\mu, 1)$ має прості корені $\mu_1, \ldots, \mu_n$ такі, що $i\mu_1 T \in \pi\mathbb{Q}$, $\mu_1 \neq 0$, $\mu_1^{-1}\mu_2, \ldots, \mu_1^{-1}\mu_n \in \mathbb{Q}$, то задача* (1), (19), *у якій $l_{j_0} = r_{q_0}$ для деяких $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$, $q_0 \in \{1, \ldots, n-m\}$, має в просторі $C^n([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ зліченну кількість лінійно незалежних розв'язків.*

Доведення теореми 4 випливає з теорем 2, 3.

Проаналізуємо можливість виконання або порушення умови єдиності розв'язку для конкретних прикладів двоточкових задач.

Приклад 1. Розглянемо задачу

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + a^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \quad (t,x) \in Q_1^T, \tag{22}$$

$$u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = 0, \qquad u(T,x) = 0, \quad u_t(T,x) = 0, \quad x \in \Omega_1. \tag{23}$$

Якщо $a^4 = 1$, то визначник $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, обчислюється за формулою

$$\Delta(k) = \begin{cases} \dfrac{T^4}{12}, & \text{якщо} \quad k = 0, \\ \dfrac{\mathrm{ch}(\sqrt{2}kT) + \cos(\sqrt{2}kT) - 2}{4k^4}, & \text{якщо} \quad k \neq 0. \end{cases}$$

Оскільки $\operatorname{ch} t + \cos t > 2$ для всіх $t > 0$, то у випадку $a^4 = 1$ задача (22), (23) має тільки тривіальний розв'язок в просторі $C^4([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$. Якщо ж $a^4 = -1$, то для визначника $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, маємо зображення

$$\Delta(k) = \begin{cases} \dfrac{T^4}{12}, & \text{якщо} \quad k = 0, \\ \dfrac{1 - \operatorname{ch}(kT)\cos(kT)}{2k^4}, & \text{якщо} \quad k \neq 0. \end{cases}$$

Очевидно, що функція $g(t) = 1 - \operatorname{ch} t \cos t$ має зліченну множину додатних нулів $\{z_m : m \in \mathbb{N}\}$. Якщо число T є таким, що $T = \frac{z_{m_0}}{k_0}$ для деяких $m_0, k_0 \in \mathbb{N}$, то задача (22), (23) має нетривіальний розв'язок, бо $\Delta(k^0) = 0$.

Приклад 2. Розглянемо для рівняння (22) задачу з умовами

$$u(0,x) = 0, \quad u_{tt}(0,x) = 0, \quad u(T,x) = 0, \quad u_{tt}(T,x) = 0, \quad x \in \Omega_1. \tag{24}$$

Якщо $a^4 = 1$, то для задачі (22), (24) маємо

$$\Delta(k) = \begin{cases} -T^2, & \text{якщо} \quad k = 0; \\ -\dfrac{\operatorname{ch}(\sqrt{2}kT) - \cos(\sqrt{2}kT)}{2k^2}, & \text{якщо} \quad k \neq 0. \end{cases} \tag{25}$$

З рівності (25) випливає, що у випадку $a^4 = 1$ задача (22), (24) має тільки тривіальний розв'язок в просторі $C^4([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$. Якщо $a^4 = -1$, то

$$\Delta(k) = \begin{cases} -T^2, & \text{якщо} \quad k = 0, \\ \dfrac{-\operatorname{sh}(kT)\sin(kT)}{k^2}, & \text{якщо} \quad k \neq 0. \end{cases}$$

Якщо $T \notin \pi\mathbb{Q}$, то у випадку $a^4 = -1$ задача (22), (24) має тільки тривіальний розв'язок в просторі $C^4([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$, якщо $T \in \pi\mathbb{Q}$, то задача (22), (24) має нетривіальний розв'язок.

Приклад 3. Розглянемо для рівняння (22) задачу з умовами

$$u(0,x) = 0, \quad u_{tt}(0,x) = 0, \quad x \in \Omega_1, \quad u_t(T,x) = 0, \quad u_{ttt}(T,x) = 0, \quad x \in \Omega_1. \tag{26}$$

Якщо $a^4 = 1$, то для задачі (22), (24) маємо

$$\Delta(k) = \begin{cases} -1, & \text{якщо} \quad k = 0; \\ -\dfrac{\operatorname{ch}(\sqrt{2}kT) + \cos(\sqrt{2}kT)}{2}, & \text{якщо} \quad k \neq 0. \end{cases} \tag{27}$$

З рівності (27) випливає, що у випадку $a^4 = 1$ задача (22), (26) має тільки тривіальний розв'язок в просторі $C^4([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$. Якщо $a^4 = -1$, то визначник $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, обчислюється за формулою

$$\Delta(k) = \begin{cases} -1, & \text{якщо} \quad k = 0, \\ -\operatorname{ch}(kT)\cos(kT), & \text{якщо} \quad k \neq 0. \end{cases}$$

Якщо $T \neq \frac{\pi(2m+1)}{2k}$ при жодних $k, m \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, то у випадку $a^4 = -1$ задача (22), (26) має тільки тривіальний розв'язок в просторі $C^4([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$, якщо ж $T = \frac{\pi(2m_0+1)}{k_0}$ для деяких цілих $m_0, k_0, k_0 \neq 0$, то задача (22), (26) має нетривіальний розв'язок, бо в цьому випадку $\Delta(k^0) = 0$.

Приклад 4. Розглянемо наступну задачу:

$$\frac{\partial^{2n} u}{\partial t^{2n}} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \frac{\partial^{2n} u}{\partial t^{2j} \partial x^{2n-2j}} = 0, \quad (t,x) \in Q_1^T, \tag{28}$$

$$\left.\frac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=T} = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad x \in \Omega_1, \tag{29}$$

де a_j, $j = 1, \dots, n$, – невід'ємні дійсні числа. Задача (28), (29) має лише нульовий розв'язок в просторі $C^{2n}([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$. Доведення цього факту зручніше встановити не безпосереднім обчисленням відповідного визначника і наступною перевіркою відмінності його від нуля, а інакшими міркуваннями. Наведемо їх. Припустимо, що існує відмінна від тотожного нуля функція $u \in C^{2n}([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$, яка є розв'язком задачі (28), (29). Тоді існує таке $k \in \mathbb{Z}$, що k-ий коефіцієнт Фур'є функції $u(t,x)$, який позначимо через $u_k(t)$, є відмінним від тотожного нуля. Функція $u_k \in C^{2n}[0,T]$ є розв'язком задачі

$$u_k^{(2n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} k^{2n-2j} a_j u_k^{(2j)}(t) = 0, \tag{30}$$

$$u_k^{(j-1)}(0) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad u_k^{(j-1)}(T) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{31}$$

Домножимо рівняння (30) на $\overline{u}_k(t)$ і отриману рівність проінтегруємо на відрізку $[0,T]$. У результаті дістанемо, що

$$\int_0^T u_k^{(2n)}(t)\overline{u}_k(t)dt + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} k^{2n-2j} a_j \int_0^T u_k^{(2j)}(t)\overline{u}_k(t)dt = 0. \tag{32}$$

Інтегруючи частинами і враховуючи умови (31), легко переконатися, що

$$\int_0^T u_k^{(2j)}(t)\overline{u}_k(t)dt = (-1)^j \int_0^T |u_k^{(j)}(t)|^2 dt, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Тому з рівності (32) одержуємо, що

$$\int_0^T |u_k^{(n)}(t)|^2 dt + \sum_{j=0}^{n-1} a_j k^{2n-2j} \int_0^T |u_k^{(j)}(t)|^2 dt = 0. \tag{33}$$

Оскільки $a_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, а функція $u_k^{(n)}(t)$ – неперервна, то з (33) випливає, що $u_k^{(n)}(t) = 0$ в кожній точці $t \in [0,T]$. Отже, $u_k(t)$ – многочлен $(n-1)$-го степеня, який має нуль $(n-1)$-го порядку в точці $t = 0$ та нуль $(n-1)$-го порядку в точці $t = T$. Тому $u_k(t) \equiv 0$, всупереч припущенню.

4. Умови існування розв'язку задачі

Припустимо, що умова єдиності (20) виконується. Застосовуючи правило Крамера для знаходження невідомих системи (17), на підставі (12), (15) отримуємо формальне зображення розв'язку задачі (1), (2) у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\exp(ik,x)\left\{\sum_{q=1}^{m}\varphi_{q,k}f_{l_q}(t,k)+\right.$$
$$\left.+\sum_{q=1}^{n-m}\sum_{j=1}^{n-m}\frac{\Delta_{j,q}(k)}{\Delta(k)}f_{\widetilde{r}_q}(t,k)\left(\varphi_{m+j,k}-\sum_{s=1}^{m}\varphi_{s,k}f_{l_s}^{(r_j-1)}(T,k)\right)\right\}. \tag{34}$$

де $\Delta_{j,q}(k)$, $j=1,\ldots,n-m$, $q=1,\ldots,n-m$, – алгебричне доповнення елемента $f_{\widetilde{r}_q}^{(r_j-1)}(T,k)$ у визначнику $\Delta(k)$.

Збіжність ряду (34) у просторах $C^n([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$, взагалі кажучи, пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки $|\Delta(k)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної множини векторів $k\in\mathbb{Z}^p$. Про це свідчать приклади, наведені у [9].

Позначимо: $R=r_1+\ldots+r_{n-m}$, $\widetilde{R}=\widetilde{r}_1+\ldots+\widetilde{r}_{n-m}$,

$\alpha_j=(n(n-m+2)+1+R-\widetilde{R}-l_j)\gamma$, $\beta_j=(n-m+1)M_2T$, $j=1,\ldots,m$,

$\alpha_j=(n(n-m+1)^2+1+R-\widetilde{R}-r_j)\gamma$, $\beta_j=(n-m)M_2T$, $j=m+1,\ldots,n$,

де сталі γ, M_2 визначені формулами (8), (9).

Теорема 5. *Нехай справджується умова* (20) *та існують такі* $\omega\in\mathbb{R}$, *що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(k)|\geq w_k(-\omega,-\delta,\gamma). \tag{35}$$

Якщо $\varphi_j\in W^{\gamma}_{\alpha_j+\alpha+\omega,\beta_j+\beta+\delta}$, $j=1,\ldots,n$, *то в* $C^n([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який зображується рядом* (34) *і неперервно залежить від* φ_j, $j=1,\ldots,n$.

Доведення. За лемою 12.7.7 у [6] для функцій $f_q(t,k)$, $q=1,\ldots,n$, виконуються оцінки

$$|f_q^{(j-1)}(t,k)|\leq C_1w_k((n+j-q)\gamma,M_2t,\gamma),\quad t\geq 0, \tag{36}$$

З оцінок (36) одержимо, що

$$|\Delta_{j,q}(k)|\leq C_2w_k(n(n-m)+R-\widetilde{R}-n-r_j+\widetilde{r}_q,(n-m-1)M_2T,\gamma),$$
$$j,q=1,\ldots,n-m. \tag{37}$$

З нерівностей (35)–(37) для коефіцієнта Фур'є $u_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, ряду (35) дістанемо оцінки

$$|u_k^{(q)}(t)|^2\leq C_3\sum_{j=1}^{n}|\varphi_{j,k}|^2w_k(\alpha_j+\omega,\beta_j+\delta,\gamma),\quad q=0,1,\ldots,n. \tag{38}$$

Тоді з оцінок (38) дістанемо, що

$$\left\|u(t,x);C^n([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})\right\|\leq C_4\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_j;W^{\gamma}_{\alpha_j+\alpha+\omega,\beta_j+\beta+\delta}\right\|. \tag{39}$$

З нерівності (39) випливає доведення теореми. □

Теорему 5 можна уточнити для рівнянь (1), які мають вигляд

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\mu_j B(D_x)\right)u(t,x)=0,\quad (t,x)\in Q_p^T, \tag{40}$$

де $\mu_j\in\mathbb{C}$, $j=1,\dots,n$, $\mu_j\neq\mu_q$, $j\neq q$, а диференціальний многочлен $B(D_x)$ степеня $\eta\in\mathbb{N}$ є таким, що виконується умова

$$\inf_{k\in\mathbb{Z}^p}|B(k)|/v_k(\eta)>0. \tag{41}$$

Легко перевірити, що в цьому випадку для фундаментальної системи $f_1(t,k),\dots,f_n(t,k)$ виконуються оцінки

$$|f_q^{(j-1)}(t,k)|\le C_5 w_k((j-q)\eta,M_3t,\eta),\quad t\ge 0, \tag{42}$$

де $M_3=\max\left\{0;\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\max\limits_{1\le j\le n}\left\{\frac{\operatorname{Re}\mu_j B(k)}{v_k(\eta)}\right\}\right\}$.

Позначимо:
$\theta_j=(n+1+R-\widetilde{R}-l_j)\eta$, $j=1,\dots,m$, $\theta_j=(n+1+R-\widetilde{R}-r_j)\eta$, $j=m+1,\dots,n$,
$\varkappa_j=(n-m+1)M_3T$, $j=1,\dots,m$, $\varkappa_j=(n-m)M_3T$, $j=m+1,\dots,n$.

Теорема 6. *Нехай рівняння* (1) *має вигляд* (40), *справджується умова* (20) *та існують сталі* $\omega,\delta\in\mathbb{R}$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(k)|\ge w_k(-\omega,-\delta,\eta). \tag{43}$$

Якщо $\varphi_j\in W^{\eta}_{\theta_j+\alpha+\omega,\varkappa_j+\beta+\delta}$, $j=1,\dots,n$, *то в* $C^n([0,T];W^{\eta}_{\alpha,\beta})$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який зображується рядом* (35) *і неперервно залежить від* φ_j, $j=1,\dots,n$.

Доведення теореми є аналогічним до доведення теореми 5 і проводиться з використанням оцінок (42).

5. Оцінки знизу визначника $\Delta(k)$

З'ясуємо питання про можливість виконання нерівностей (43) для окремого випадку факторизованого рівняння (40).

Теорема 7. *Нехай рівняння* (1) *має вигляд* (40), *де* $\mu_j>0$, $j=1,\dots,n$, *а* $B(D_x)$ *є таким, що виконується умова* (41) *і* $B(k)>0$ *для всіх* $k\in\mathbb{Z}^p$. *Якщо виконується умова*

$$\forall\,\omega,\sigma\in C(n,n-m),\ \omega\neq\sigma:\quad S_\omega\neq S_\sigma, \tag{44}$$

де символ $S_\omega,\omega=(i_1,\dots,i_{n-m})\in C(n,n-m)$, *позначає суму* $\mu_{i_1}+\ldots+\mu_{i_{n-m}}$, *то оцінка* (43) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$, *якщо* $\omega>\eta(C_n^2+n-(L+R))$, $L=l_1+\ldots+l_m$, $\delta=-b_1T\mu$, $b_1=\inf\limits_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}B(k)/v_k(\eta)$, $\mu=\max\limits_{\omega\in C(n,n-m)}S_\omega$.

Доведення. З умови (44) випливає, що числа $\mu_1, \dots, \mu_n$ є попарно різними. Тоді функції $e^{\mu_1 B(k)t}, \dots, e^{\mu_n B(k)t}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (13). Тому визначники

$$\Delta(k) = \det \|U_j[f_q(t,k)]\|_{j,q=1}^n, \quad \Delta_1(k) := \det \|U_j[\exp(\mu_q B(k)t)]\|_{j,q=1}^n,$$

пов'язані рівністю $\Delta(k) = \Delta_1(k)/W(k)$, де $W(k) = \prod\limits_{n\geq j>q\geq 1} (\mu_j B(k) - \mu_q B(k))$ – визначник матриці переходу від фундаментальної системи $f_1(t,k), \dots, f_n(t,k)$ до фундаментальної системи $e^{\mu_1 B(k)t}, \dots, e^{\mu_n B(k)t}$. Розкриваючи визначник $\Delta_1(k)$ за правилом Лапласа за мінорами перших m рядків, дістанемо, що

$$\Delta_1(k) = B^{L+R}(k) \sum_{\omega=(i_1,\dots,i_m)\in C(n,m)} (-1)^{s_\omega} H_\omega H_{\sigma(\omega)} \exp(S_{\sigma(\omega)} B(k)T), \tag{45}$$

де $s_\omega = C_{m+1}^2 + i_1 + \ldots + i_m$, набір $\sigma(\omega) = (j_1, \dots, j_{n-m}) \in C(n, n-m)$ однозначно визначається за набором $\omega = (i_1, \dots, i_m) \in C(n,m)$ умовою $\operatorname{set}\sigma(\omega) \cap \operatorname{set}\omega = \varnothing$, а символи H_ω, $H_{\sigma(\omega)}$ позначають визначники типу Вандермонда:

$$H_\omega = \det \|\mu_{i_q}^{l_j - 1}\|_{j,q=1}^m, \quad \omega = (i_1, \dots, i_m),$$

$$H_{\sigma(\omega)} = \det \|\mu_{j_q}^{r_j - 1}\|_{j,q=1}^{n-m}, \quad \sigma(\omega) = (j_1, \dots, j_{n-m}).$$

Нехай $\sigma_0 \in C(n, n-m)$ – такий набір, що $S_{\sigma_0} = \max\limits_{\sigma\in C(n,n-m)} S_\sigma$, через ω_0 позначимо такий набір з $C(n,m)$, що $\operatorname{set}\omega_0 \cap \operatorname{set}\sigma_0 = \varnothing$. Оскільки виконується умова (44), то

$$\begin{gathered} \forall \omega \in C(n,m)\ \forall \sigma \in C(n, n-m) \quad H_\omega H_\sigma \neq 0, \\ \forall \sigma \in C(n, n-m) \quad S_{\sigma_0} > S_\sigma. \end{gathered} \tag{46}$$

З рівності (45) та нерівностей (46) випливає, що нерівність

$$\left| \sum_{\omega\in C(n,m)} (-1)^{s_\omega} H_\omega H_{\sigma(\omega)} \exp(S_{\sigma(\omega)} B(k)T) \right| \geq \frac{1}{2} |H_{\omega_0} H_{\sigma_0}| \exp(S_{\sigma_0} B(k)T)$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) $k \in \mathbb{Z}^p$. З отриманої нерівності, оцінок $B(k) \geq b_1 v_k(\eta)$, $\exp(S_{\sigma_0} B(k)T) \geq \exp(S_{\sigma_0} b_1 T v_k(\eta))$, $k \in \mathbb{Z}^p$, та формули (45), випливає твердження теореми. □

Зауваження 1. *Зауважимо, що питання про виконання нерівностей* (35), (43) *у загальному випадку залишається відкритим. Ці нерівності можна встановити із залученням метричного підходу та результатів метричної теорії чисел [1, 9].*

Список літератури

[1] Bernik V.I., Melnychuk Yu.V. Diophantine approximations and the Hausdorff dimension. Nauka i Tekhnika, Minsk, 1988. (Russian)

[2] Bilusyak N.I., Ptashnyk B.Yo. *Boundary-value problem for equations with variable coefficients not solved relative to the highest derivative with respect to time.* Math. Metody ta Fiz.-Mekh. Polya 2008, **51** (2), 42–52. (Ukrainian)

[3] Bilusyak N.I., Ptashnyk B.Yo., Repetylo S.M. *Boundary-value problem with mixed conditions for weakly nonlinear hyperbolic equations.* Math. Metody ta Fiz.-Mekh. Polya 2010, **53** (3), 74–84. (Ukrainian)

[4] Bobyk I.O., Ptashnyk B.Yo. *Boundary value problems for hyperbolic equations with constant coefficients.* Ukr. math. journ. 1994, **46** (7), 795–802. (Ukrainian)

[5] Faddeev D.K., Sominskiy I.S. Collection of problems in higher algebra. Vyshcha Shkola, Kyiv, 1971. (Ukrainian)

[6] Hörmander Lars. The Analysis of Linear Partial Differential Operators II: Springer-Verlag, 2004, 395 p.

[7] Nytrebych Z.M., Ilkiv V.S., Pukach P.Ya. *Homogeneous problem with two-point conditions in time for some equations of mathematical physics.* Azerb. Journal of Mathematics 2017, **7** (2), 180–196.

[8] Nytrebych Z.M., Malanchuk O.M., Ilkiv V.S., Pukach P.Ya. *On the solvability of two-point in time problem for PDE.* Italian Journal of Pure and Applied Mathematics 2017, (38), 715–726.

[9] Ptashnik B.I. Ill-posed boundary value problems for partial differential equations. Nauk. Dumka, Kyiv, 1984. (Russian)

[10] Ptashnik B.I., Shtabalyuk P.I. *A boundary value problem for hyperbolic equations in a class of functions that are almost periodic with respect to space variables.* Differentsial'nye Uravneniya 1986, **22** (4), 669–678. (Russian)

[11] Ptashnyk B.Yo., Repetylo S.M. *Dirichlet–Neumann problem in a strip for hyperbolic equations with constant coefficients.* Journ. of Math. Sci. 2015 **205** (4), 501–517.

[12] Symotyuk M.M. *Two-point problem for linear partial differential equations with constants coefficients.* Sci. Bull. Uzhhorod Nat. University, 2002, **7**, 96–107. (Ukrainian)

[13] Symotyuk M.M. *Diophantine approximations of characteristic determinant of the two-point problem for partial differential equations.* Mathem. Bulletin of Shevchenko Scientific Society 2004, **2**, 199–212. (Ukrainian)

[14] Symotyuk M.M., Tymkiv I.R. *Problem with two-point conditions for parabolic equation of second order on time.* Carpathian Mathematical Publication 2014, **6** (2), 351–359. doi: 10.15330/cmp.6.2.351–359.

Надійшло 22.12.2021

Symotiuk M. M. *Two-point problem for linear systems of partial differential equations*, Bukovinian Math. Journal. **9**, 2 (2021), 99–110.

The problem with two nodes on the selected variable t and periodicity conditions in other coordinates $x_1, \ldots, x_p$ for linear partial differential equations is investigated. The conditions of solvability problem in the spaces of smooth functions with exponential behavior of Fourier coefficients are established. The estimates for characteristic determinants of the problem are proved.