Шепарович І.Б.

ДЕЯКІ ЗАУВАЖЕННЯ ПРО НУЛІ ТА ПОЛЮСИ МЕРОМОРФНИХ В ОДИНИЧНОМУ КРУЗІ ФУНКЦІЙ З КЛАСІВ, ВИЗНАЧЕНИХ МАЖОРАНТОЮ ДОВІЛЬНОГО ЗРОСТАННЯ

Методом коефіцієнтів Фур'є отримано умови, за яких довільні послідовності (μ_j) і (λ_ν) комплексних чисел є послідовностями, відповідно, нулів та полюсів для деяких класів мероморфних в одиничному крузі функцій, визначених мажорантою довільного зростання. Також показано, що маючи послідовність, що задовольняє певну умову, можна побудувати мероморфну функцію із згаданих класів, для якої задана послідовність є послідовністю нулів чи полюсів.

Ключові слова і фрази: одиничний круг, мероморфна функція, послідовність нулів, полюсів, коефіцієнти Фур'є.

Ivan Franko State Pedagogical University of Drohobych, Department of Physics, Mathematics, economy and innovative technologies, Drohobych, Ukraine
e-mail: *isheparovych@ukr.net*

Нехай $\eta : [0;+\infty) \to [0;+\infty)$ - неспадна функція, $U(0;R) = \{z : |z| < R\}$, f – функція, мероморфна в крузі $U(0;1)$, яка має нескінченну множину нулів - (λ_ν) та полюсів - (μ_j), $f(0) = 1$. Тоді, $n(r;1/f) := n_\lambda(r) = \sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r} 1$ - кількість нулів, $n(r;f) := n_\mu(r) = \sum_{|\mu_j|\leqslant r} 1$ – кількість полюсів функції f в крузі $U(0;r)$. Використаємо Неванліннові лічильні характеристики (див., наприклад, [1, 2, 3, 7, 8]) $N(r,1/f) = \int_0^r \frac{n(t,1/f)}{t}dt$ і $N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,f)}{t}dt$. Як відомо [3], $N(r,1/f) = \sum\limits_{|\lambda_\nu|\leqslant r} \ln\frac{r}{|\lambda_\nu|}$, $N(r,f) = \sum\limits_{|\mu_j|\leqslant r} \ln\frac{r}{|\mu_j|}$. Нехай

$$c_k(r;f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| e^{-ik\varphi}d\varphi$$

- коефіцієнти Фур'є функції f. Тоді [1] для $r \in (0;1)$ виконується

УДК 517.3
2010 *Mathematics Subject Classification:* 30E05, 30D15.

© Шепарович І.Б., 2021

$$c_0(r;f)=\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r}\ln\frac{r}{|\lambda_\nu|}-\sum_{|\mu_j|\leqslant r}\ln\frac{r}{|\mu_j|}=N(r,1/f)-N(r,f),$$
$$c_k(r;f)=\frac{1}{2}\alpha_k r^k+\frac{1}{2k}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r}\left(\left(\frac{r}{\lambda_\nu}\right)^k-\left(\frac{\overline{\lambda_\nu}}{r}\right)^k\right), \tag{1}$$
$$c_{-k}(r;f)=c_k(r;f),$$

де α_k знаходиться з розвинення функції f в околі точки $z=0$

$$\log f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^k.$$

Через A_i і B_i позначаємо додатні сталі. У статті [4] є доведені такі твердження:

Теорема A. *Якщо (λ_ν) є послідовністю нулів голоморфної в одиничному крузі функ-ції f, яка задовольняє умову*

$$(\exists A>0)(\exists B>0)(\forall z\in U(0;1)):|f(z)|\leqslant\exp\left(A\eta\left(\frac{B}{1-|z|}\right)\right),$$

то

$$(\forall r\in(0;1)):N(r)\leqslant A_1\eta\left(\frac{B_1}{1-r}\right) \tag{2}$$

і для всіх $k\in\mathbb{N},r_1\in(0;1),r_2\in(r_1;1),\sigma\in(1;1/r_2)$

$$\left|\frac{1}{2k}\sum_{r_1<|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\frac{1}{\lambda_\nu^k}\right|\leq\frac{A_2}{r_1^k}\eta\left(\frac{B_2}{1-r_1}\right)+\frac{A_2}{r_2^k}\max\left\{1;\frac{1}{k\ln\sigma}\right\}\eta\left(\frac{B_2}{1-\sigma r_2}\right) \tag{3}$$

Зазначимо, що умова (3) перетвориться в умову

$$\left|\frac{1}{2k}\sum_{r_1<|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\frac{1}{\lambda_\nu^k}\right|\leqslant\frac{A_2}{r_1^k}\eta\left(\frac{B_2}{1-r_1}\right)+\frac{A_2}{r_2^k}\max\left\{1;\frac{1}{k\ln\frac{1+r_2}{2r_2}}\right\}\eta\left(\frac{2B_2}{1-r_2}\right),$$

якщо вибрати $\sigma=\frac{1+r_2}{2r_2}$.

Теорема B. *Якщо виконуються умови (2) і (3), то існує голоморфна в одиничному крузі $U(0;1)$ функція f, яка задовольняє умову*

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log\left|f(re^{i\varphi})\right|\right|^2d\varphi\right)^{1/2}\leqslant A_3\eta\left(\frac{B_3}{1-\sigma r}\right)\left(1+\frac{6\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\ln\sigma}}\right) \tag{4}$$

для всіх $r\in(0;1),\sigma\in(1;1/r)$.

Теорема C. *Якщо виконуються умови (2) і (3), то існує голоморфна в одиничному крузі $U(0;1)$ функція η, яка задовольняє умову*

$$(\exists A>0)(\exists B>0)(\forall z\in U(0;1)):|f(z)|\leqslant\exp\left(\frac{A}{(1-|z|)^{3/2}}\eta\left(\frac{B}{1-|z|}\right)\right).$$

Використовуючи попередні результати, спробуємо отримати аналогічні для *мероморфних в крузі* $U(0;1)$ *функцій*. Нехай (тут $\ln^+ x = \max\{0;\ln x\}$)

$$T(r;f) := m(r;f) + N(r;f);\ m(r;f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi.$$

Тоді

$$T(r;1/f) := N(r;1/f) + m(r;1/f) = N(r;1/f) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi})|} d\varphi. \tag{5}$$

І, оскільки $\ln x = \ln^+ x - \ln^+ 1/x$, то (див. [1, 2, 3, 7])

$$T(r;1/f) = T(r;f) - \ln|c_k|,$$

де $f(z) = c_k z^k + \dots$.

Справедливими будуть такі твердження.

Теорема 1. *Якщо* (λ_ν) *і* (μ_j) *є, відповідно, послідовністю нулів і полюсів мероморфної в одиничному крузі функції, яка задовольняє умову*

$$(\exists A>0)(\exists B>0)(\forall r\in(0;1)) : T(r;f) \leqslant A\eta\left(\frac{B}{1-r}\right), \tag{6}$$

то

$$(\exists A_1)(\exists B_1)(\forall r\in(0;1)) : N(r,1/f) \le A_1\eta\left(\frac{B_1}{1-r}\right), \tag{7}$$

$$(\exists A_1')(\exists B_1')(\forall r\in(0;1)) : N(r,f) \le A_1'\eta\left(\frac{B_1'}{1-r}\right)$$

і для деяких A_2 *і* B_2*, всіх* $(k\in\mathbb{N}, r_1\in(0;1),\ \ r_2\in(r_1;1),\ \ \sigma\in(1;1/r_2)$

$$\frac{1}{2k}\left|\sum_{r_1<|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\frac{1}{\lambda_\nu^k} - \sum_{r_1<|\mu_j|\leqslant r_2}\frac{1}{\mu_j^k}\right| \le \frac{A_2}{r_1^k}\eta\left(\frac{B_2}{1-r_1}\right) + \frac{A_2}{r_2^k}\max\left\{1;\frac{1}{k\ln\sigma}\right\}\eta\left(\frac{B_2}{1-\sigma r_2}\right)$$

Справедливість теореми 1 отримуємо аналогічними методами, як і в [4, 5], на основі такого твердження

Лема 1. *Якщо виконується* (6), *то для коефіцієнтів з* (1) *має місце умова*

$$(\forall r\in[0;1))(\forall k\in\mathbb{Z}) :\ |c_k(r;f)| \le A\eta\left(\frac{B}{1-r}\right).$$

Доведення. Справді, з (4) і (5) випливає,

$$N(r;1/f) \le T(r;f),\ N(r;f) \le T(r;1/f) = T(r;f) + O(1), \tag{8}$$

звідки отримуємо (7). До того ж,

$$\begin{aligned} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| &= \log^+\left|f(re^{i\varphi})\right| - \log^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}, \\ \left|\log\left|f(re^{i\varphi})\right|\right| &= \log^+\left|f(re^{i\varphi})\right| + \log^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}. \end{aligned} \tag{9}$$

Тому для кожного $k \in \mathbb{Z}$

$$|c_k(r;f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log^+\left|f(re^{i\varphi})\right|d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}d\varphi \le 2T(r;f) \leqslant 2A\eta\left(\frac{B}{1-r}\right).$$

Що й потрібно було довести. □

Теорема 2. *Якщо послідовність* (λ_ν) *(або* (μ_j)*) задовольняє умови* (3) *і* (7)*, то існує мероморфна в одиничному крузі функція, яка задовольняє умову*

$$(\exists A>0)(\exists B>0)(\forall r\in(0;1)) : T(r;f) \leqslant \frac{A}{\sqrt{1-r}}\eta\left(\frac{B}{1-|z|}\right) \tag{10}$$

Доведення. Справді, в ході доведення **теореми B** показано, що за даних умов існує голо-морфна в одиничному крузі функція (наприклад, g), що задовольняє умову (10), для якої $\Lambda_0 := (\lambda_\nu)$ є послідовністю нулів. Тоді, як довів В. Бек [6], можна побудувати (див. нижче) послідовність $\Lambda := (\tilde{\lambda}_\nu)$, $\{\tilde{\lambda}_\nu\} = \{\lambda_\nu\} \cup \{\lambda'_\nu\}$, яка теж задовольнятиме умову (3). А тому існуватиме голоморфна в одиничному крузі функція (наприклад, h) з властивістю (10), для якої Λ є послідовністю нулів. Тоді $f = g/h$ є мероморфною в одиничному крузі $U(0;1)$ і за властивістю Неванліннових характеристик отримаємо

$$T(r;f) = T(r;g/h) \le T(r;g) + T(r;1/h) \leqslant \frac{2A}{\sqrt{1-r}}\eta\left(\frac{B}{1-|z|}\right). \tag{11}$$

Зупинимося детальніше на ***конструкції послідовності*** $\Lambda' := (\lambda'_\nu)$. Нехай $R_N = 1-2^{-N}$, $N \in \mathbb{N}_0$. Візьмемо ті λ_ν із Λ_0, що лежать в кільці $\{z : R_N \le |z| \le R_{N+1}\}$ для деякого фіксованого N. Це числа $\lambda_j = |\lambda_j|e^{i\theta_j}$, $0 \le \theta_j < 2\pi$, $j \in \overline{1,p}$, $\quad p = n(R_{N+1}) - n(R_N)$. Позначимо $s_N(\theta) = -2\sum\limits_{n=1}^{p}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(R_{N-1}/|\lambda_n|\right)^k e^{ik(\theta-\theta_n)}, 0 \le \theta_j < 2\pi$; $(h_N(\theta) = -\operatorname{Re}(S_N(\theta))$; $f_N(\theta) = h_N(\theta) + 8p$. Нехай $L_N = [\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_N(\theta)d\theta]$, де $[*]$ – ціла частина. Для кожного n, $n \in \overline{1,L_N}$, визначимо монотонну послідовність $({\theta_n}')$, $n \in \overline{1,L_N}$, таку що $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{{\theta_n}'} f_N(\theta)d\theta = n$. Тоді послідовність $\Lambda' = \bigcup\limits_{N\ge 2}\Lambda'_N$, де $\Lambda'_N = \{R_{N-1}e^{i\theta'_n} : n \in \overline{1,L_n}\}$ - *шукана.*

Справді, $|h_N(\theta)| \le |s_N(\theta)| \le 8p$, тому $|f_N(\theta)| \le 16p$ і $L_N(\theta) \le 16p = 16(n(R_{N+1}) - n(R_N))$, а отже (тут $n' := n_{\lambda'}(r)$, $\tilde{n}(r) := n_{\tilde{\lambda}}(r)$), $n'(r) \le 16n\left(\frac{r+1}{2}\right)$, як наслідок $\tilde{n}(r) \le 17n\left(\frac{r+1}{2}\right)$. І оскільки для кожного $r > 0$ і будь-якого $\sigma \in (1;1/r)$ виконується $n(r) \le \frac{1}{\ln\sigma}N(\sigma r)$ *(Це твердження випливає із співвідношень* $N(\sigma r) \ge \int\limits_r^{\sigma r}\frac{n(t)}{t}dt \ge n(r)\ln\sigma$ *і є справедливим як для лічильної характеристики нулів* (λ_ν)*, так і полюсів -* (μ_j)*)*, тому

$$\tilde{n}(r) \leqslant \frac{A'}{\ln \sigma} \eta \left(\frac{B'}{1-\sigma r} \right)$$

Далі, нехай $r \in (0;1), s \in (r;1)$ - деякі числа. Тоді, знайдуться натуральні $p_1 \in \mathbb{N}, p_2 \in \mathbb{N}$, $p_1 < p_2 - 3$, такі, що $R_{p_1} \leqslant r < R_{p_1+1} < \ldots < R_{p_2} \leqslant s < R_{p_2+1}$ і для деяких додатних сталих A_2, B_2 і $\sigma \in (1; 1/s)$

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{r<|\tilde{\lambda}_\nu| \leqslant s} \frac{1}{\tilde{\lambda}_\nu^k} \right| \leqslant \frac{1}{k} \left| \sum_{r<|\lambda_\nu|\leqslant R_{p_1+2}} \frac{1}{\lambda_\nu^k} \right| + \frac{1}{k} \left| \sum_{R_{p_1+2}<|\lambda_\nu|\leqslant R_{p_1+3}} \frac{1}{\lambda_\nu^k} + \sum_{|\lambda'_\nu|=R_{p_1+1}} \frac{1}{\lambda'^k_\nu} \right| + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{k} \left| \sum_{R_{p_2-1}<|\lambda_\nu|\leqslant R_{p_2}} \frac{1}{\lambda_\nu^k} + \sum_{|\lambda'_\nu|=R_{p_2-2}} \frac{1}{\lambda'^k_\nu} \right| + \frac{1}{k} \left| \sum_{R_{p_2}<|\lambda_\nu|\leqslant s} \frac{1}{\lambda_\nu^k} + \sum_{|\lambda'_\nu|=R_{p_2-1}} \frac{1}{\lambda'_\nu k} \right| +$$
$$+ \frac{1}{k} \left| \sum_{|\lambda'_\nu|=R_{p_2}} \frac{1}{\lambda'^k_\nu} \right| \leq \frac{1}{k} \left| \sum_{r<|\lambda_\nu|\leqslant R_{p_1+2}} \frac{1}{\lambda_\nu^k} \right| + 32 \sum_{j=p_1+1}^{p_2-1} \frac{1}{R_j^k} + \frac{1}{k} \left| \sum_{|\lambda'_\nu|=R_{p_2}} \frac{1}{\lambda'^k_\nu} \right| +$$
$$+ \frac{1}{k} \left| \sum_{s<|\lambda_\nu|\leqslant R_{p_2+1}} \frac{1}{\lambda_\nu^k} \right| \leq \frac{1}{k} \left| \sum_{r<|\lambda_\nu|\leqslant R_{p_1+2}} \frac{1}{\lambda_\nu^k} \right| + 32 \sum_{j=p_1+1}^{p_2} \frac{1}{R_j^k} + \frac{1}{ks^k} n((1+s)/2) \leq$$
$$\leq \frac{A_2}{r^k} \eta \left(\frac{B_2}{1-r} \right) + \frac{A_2}{s^k} \max \left\{ 1; \frac{1}{k \ln \sigma} \right\} \eta \left(\frac{B_2}{1-\sigma s} \right),$$

бо, як доведено в [5], $\left| \frac{1}{k} \sum_{R_{p_1+j}<|\lambda_\nu|\leq R_{p_1+j+1}} \frac{1}{\lambda_\nu^k} + \frac{1}{k} \sum_{|\lambda'_\nu|=R_{p_1+j-1}} \frac{1}{\lambda'^k_\nu} \right| \leq \frac{32}{R^k_{p_1+j-1}}$. Окрім того, $R_{p_1+2} \leq s$, $R_{p_2+1} \leq \frac{1+s}{2}$, $\sum_{j=p_1+1}^{p_2} \frac{1}{R_j^k} \leq \frac{1}{r^k} + \frac{1}{r^k(1-r)} + \frac{1}{s^k(1-s)}$.

Тому, за **теоремою B**, існує голоморфна в одиничному крузі функція h, яка задовольняє умову

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\log \left| h(re^{i\varphi}) \right| \right)^2 d\varphi \right)^{1/2} \leq A_3 \left(1 + \frac{6\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\ln \sigma}} \right) \eta \left(\frac{B_3}{1-\sigma r} \right)$$

для всіх $r \in (0;1), \sigma \in (1;1/r)$, з чого, на основі нерівности Коші-Буняковського, отримуємо

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \log \left| h(re^{i\varphi}) \right| \right| d\varphi \leq 2A_3 \left(1 + \frac{6\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\ln \sigma}} \right) \eta \left(\frac{B_3}{1-\sigma r} \right),$$

а із співвідношень (5), (8), (9) випливає

$$T(r;1/h) \leq T(r;h) + O(1) \leq \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \log \left| h(re^{i\varphi}) \right| \right| d\varphi \leq 2A_3 \left(1 + \frac{6\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\ln \sigma}} \right) \eta \left(\frac{B_3}{1-\sigma r} \right).$$

Якщо вибрати $\sigma = \frac{r+1}{2r}$, то, враховуючи, що $\ln \frac{r+1}{2r} = \ln \left(1 + \frac{1-r}{2r} \right) \geqslant \frac{1-r}{2}$, отримаємо справедливість умови (10) для функції h. Отже, (11) виконується. Теорема 2 доведена.

$\square$

Список літератури

[1] Rubel, L.A., Taylor, B.A. *A Fourier series method for meromorphic end entire functions.* Bull.Soc. Math. France, 1968, **96**, 53 – 91.

[2] 2. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции ОГИЗ, Москва-Ленінград, 1941.

[3] Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций, Наука, Москва, 1970.

[4] Шепарович І.Б. *Про нулі голоморфних в одиничному крузі функцій з класів, визначених мажорантою довільного зростання.* Буковин. матем. журн., 2018, **6** (№ 1 - 2), 129 – 134.

[5] Miles J., Shea D. *On the growth of meromorphic functions having at least one deficient value.* Duke. Math. J., 1976, **43**, 171-186.

[6] Beck W. *Efficient quotient representations of meromorphic functions in the disc.* Thesis. Urbana-Champaign, I: University of Illinois, 1970.

[7] Кондратюк, А.А. Ряды Фурье и мероморфные функции. Вища школа, Львів, 1988.

[8] Петренко В. П. Рост мероморфных функций. Вища школа, Харьков, 1978.

Список літератури

[1] Rubel, L.A., Taylor, B.A. *A Fourier series method for meromorphic end entire functions.* Bull.Soc. Math. France, 1968, **96**, 53 – 91.

[2] R. Nevanlinna. Unambigiuous analytical functions. GITTL, Moskov, 1941.(in Russian)

[3] Gol'dberg A.A. and Ostrovskii I.V. Distribution of values of meromorphic functions, Nauka, Moskov, 1970.(in Russian)

[4] Sheparovych I. B. *On zeros of the holomorphic in the unit disk functions from the class that determined by the majorant of arbitrary growth* . Bukovinian Math. Journal. 2018, **6** (1), 129 – 134.(In Ukrainian)

[5] Miles J., Shea D. *On the growth of meromorphic functions having at least one deficient value.* Duke. Math. J., 1976, **43**, 171-186.

[6] Beck W. *Efficient quotient representations of meromorphic functions in the disc.* Thesis. Urbana-Champaign, I: University of Illinois, 1970.

[7] A.A. Kondratyuk. Fourier series and meromorphic functions. Vyscha shkola, Lviv, 1988.

[8] V. P. Petrenko. Growth of meromorphic functions. Vyscha shkola, Kharkiv, 1978. (in Russian)

Надійшло 11.10.2021

Sheparovych I.B. *Some notices on zeros and poles of meromorphic functions in a unit disk from the classes defined by the arbitrary growth majorant*, Bukovinian Math. Journal. **9**, 2 (2021), 124–130.

In [4] by the Fourier coefficients method there were obtained some necessary and sufficient conditions for the sequence of zeros (λ_ν) of holomorphic in the unit disk $\{z : |z| < 1\}$ functions f from the class that determined by the majorant $\eta : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ that is an increasing function of arbitrary growth. Using that result in present paper it is proved that if (λ_ν) is a sequence of zeros and (μ_j) is a sequence of poles of the meromorphic function f in the unit

disk, such that for some $A>0, B>0$ and for all $r\in(0;1)$: $T(r;f)\leqslant A\eta\left(\frac{B}{1-|z|}\right)$, where $T(r;f):=m(r;f)+N(r;f);\ m(r;f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi$, then for some positive constants $A_1, A_1', B_1, B_1', A_2, B_2$ and for all $k\in\mathbb{N}$, r, r_1 from $(0;1)$, $r_2\in(r_1;1)$ and $\sigma\in(1;1/r_2)$ the next conditions hold $N(r,1/f)\le A_1\eta\left(\frac{B_1}{1-r}\right)$, $N(r,f)\le A_1'\eta\left(\frac{B_1'}{1-r}\right)$,

$$\frac{1}{2k}\left|\sum_{r_1<|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\frac{1}{\lambda_\nu^k}-\sum_{r_1<|\mu_j|\leqslant r_2}\frac{1}{\mu_j^k}\right|\le\frac{A_2}{r_1^k}\eta\left(\frac{B_2}{1-r_1}\right)+\frac{A_2}{r_2^k}\max\left\{1;\frac{1}{k\ln\sigma}\right\}\eta\left(\frac{B_2}{1-\sigma r_2}\right)$$

It is also shown that if sequence (λ_ν) satisfies the condition $N(r,1/f)\le A_1\eta\left(\frac{B_1}{1-r}\right)$ and

$$\frac{1}{2k}\left|\sum_{r_1<|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\frac{1}{\lambda_\nu^k}\right|\le\frac{A_2}{r_1^k}\eta\left(\frac{B_2}{1-r_1}\right)+\frac{A_2}{r_2^k}\max\left\{1;\frac{1}{k\ln\sigma}\right\}\eta\left(\frac{B_2}{1-\sigma r_2}\right)$$

there is possible to construct a meromorphic function from the class $T(r;f)\leqslant\frac{A}{\sqrt{1-r}}\eta\left(\frac{B}{1-r}\right)$, for which the given sequence is a sequence of zeros or poles.