Боднарук С.Б., Городецький В.В., Колісник Р.С., Шевчук Н.М.

НЕЛОКАЛЬНА ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧА ДЛЯ ДЕЯКОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ В ПРОСТОРАХ ТИПУ S ТА S'

Встановлено розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння з оператором $B := \left(I - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^4}{\partial x^4}\right)^{1/4}$ та початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу ультрарозподілів. Дається аналітичне зображення розв'язку, досліджена поведінка розв'язку при необмеженому зростанні часової змінної (стабілізація розв'язку).

Ключові слова і фрази: нелокальна задача, простір узагальнених функцій, згортка, псевдодиференціальний оператор, перетворення Фур'є, коректна розв'язність, клас операторів, мультплікатор, згортувач, граничний перехід, фінітна функція..

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
e-mail: *s.bodnaruk@chnu.edu.ua, v.gorodetskiy@chnu.edu.ua, r.kolisnyk@chnu.edu.ua, n.shevchuk@chnu.edu.ua*

У теорії дробового інтегро-диференціювання часто використовується оператор $A := (I - \partial^2/\partial x^2)^{1/2}$, який прийнято називати оператором Бесселя дробового диференціювання порядку $1/2$ (див. [1]). У цій роботі досліджуються властивості оператора $B := \left(I - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^4}{\partial x^4}\right)^{1/4}$, який можна розуміти як певний аналог оператора A. Встановлено, що B – самоспряжений оператор у гільбертовому проторі $L_2(\mathbb{R})$, звуження якого на певний простір типу S (такі простори введені в [2]) збігається з псевдодиференціальним оператором $F^{-1}_{\sigma\to x}[a(\sigma)F_{x\to\sigma}]$, побудованим за функцією-символом $a(\sigma) = (1 + \sigma^2 + \sigma^4)^{1/4}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ (тут F, F^{-1} – перетворення Фур'є). Досліджена також нелокальна багатоточкова за часом задача для рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + Bu(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}, \tag{1}$$

коли початкова умова $u|_{t=0} = f$ замінюється умовою

$$\sum_{k=0}^{m} \mu_k B_k u(t,x)|_{t=t_k} = f, \tag{2}$$

УДК 517.98
2010 *Mathematics Subject Classification:* 39B12, 45J05.

де $t_0 = 0$, $\{t_1, \dots, t_m\} \in (0, \infty)$, $\{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, – фіксовані числа, B_1, $\dots$, B_m – псевдодиференціальні оператори, побудовані за гладкими символами (якщо $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = \dots = \mu_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші). При цьому умова (2) трактується в класичному або слабкому сенсі, якщо f – узагальнена функція типу ультрарозподілів (тобто f є елементом одного з просторів типу S' – простору, топологічно спряженого з відповідним простором типу S). Зауважимо, що нелокальна багатоточкова за часом задача відноситься до нелокальних задач для диференціально-операторних рівнянь та рівнянь з частинними похідними. Такі задачі виникають при моделюванні багатьох процесів та задач практики крайовими задачами з нелокальними умовами, при описі всіх коректних задач для конкретного оператора, побудові загальної теорії крайових задач (див., напр., [3, 4, 5, 6, 7]).

У роботі встановлена розв'язність задачі (1), (2), досліджені властивості фундаментального розв'язку зазначеної багатоточкової задачі, досліджено поведінку розв'язку задачі (1), (2) при $t \to \infty$ (стабілізація розв'язку) у просторах узагальнених функцій типу S', а також рівномірну стабілізацію на $\mathbb{R}$ розв'язку задачі (1), (2).

1. Простори основних та узагальнених функцій. І.М. Гельфанд та Г.Є. Шилов ввели в [2] серію просторів, названих ними просторами типу S. Вони складаються з нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, на які накладаються певні умови спадання на нескінченності та зростання похідних. Ці умови задаються за допомогою нерівностей $|x^k \varphi^{(m)}(x)| \leq c_{km}$, $x \in \mathbb{R}$, $\{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+$, де $\{c_{km}\}$ – деяка подвійна послідовність додатних чисел. Якщо на елементи послідовності $\{c_{km}\}$ не накладаються жодні обмеження, то маємо, очевидно, простір $S \equiv S(\mathbb{R})$ Л. Шварца швидко спадних на нескінченності функцій. Якщо ж числа c_{km} задовольняють певні умови, то відповідні конкретні просторі містяться в S і називаються просторами типу S. Означимо деякі з них.

Для будь-яких $\alpha, \beta > 0$ покладемо

$$S_\alpha^\beta(\mathbb{R}) \equiv S_\alpha^\beta := \{\varphi \in S \,\Big|\, \exists c > 0 \; \exists A > 0 \; \exists B > 0 \, \forall \{m, n\} \subset \mathbb{Z}_+ \, \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|x^m \varphi^{(n)}(x)| \leq c A^m B^n m^{m\alpha} n^{n\beta}\}.$$

Введені простори типу S можна охарактеризувати ще й так [2].

S_α^β складається з тих й лише тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq c B^n n^{n\beta} \exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}, \quad c, B, a > 0, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}_+,$$

де сталі c, a, $B > 0$ залежать лише від функції φ.

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \geq 1 - \beta$, то S_α^β складається з тих й тільки тих функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які аналітично продовжуються в комплексну площину $\mathbb{C}$ і для яких

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \exp\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\}, c, a, b > 0, \{x, y\} \subset \mathbb{R}.$$

Простір S_α^1 складається з функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які аналітично продовжуються в деяку смугу $|\operatorname{Im} z| < \delta$, $z = x + iy$ (залежну від φ) комплексної площини, при цьому справджується оцінка

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}, c, a > 0, |y| < \delta, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Простори S_α^β нетривіальні, якщо $\alpha+\beta\geq 1$ і утворюють щільні в $L_2(\mathbb{R})$ множини.

Топологічна структура в S_α^β визначається так. Символом $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$, $A,B>0$, позначимо сукупність функцій $\varphi\in S_\alpha^\beta$, які задовольняють умову:

$$\forall\overline{A}>A,\ \forall\overline{B}>B:\ |x^k\varphi^{(m)}(x)|\leq c\overline{A}^k\overline{B}^m k^{k\alpha}m^{m\beta},\ \ \{k,m\}\subset\mathbb{Z}_+, x\in\mathbb{R}.$$

Ця множина перетворюється в повний зліченно-нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta\rho}=\sup_{x,k,m}\frac{|x^k\varphi^{(m)}(x)|}{(A+\delta)^k(B+\rho)^m k^{k\alpha}m^{m\beta}},\ \ \{\delta,\rho\}\in\Big\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\Big\}.$$

Вказану систему норм іноді замінюють еквівалентною їй системою норм

$$\|\varphi\|'_{\delta\rho}=\sup_{x,m}\frac{\exp\{a(1-\delta)|x|^{1/\alpha}\}|\varphi^{(m)}(x)|}{(\beta+\rho)^m m^{m\beta}},$$

$$\{\delta,\rho\}\subset\Big\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\Big\}, a=\frac{\alpha}{eA^{1/\alpha}}.$$

Якщо $A_1<A_2$, $B_1<B_2$, то $S_{\alpha,A_1}^{\beta,B_1}$ неперервно вкладається в $S_{\alpha,A_2}^{\beta,B_2}$ і $S_\alpha^\beta=\bigcup\limits_{A,B>0}S_{\alpha,A}^{\beta,B}$, тобто в S_α^β вводиться топологія індуктивної границі просторів $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ [2]. Отже, збіжність послідовності $\{\varphi_\nu,\nu\geq 1\}\subset S_\alpha^\beta$ до нуля в просторі S_α^β – це збіжність за топологією одного з просторів $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$, до якого належать всі функції φ_ν. Іншими словами (див. [2]), $\varphi_\nu\to 0$ при $\nu\to+\infty$ у просторі S_α^β тоді й лише тоді, коли послідовність $\{\varphi_\nu^{(m)},\nu\geq 1\}$ при кожному $m\in\mathbb{Z}_+$ збігається до нуля на довільному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$ і для деяких $c,a,B>0$, не залежних від ν, справджується нерівність

$$|\varphi_\nu^{(m)}(x)|\leq cB^m m^{m\beta}\exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}, x\in\mathbb{R}, m\in\mathbb{Z}_+.$$

У просторах S_α^β клас лінійних обмежених операторів збігається з класом лінійних неперервних операторів [2]. У цих просторах визначена і неперервна операція зсуву аргумента T_x: $\varphi(\xi)\to\varphi(\xi+x)$, $\forall\varphi\in S_\alpha^\beta$. Ця операція є також диференційовною (навіть нескінченно диференційовною [2]) у тому розумінні, що граничне співвідношення $(\varphi(x+h)-\varphi(x))h^{-1}\to\varphi'(x)$, $h\to 0$, справджується для кожної функції $\varphi\in S_\alpha^\beta$ в сенсі збіжності за топологією простору S_α^β. У S_α^β визначена і неперервна операція диференціювання. Простори типу S є досконалими [2] (тобто просторами, всі обмежені множини яких компактні), вони тісно пов'язані між собою перетворенням Фур'є, а саме правильною є формула $F[S_\alpha^\beta]=S_\beta^\alpha$, $\alpha,\beta>0$,

$$F[S_\alpha^\beta]:=\Big\{\psi:\ \psi(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\sigma)e^{i\sigma x}dx,\ \varphi\in S_\alpha^\beta\Big\},$$

при цьому оператор F: $S_\alpha^\beta\to S_\beta^\alpha$ є неперервним.

Нагадаємо, що $i\partial/\partial x$ – самоспряжений в $L_2(\mathbb{R})$ оператор з областю визначення $\mathcal{D}(i\partial/\partial x)=\{\varphi\in L_2(\mathbb{R}):\ \exists\varphi'\in L_2(\mathbb{R})\}$. Якщо E_λ, $\lambda\in\mathbb{R}$, спектральна функція оператора $i\partial/\partial x$, то, внаслідок основної спектральної теореми для самоспряжених операторів

$$B\varphi\equiv(I-\partial^2/\partial x^2+\partial^4/\partial x^4)^{1/4}\varphi=(I+(i\partial/\partial x)^2+(i\partial/\partial x)^{1/4})\varphi=$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+\lambda^2+\lambda^4)^{1/4} dE_\lambda \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(B). \tag{3}$$

З (3) випливає, що B – самоспряжений оператор в $L_2(\mathbb{R})$. Відомо (див., напр., [8]), що

$$E_\lambda \varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\lambda} \Big\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau \Big\} e^{-it\sigma} d\sigma \equiv \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\lambda} F[\varphi](\sigma) e^{-it\sigma} d\sigma.$$

Отже, $dE_\lambda \varphi = \dfrac{1}{2\pi} F[\varphi](\lambda) e^{-it\lambda} d\lambda$, тобто

$$B\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+\lambda^2+\lambda^4)^{1/4} F[\varphi](\lambda) e^{-it\lambda} d\lambda = F^{-1}[(1+\lambda^2+\lambda^4)^{1/4}) F[\varphi]]. \tag{4}$$

Нехай $a(\lambda) - (1+\lambda^2+\lambda^4)^{1/4}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Очевидно, що функція a задовольняє нерівність

$$a(\lambda) \leq c_\varepsilon \exp\{\varepsilon|\lambda|\}, \lambda \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

де $c_\varepsilon = 3^{1/4} \max\{1, 1/e\}$ для довільного $\varepsilon > 0$. За допомогою безпосередніх обчислень можна переконатися в тому, що

$$|D_\lambda^m a(\lambda)| \leq c_0 L_0^m m! \leq c_1 L_1^m m^m, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

де $L_0, L_1 > 0$. З (5), (6) випливає, що $a(\lambda)$ – мультиплікатор у просторі S_1^γ, а також у кожному просторі S_1^γ, де $\gamma > 1$ (нагадаємо, що функція $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ називається мультиплікатором у просторі S_α^β, якщо $a\varphi \in S_\alpha^\beta$ для довільної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$, при цьому відображення $\varphi \to a\varphi$ є неперервним у просторі S_α^β). Нехай $\hat{B} = B/S_1^\gamma$ – звуження оператора B на простір S_1^γ, де $\gamma \geq 1$ – фіксоване (конкретне значення γ вкажемо пізніше). Якщо в (4) $\varphi \in S_\gamma^1$, то $F[\varphi] \in S_1^\gamma$, $aF[\varphi] \in S_1^\gamma$, $B\varphi \in S_\gamma^1$, $\forall \varphi \in S_\gamma^1$. Отже, оператор $\hat{B} : S_\gamma^1 \to S_\gamma^1$ збігається із псевдодиференціальним оператором, побудованим за функцією-символом $a(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Символом $(S_\alpha^\beta)'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на S_α^β зі слабкою збіжністю. Елементи простору $(S_\alpha^\beta)'$ називатимемо узагальненими функціями типу ультрарозподілів. Якщо $f \in (S_\alpha^\beta)'$, то до цього ж простору належить також кожна похідна $f^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$, де $f^{(p)}$ визначається за допомогою формули:

$$\langle f^{(p)}, \varphi \rangle := (-1)^p \langle f, \varphi^{(p)} \rangle, \forall \varphi \in S_\alpha^\beta$$

(тут $\langle f^{(p)}, \varphi \rangle$ позначає дію функціонала $f^{(p)}$ на основну функцію φ). Якщо g – мультиплікатор у просторі основних функцій S_α^β, то $g \cdot f \in (S_\alpha^\beta)'$, $\forall f \in (S_\alpha^\beta)'$, де

$$\langle gf, \varphi \rangle := \langle f, g\varphi \rangle, \forall \varphi \in S_\alpha^\beta.$$

Оскільки в основному просторі S_α^β визначена операція зсуву аргумента T_x, то згортку узагальненої функції $f \in (S_\alpha^\beta)'$ з основною функцією $\varphi \in S_\alpha^\beta$ задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) := \langle f, T_{-x}\check{\varphi} \rangle \equiv \langle f, \varphi(x - \cdot) \rangle, \quad \check{\varphi}(\xi) := \varphi(-\xi).$$

Із властивості нескінченної диференційовності операції зсуву аргумента в просторі S_α^β випливає, що згортка $f * \varphi$ є звичайною нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією.

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in (S_\alpha^\beta)'$ означимо за допомогою співвідношення

$$\langle F[f], \varphi\rangle = \langle f, F[\varphi]\rangle, \ \forall \varphi \in S_\beta^\alpha.$$

Нехай $f \in (S_\alpha^\beta)'$. Якщо $f * \varphi \in S_\alpha^\beta$, $\forall \varphi \in S_\alpha^\beta$ і із співвідношення $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору S_α^β випливає, що $f * \varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору S_α^β, то функціонал f називається *згортувачем* у просторі S_α^β. Якщо $f \in (S_\alpha^\beta)'$ – згортувач у просторі S_α^β, то для довільної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$ правильною є формула $F[f * \varphi] = F[f] \cdot F[\varphi]$, при цьому $F[f]$ – мультиплікатор у просторі S_β^α.

2. Нелокальна за часом задача. Розглянемо еволюційне рівняння

$$\partial u(t,x)/\partial t + \hat{B}u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{7}$$

де $\hat{B} = B/S_2^1$ (див. п. 1). Під розв'язком рівняння (7) розуміємо функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, яка володіє властивостями: 1) $u(t,\cdot) \in C^1(0,+\infty)$ при кожному $x \in \mathbb{R}$; 2) $u(\cdot,x) \in S_2^1$ при кожному $t \in (0,+\infty)$; 3) $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (7).

Для рівняння (7) поставимо нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти розв'язок рівняння (7), який задовольняє умову:

$$\mu u(0,x) - \mu_1 B_1 u(t_1,x) - \cdots - \mu_m B_m u(t_m,x) = f(x), x \in \mathbb{R}, f \in S_2^1, \tag{8}$$

де $u(0,x) := \lim\limits_{t\to+0} u(t,x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0,+\infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0,+\infty)$, $m \in \mathbb{N}$ – фіксовані числа, $0 < t_1 < \cdots < t_m < +\infty$, $\mu > \sum\limits_{k=1}^m \mu_k$, $B_1, \ldots, B_m$ – псевдодиференціальні оператори в просторі S_2^1, побудовані за функціями (символами) g_k: $\mathbb{R} \to (0,\infty)$ відповідно: $B_k = F^{-1}[g_k(\sigma)F]$, $k \in \{1,\ldots,m\}$. Функції g_k, $k \in \{1,\ldots,m\}$, задовольняють умови: $g_k \in C^\infty(\mathbb{R})$; $\forall \varepsilon > 0\ \forall \sigma \in \mathbb{R}$: $g_k(\sigma) \le \exp\{\varepsilon|\sigma|\}$; $\exists M_k > 0\ \forall s \in \mathbb{N}$: $|D_\sigma^s g_k(\sigma)| \le M_k^s s^s$.

Зауважимо, що з наведених властивостей функції g_k випливає, що g_k, $k \in \{1,\ldots,m\}$, – мультипліатор у просторі S_2^1.

Розв'язок задачі (7), (8) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є, ввівши позначення: $F[u(t,x)] = v(t,\sigma)$. Врахувавши вигляд операторів $\hat{B}$, B_1, ..., B_m, для функції v: $\Omega \to \mathbb{R}$ дістанемо задачу з параметром σ:

$$\frac{dv(t,\sigma)}{dt} + a(\sigma)v(t,\sigma) = 0, \ (t,\sigma) \in \Omega, \tag{9}$$

$$\mu v(0,\sigma) - \sum_{k=1}^m \mu_k g_k(\sigma) v(t,\sigma) = \tilde{f}(\sigma), \ \sigma \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

де $\tilde{f}(\sigma) = F[f]$. Загальний розв'язок рівняння (9) має вигляд:

$$v(t,\sigma) = c\exp\{-ta(\sigma)\}, \ (t,\sigma) \in \Omega, \tag{11}$$

де $c = c(\sigma)$ визначимо з умови (10). Підставивши (11) в (10) знайдемо, що

$$c = \tilde{f}(\sigma)\Big(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k g_k(\sigma)\exp\{-t_k a(\sigma)\}\Big)^{-1}, \ \sigma \in \mathbb{R}.$$

Введемо позначення: $G(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)]$, $Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)$, $Q_1(t,\sigma) = \exp\{-ta(\sigma)\}$, $Q_2(\sigma) = \Big(\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma)\exp\{-t_k a(\sigma)\}\Big)^{-1}$. Далі, міркуючи формально, прийдемо до співвідношення:

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)f(\xi)d\xi = G(t,x) * f(x).$$

Справді,

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{i\sigma\xi}d\xi\Big)e^{-i\sigma x}d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}}\Big((2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)e^{-i\sigma(x-\xi)}d\sigma\Big)f(\xi)d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)f(\xi)d\xi = G(t,x) * f(x), \quad (t,x)\in\Omega. \tag{12}$$

Коректність проведених тут перетворень, а, отже, правильність формули (12) випливає з властивостей функції G, які наведемо нижче. Властивості функції G визначаються властивостями функції Q, оскільки $G = F^{-1}[Q]$. Отже, насамперед дослідимо властивості функції $Q(t,\sigma)$ як функції змінної σ.

Лема 1. *Для похідних функції $Q_1(t,\sigma)$, $(t,\sigma)\in\Omega$, правильними є оцінки*

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \le cA^s t^{\omega s} s^s \exp\{-t|\sigma|\}, s\in\mathbb{N}, \tag{13}$$

де $\omega = 0$, якщо $0 < t \le 1$ і $\omega = 1$, якщо $t > 1$, сталі $c > 1$, $A > 0$ не залежать від t.

Доведення. Для доведення твердження скористаємось формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції

$$D_\sigma^s F(g(\sigma)) = \sum_{p=1}^{s} \frac{d^pF(g)}{dg^p}\sum\frac{s!}{p_1!\dots p_l!}\Big(\frac{d}{d\sigma}g(\sigma)\Big)^{p_1}\dots\Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\sigma^l}g(\sigma)\Big)^{p_l}, s\in\mathbb{N} \tag{14}$$

(знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $p_1+2p_2+\dots+lp_l = s$, $p_1+p_2+\dots+p_l = m$), де покладемо $F = e^g$, $g = -ta(\sigma)$. Тоді

$$D_\sigma^s e^{-ta(\sigma)} = e^{-ta(\sigma)}\sum_{p=1}^{s}\sum\frac{s!}{p_1!\dots p_l!}\Lambda,$$

де символом Λ позначено вираз

$$\Lambda := \Big(\frac{d}{d\sigma}(-ta(\sigma))\Big)^{p_1}\Big(\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\sigma^2}(-ta(\sigma))\Big)^{p_2}\dots\Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\sigma^l}(-ta(\sigma))\Big)^{p_l}.$$

Урахувавши (6), знайдемо, що

$$|\Lambda| \le c_0^{p_1+\dots+p_l}L_0^{p_1+2p_2+\dots+lp_l}t^{p_l+\dots+p_l} \le \tilde{c}_0 t^p L_0^s, \tag{15}$$

де $\tilde{c}_0 = \max\{1, c_0\}$. Скориставшись (15) та формулою Стірлінга, прийдемо до нерівностей

$$|D^s_\sigma Q_1(t,\sigma)| \le \tilde{c}_0 L_0^s t^{\omega s} \exp\{-ta(\sigma)\} \le cA^s t^{\omega s} \exp\{-t|\sigma|\}, \sigma \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

де $\omega = 0$, якщо $0 < t \le 1$ і $\omega = 1$, якщо $t > 1$, сталі $c > 1$, $A > 0$ не залежать від t. Лема доведена. □

Зауваження 1. *Із оцінок* (16) *випливає, що* $Q_1(t,\cdot) \in S_1^1$ *при кожному* $t > 0$.

Лема 2. *Функція* Q_2 *– мультиплікатор у просторі* S_1^2.

Доведення. Для доведення твердження здійснимо оцінку похідних функції Q_2. Для цього скористаємося форумлою (14), у якій покладемо $F = \varphi^{-1}$, $\varphi = R$, де

$$R(\sigma) := \mu - \sum_{k=1}^m \mu_k g_k(\sigma) \exp\{-t_k a(\sigma)\}.$$

Тоді $Q_2(\sigma) = F(\varphi) = R^{-1}$ і

$$|D^s_\sigma Q_2(\sigma)| = \Big|\sum_{p=1}^s \frac{d^p}{dR^p} R^{-1} \sum \frac{s!}{p_1! \dots p_l!} \Big(\frac{d}{d\sigma} R(\sigma)\Big)^{p_1} \cdot \dots \cdot \Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\sigma^l} R(\sigma)\Big)^{p_l}\Big|, s \in \mathbb{N}.$$

Врахувавши властивості функцій $g_1, \dots, g_m$ та нерівності (16), знайдемо, що

$$\Big|\frac{1}{j!}\frac{d^j}{d\sigma^j} R(\sigma)\Big| \le \frac{1}{j!} \sum_{k=1}^m \mu_k \sum_{i=0}^j C_j^i |D^i_\sigma g_k(\sigma)| \cdot |D^{j-i}_\sigma e^{-t_k a(\sigma)}| \le$$

$$\le \frac{1}{j!} \sum_{k=1}^m \mu_k \sum_{i=0}^j C_j^i M_k^i i! \tilde{c}_0^{j-i} t_k^{\omega(j-i)} (j-i)! e^{-t_k a(\sigma)} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^m \mu_k \sum_{i=0}^j C_j^i M_k^i \tilde{c}_0^{j-i} t^{\omega(j-i)}$$

(тут враховано, що $i!(j-i)! \le j!$). Нехай

$$\tilde{M} = \max\{M_1, \dots, M_m\}, M_0 = 2\max\{\tilde{M}, \tilde{c}_0 T\}.$$

Тоді

$$\Big|\frac{1}{j!}\frac{d^j}{d\sigma^j} R(\sigma)\Big| \le \alpha_0 M_0^j, \alpha_0 = \sum_{k=1}^m \mu_k, j \in \{1, \dots, l\},$$

$$\Big|\Big(\frac{d}{d\sigma} R(\sigma)\Big)^{p_1}\Big| \dots \Big|\Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\sigma^l} R(\sigma)\Big)^{p_l}\Big| \le (\alpha_0 M_0)^{p_1} (\alpha_0 M_0^2)^{p_2} \dots (\alpha_0 M_0^l)^{p_l} =$$
$$= \alpha_0^{p_1 + \dots + p_l} \cdot M_0^{p_1 + 2p_2 + \dots + lp_l} \le \alpha_0^p M_0^s.$$

Крім того, $-\dfrac{d^p}{dR^p} R^{-1} = (-1)^p p! R^{-(p+1)}$ і

$$R^{-1}(\sigma) = Q_2(\sigma) = \Big(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k g_k(\sigma) \exp\{-t_k a(\sigma)\}\Big)^{-1} \le$$

$$\leq \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_1|\sigma| + \varepsilon|\sigma|\}\Big)^{-1} \leq \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\Big)^{-1} \equiv \beta_0 > 0, \varepsilon = t_1,$$

оскільки, за умовою, $\mu > \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$ (тут враховані властивості функцій $g_1, \ldots, g_m$, а також те, що $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m$). Отже,

$$\Big|\frac{d^p}{dR^p} R^{-1}\Big| \leq \beta_0^{p+1} p!, |D_\sigma^s Q_2(\sigma)| \leq s! \sum_{p=1}^{s} \beta_0^{p+1} p! \alpha_0^p M_0^s \leq$$

$$\leq \beta_0 M_0^s (s!)^2 \sum_{p=1}^{s} \beta_0^p \leq \beta_0 M_0^s s (s!)^2 \beta_1^s \leq \beta_2 \beta_3^s s^{2s}, s \in \mathbb{N}.$$

З останньої нерівності та обмеженості функції $Q_2(\sigma)$ на $\mathbb{R}$ випливає, що Q_2 – мультиплікатор у просторі S_1^2. □

Наслідок 1. *При кожному $t > 0$ функція $Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, є елементом простору S_1^2, при цьому справджуються оцінки*

$$|D_\sigma^s Q(t,\sigma)| \leq \tilde{c} \tilde{A}^s t^{\omega s} s^{2s} \exp\{-t|\sigma|\}, s \in \mathbb{Z}_+, (t,\sigma) \in \Omega,$$

де сталі $\tilde{c}$, $\tilde{A} > 0$ не залежать від t.

Урахувавши властивості перетворення Фур'є (прямого та оберненого) та формулу $F^{-1}[S_1^2] = S_2^1$ дістанемо, що $G(t,\cdot) \in S_2^1$ при кожному $t > 0$. Виділимо в оцінках похідних функції G (за змінною x) залежність від t, вважаючи, що $t > 1$. Для цього скористаємось співвідношенням

$$x^k D_x^s F[\varphi](x) = i^{k+s} F[(\sigma^s \varphi(s))^{(k)}] =$$

$$= i^{k+s} \int\limits_{\mathbb{R}} (\sigma^s \varphi(\sigma))^{(k)} e^{i\sigma x} d\sigma, \{k,s\} \subset \mathbb{Z}_+, \varphi \in S_1^2.$$

Отже,

$$x^k D_x^s G(t,x) = (2\pi)^{-1} i^{k+s} (-1)^s \int\limits_{\mathbb{R}} (\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)} e^{i\sigma x} d\sigma.$$

Застосувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій та оцінки похідних функції $Q(t,\sigma)$ знайдемо, що

$$|(\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)}| = \Big|\sum_{p=0}^{k} C_k^p (\sigma^s)^{(p)} Q^{(k-p)}(t,-\sigma)\Big| \leq$$

$$\leq |\sigma^s Q^{(k)}(t,-\sigma)| + ks|\sigma^{s-1} Q^{(k-1)}(t,-\sigma)| + \frac{k(k-1)}{2!} s(s-1) \times$$

$$\times |\sigma^{s-2} Q^{(k-2)}(t,-\sigma)| + \cdots \leq \tilde{c} \Big[\tilde{A}^k t^{\omega k} \tilde{B}^s t^{-s} m_{ks} + ks \tilde{A}^{k-1} t^{\omega(k-1)} \tilde{B}^{s-1} t^{-(s-1)} m_{k-1,s-1} +$$

$$+ \frac{1}{2!} k(k-1) s(s-1) \tilde{A}^{k-2} t^{\omega(k-2)} \tilde{B}^{s-2} t^{-(s-2)} m_{k-2,s-2} + \ldots\Big] e^{-\frac{t}{2}|\sigma|},$$

де $m_{ks} = k^{2k}s^s$. Врахувавши результати, наведені в [2, с. 236–241] знайдемо, що подвійна послідовність $m_{ks} = k^{2k}s^s$ задовольняє нерівність

$$ks\frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}} \leq \tilde{\gamma}(k+s), \quad \tilde{\gamma} > 0.$$

Урахувавши останню нерівність, а також те, що $t > 1$, матимемо

$$|(\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)}| \leq \tilde{c}\tilde{A}^k t^k \tilde{B}^s m_{ks}\Big(1 + \frac{ks}{\tilde{A}\tilde{B}}\frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}} +$$

$$+\frac{1}{2!}k(k-1)s(s-1)\frac{1}{\tilde{A}^2\tilde{B}^2}\frac{m_{k-2,s-2}}{m_{ks}} + \dots\Big)e^{-\frac{t}{2}|\sigma|} \leq \tilde{c}\tilde{A}^k t^k \tilde{B}^s m_{ks}\times$$

$$\times\Big(1 + \frac{ks}{\tilde{A}\tilde{B}}\frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}} + \frac{1}{2!}\frac{1}{\tilde{A}^2\tilde{B}^2}ks\frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}}(k-1)(s-1)\frac{m_{k-2,s-2}}{m_{k-1,s-1}}\Big)e^{-\frac{t}{2}|\sigma|} \leq$$

$$\leq \tilde{c}\tilde{A}^k t^k \tilde{B}^s m_{ks}\Big(1 + \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{A}\tilde{B}}(k+s) + \frac{1}{2!}\frac{\tilde{\gamma}^2}{\tilde{A}^2\tilde{B}^2}(k+s)^2 + \dots\Big)e^{-\frac{t}{2}|\sigma|} \leq$$

$$\leq c_1\overline{A}^k t^k B^{-s} m_{ks} e^{-\frac{t}{2}|\sigma|}, \overline{A} = \tilde{A}\exp\Big\{\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{A}\tilde{B}}\Big\}, \overline{B} = \tilde{B}\exp\Big\{\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{A}\tilde{B}}\Big\}.$$

Отже,

$$|x^k D_x^s G(t,x)| \leq (2\pi)^{-1}c_1\overline{A}^k t^k \overline{B}^s m_{ks}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t}{2}|\sigma|}d\sigma = c_2\overline{A}^k t^k \overline{B}^s t^{-1}k^{2k}s^s, \{k,s\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Тоді

$$|D_x^s G(t,x)| \leq c_2\overline{B}^s t^{-1}s^s \inf_k \frac{\overline{A}^k k^{2k}}{(t^{-1}|x|^k)} \leq c_3\overline{B}^s t^{-1}s^s \exp\{-a_0 t^{-1/2}|x|^{1/2}\},$$

де $c_3, \overline{B}, a_0 > 0$ не залежать від t; тут ми скористалися відомою нерівністю з [2, с. 264]:

$$\exp\{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{1/\alpha}\} \leq \inf_k \frac{L^k k^{k\alpha}}{|\xi|^k} \leq c\exp\{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{1/\alpha}\},\ c = \exp\{\alpha e/2\},$$

в якій $\alpha = 2$, $L = \overline{A}$. Таким чином, правильним є твердження

Лема 3. *Похідні функції $G(t,x)$ (за змінною x) при $t > 1$ задовольняють нерівності*

$$|D_x^s G(t,x)| \leq c_3\overline{B}^s s^s t^{-1}\exp\{-at^{-1/2}|x|^{1/2}\}, s \in \mathbb{Z}_+, \tag{17}$$

сталі $c_3, \overline{B}, a_0 > 0$ не залежать від t.

Наведемо ще деякі властивості функції G.

Лема 4. *Функція $G(t,x)$, $t \in (0,+\infty)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі S_2^1, диференційовна по t.*

Доведення. Із властивості неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) випливає, що для доведення твердження досить встановити, що функція $F[G(t,\cdot)] = Q(t,\cdot)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі S_1^2, диференційовна по t. Іншими словами, потрібно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) := \frac{1}{\Delta t}[Q(t+\Delta t,\cdot) - Q(t,\cdot)] \to \frac{\partial}{\partial t}Q(t,\cdot), \ \ \Delta t \to 0,$$

виконується в тому розумінні, що:

1) $D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma) \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} D_\sigma^s(-a(\sigma)Q(t,\sigma))$, $s \in \mathbb{Z}_+$, рівномірно на кожному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$;

2) $|D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \bar{c}\bar{B}^s s^{2s} \exp\{-\bar{a}|\sigma|\}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, де сталі $\bar{c}, \bar{a}, \bar{B} > 0$ не залежать від Δt, якщо Δt досить мале.

Функція $Q(t,\sigma)$, $(t,\sigma) \in \Omega$, диференційовна по t у звичайному розумінні. Внаслідок теореми Лагранжа про скінченні прирости

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) = -a(\sigma)Q(t+\theta\Delta t,\sigma), 0 < \theta < 1.$$

Отже,

$$D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma) = -\sum_{l=0}^{s} C_s^l D_\sigma^l a(\sigma) D_\sigma^{s-l} Q(t+\theta\Delta t,\sigma) \tag{18}$$

і

$$D_\sigma^s\Big(\Phi_{\Delta t}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big) = -\sum_{l=0}^{s} C_s^l D_\sigma^l a(\sigma)[D_\sigma^{s-l}Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D_\sigma^{s-l}Q(t,\sigma)].$$

Оскільки

$$D_\sigma^{s-l}Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D_\sigma^{s-l}Q(t,\sigma) = D_\sigma^{s-l+1}Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t, \ \ 0 < \theta_1 < 1,$$

то звідси та з оцінок (17) випливає, що

$$D_\sigma^{s-l+1}Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t \to 0, \Delta t \to 0,$$

рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Тоді і $D_\sigma^s\Phi_{\Delta t}(\sigma) \to D_\sigma^s\Big(\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big)$, $\Delta t \to 0$, рівномірно на кожному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Отже, умова 1) виконується.

Врахувавши (18) та оцінки, які задовольняють функції $a(\sigma)$, $Q(t,\sigma)$ та їхні похідні, знайдемо, що

$$|D_\sigma^s\Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq c_1 c_\varepsilon \sum_{l=0}^{s} C_s^l L_1^l l^l \tilde{A}^{s-l} t^{\omega(s-l)} (s-l)^{2(s-l)} \exp\{-(t+\theta\Delta t)|\sigma| + \varepsilon|\sigma|\}$$

(тут $\varepsilon > 0$ – довільно фіксований параметр). Візьмемо $\varepsilon = t/2$. Тоді

$$|D_\sigma^s\Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \overline{c}\overline{L}^s s^{2s} \exp\{-\overline{a}|\sigma|\}, s \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\overline{L} = 2\max\{L_1, \overline{A}t^\omega\}$, $\overline{a} = t/2$, причому всі сталі не залежать від Δt. □

Наслідок 2. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = f * \frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot), \quad \forall f \in (S_2^1)', t > 0.$$

Доведення. Згідно з означенням згортки узагальненої функції з основною маємо, що

$$f * G(t,\cdot) = \langle f_\xi, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle,\ \check{G}(t,\xi) = G(t,-\xi).$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[(f * G(t+\Delta t,\cdot)) - (f * G(t,\cdot))] =$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\langle f_\xi, \frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)]\rangle.$$

Внаслідок леми 4 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)] \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\check{G}(t,\xi), \Delta t\to 0$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору S_2^1. Тому

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = \langle f_\xi, \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)]\rangle =$$
$$= \langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle = \langle f_\xi, T_{-x}\frac{\partial}{\partial t}\check{G}(t,\xi)\rangle = f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}.$$

Твердження доведено. □

Лема 5. *У просторі $(S_2^1)'$ виконуються співвідношення:*

1) $G(t,\cdot) \to F^{-1}[Q_2], \quad t\to +0;$

2) $\mu G(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m}\mu_k B_k G(t_k,\cdot) \to \delta, t\to +0$ (19)

(тут δ – дельта-функція Дірака).

Доведення. 1. Урахувавши властивість неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S', для доведення твердження досить встановити, що

$$F[G(t,\cdot)] = Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot) \to Q_2(\cdot), t\to +0,$$

у просторі $(S_1^2)'$. Для цього візьмемо довільну функцію $\varphi\in S_1^2$ і, скориставшись тим, що Q_2 – мультиплікатор у просторі S_1^2, а також теоремою Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, знайдемо, що

$$\langle Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot),\varphi\rangle = \langle Q_1(t,\cdot), Q_2(\cdot)\varphi\rangle =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} Q_2(\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma = \langle 1, Q_2(\cdot)\varphi\rangle = \langle Q_2,\varphi\rangle.$$

Звідси вже випливає твердження 1 леми 5.

2. Урахувавши твердження 1 та вигляд операторів $B_1, \ldots, B_m$ знайдемо, що

$$\mu G(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m}\mu_l B_l G(t,\cdot) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \mu F^{-1}[Q_2] - \sum_{l=0}^{m}\mu_l B_l G(t,\cdot) =$$

$$= \mu F^{-1}[Q_2] - \sum_{l=1}^{m} \mu_l F^{-1}[g_l(\cdot) Q_1(t_l,\cdot) Q_2(\cdot)] =$$

$$= F^{-1}\Big[\mu Q_2 - \sum_{l=1}^{m} \mu_l g_l(\cdot) Q_1(t_l,\cdot) Q_2(\cdot)\Big] = F^{-1}\Big[\Big(\mu - \sum_{l=1}^{m} \mu_l g_l(\cdot) Q_1(t_l,\cdot)\Big) Q_2(\cdot)\Big] =$$

$$= F^{-1}\Big[\Big(\mu - \sum_{l=1}^{m} \mu_l g_l(\cdot) Q_1(t_l,\cdot)\Big)\Big(\mu - \sum_{l=1}^{m} \mu_l g_l(\cdot) Q_1(t_l,\cdot)\Big)^{-1}\Big] = F^{-1}[1] = \delta.$$

Отже, співвідношення (19) виконується в просторі $(S_2^1)'$.

Твердження доведено. $\square$

Зауваження 2. *Якщо $\mu = 1$, $\mu_1 = \dots = \mu_m = 0$, то задача (7), (8) – задача Коші для рівняння (7). У цьому випадку $Q_2(\sigma) = 1$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $G(t,x) = F^{-1}[e^{-ta(\sigma)}]$ і $G(t,\cdot) \to F^{-1}[1] = \delta$ у просторі $(S_1^1)'$.*

Наслідок 3. *Нехай*

$$\omega(t,x) = f * G(t,x), \quad f \in (S_{2,*}^1)', (t,x) \in \Omega$$

(тут $(S_{2,*}^1)'$ – клас згортувачів у просторі S_2^1). Тоді у просторі $(S_2^1)'$ виконується граничне співвідношення

$$\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k B_k \omega(t_k,\cdot) \to f, t \to +0.$$

Доведення. Доведемо, що граничне співвідношення

$$F\Big[\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k B_k \omega(t_k,\cdot)\Big] \to F[f], t \to +0,$$

виконується у просторі $(S_1^2)'$. Оскільки $f \in (S_{2,*}^1)'$, $G(t,\cdot) \in S_2^1$ при кожному $t > 0$, то

$$F[f * G(t,\cdot)] = F[f] \cdot F[G(t,\cdot)] = F[f] \cdot Q(t,\cdot).$$

Звідси випливає, що співвідношення

$$F[\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k B_k \omega(t_k,\cdot)] = F[f]\Big(\mu Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\cdot) Q(t_k,\cdot)\Big) \underset{t\to+0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{t\to+0}{\longrightarrow} F[f]\Big(\mu Q_2 - \sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\cdot) Q_1(t_k,\cdot) Q_2(\cdot)\Big) = F[f]\Big[\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\cdot) Q_1(t_k,\cdot)\Big) Q_2(\cdot)\Big] = F[f]$$

виконується у просторі $(S_1^2)'$ (тут враховано, що $Q(t,\cdot) \to Q_2(\cdot)$ при $t \to +0$ у просторі $(S_1^2)'$; див. доведення твердження 1 леми 5).

Твердження доведено. $\square$

Функція $G(t,x)$ задовольняє рівняння (7). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}F^{-1}[Q(t,\cdot)] = F^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big] = -F^{-1}[a(\sigma)Q(t,\sigma)],$$

$$\hat{B}G(t,\cdot) = F^{-1}[a(\sigma)F[G(t,\cdot)]] = F^{-1}[a(\sigma)Q(t,\sigma)].$$

Отже,

$$\frac{\partial G(t,x)}{\partial t} + \hat{B}G(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Omega,$$

що й потрібно було довести.

Функцію G надалі називатимемо фундаментальним розв'язком нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння (7).

З наслідку 3 випливає, що для рівняння (7) нелокальну багатоточкову за часом задачу можна ставити так: знайти функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, яка задовольняє рівняння (7) та умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k B_k u(t_k,\cdot) = f, \quad f \in (S^1_{2,*})', \tag{20}$$

де граничне співвідношення (20) розглядається у просторі $(S^1_2)'$ (обмеження на параметри μ, μ_1, ..., μ_m, t_1, ..., t_m та оператори B_1, ..., B_m такі ж, як і у випадку задачі (7), (8)).

Теорема 1. *Задача* (7), (20) *є розв'язною, розв'язок дається формулою*

$$u(t,x) = f * G(t,x), (t,x) \in \Omega,$$

де $G(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, *– фундаментальний розв'язок багатоточкової задачі для рівняння* (7), $u(t,\cdot) \in S^1_2$ *при кожному* $t > 0$.

Доведення. Переконаємося в тому, що функція $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (7). Справді, (див. наслідок 2)

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = f * \frac{\partial}{\partial t}G(t,x)$$

і

$$\hat{B}u(t,x) = F^{-1}[a(\sigma)F[G(t,\cdot)]].$$

Оскільки, f – згортувач у просторі S^1_2, то

$$F[f * G(t,\cdot)] = F[f]F[G(t,\cdot)] = F[f]Q(t,\cdot).$$

Отже,

$$\hat{B}u(t,x) = F^{-1}[a(\sigma)Q(t,\sigma)F[f]] = -F^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)F[f]\Big] =$$

$$= -F^{-1}\Big[F\Big[\frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)\Big] \cdot F[f]\Big] = -F^{-1}\Big[F\Big[f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}\Big]\Big] = -f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}.$$

Звідси випливає, що функція $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (7). З наслідку 3 випливає, що $u(t,x)$ задовольняє умову (20) у вказаному сенсі. Теорема доведена. □

Зауваження 3. *Якщо в умові* (20) $B_1 = \cdots = B_m = I$ *(I – одиничний оператор), то можна довести, що тоді задача* (7), (20) *коректно розв'язна, розв'язок дається формулою* $u(t,x) = f * G(t,x)$, $f \in (S^1_{1,*})'$, $(t,x) \in \Omega$, $G(t,\cdot) = F^{-1}[Q(t,\cdot)]$,

$$Q(t,\sigma) = e^{-ta(\sigma)}\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k e^{-t_k a(\sigma)}\Big)^{-1},$$

$G(t,\cdot) \in S^1_2$ *при кожному* $t > 0$.

Теорема 2. *Нехай* $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$.*Тоді* $u(t,\cdot) \to 0$ *при* $t \to +\infty$ *у просторі* $(S^1_2)'$.

Доведення. Розв'язок задачі (7), (20) дається формулою

$$u(t,x) = f * G(t,x) = \langle f_\xi, G(t, x-\xi)\rangle, f \in (S^1_{2,*})', (t,x) \in \Omega.$$

Доведемо, що $\langle u(t,\cdot), \varphi\rangle \to 0$ при $t \to +\infty$ для довільної функції $\varphi \in S^1_2$ (це і означатиме, що $u(t,\cdot) \to 0$ при $t \to +\infty$ у просторі $(S^1_2)'$). Покладемо

$$\Psi_t(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, x-\xi)\varphi(x)dx, \quad \Psi_{t,R}(\xi) = \int_{-R}^{R} G(t, x-\xi)\varphi(x)dx, \quad R > 0, t > 1.$$

У цих позначеннях доведемо, що: а) при кожному $t > 1$ і $R > 0$ функція $\Psi_{t,R}(\xi)$ є елементом простору S^1_2 і $\Psi_{t,R}(\xi) \to \Psi_t(\xi)$ при $R \to +\infty$ у просторі S^1_2; б) $\Psi_t(\xi) \in S^1_2$ при кожному $t > 1$. Звідси дістаємо, що

$$\langle u(t,\cdot), \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f_\xi, G(t, x-\xi)\rangle\varphi(x)dx = \langle f_\xi, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,x)\varphi(x+\xi)dx\rangle =$$

$$= \langle f_\xi, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)\varphi(-(y-\xi))dy\rangle = \langle f_\xi, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)\check{\varphi}(y-\xi)dy\rangle, \check{\varphi}(z) = \varphi(-z),$$

(тут $u(t,\cdot)$ трактується як регулярна узагальнена функція з простору $(S^1_2)'$ при кожному $t > 0$).

Отже, встановимо властивість а). При фіксованих $\{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+$ маємо:

$$|\xi^k D^m_\xi \Psi_{t,R}(\xi)| \le \int_{-R}^{R} |\xi^k \varphi(x) D^m_\xi G(t, x-\xi)|dx \le \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi^k \varphi(\xi+\eta) D^m_\eta G(t,\eta)|d\eta.$$

Оскільки $\varphi \in S^1_2$, то при деяких $c, L, M > 0$

$$|\xi^k D^m_\xi \varphi(\xi)| \le cL^k B^m k^{2k} m^m, \{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Звідси при кожному $\eta \in \mathbb{R}$:

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\xi^k \varphi(\xi+\eta)| = \sup_{y\in\mathbb{R}} |(y-\eta)^k \varphi(y)| = \sup_{y\in\eta} \Big| \sum_{l=0}^{k} C^l_k y^l (-\eta)^{k-l} \varphi(y)\Big| \le$$

$$\leq \sum_{l=0}^{k} C_k^l |\eta|^{k-l} \sup_{y\in\mathbb{R}} |y^l \varphi(y)| \leq c \sum_{l=0}^{k} C_k^l L^l l^{2l} |\eta|^{k-l}.$$

Далі скористаємося оцінками (17). Тоді

$$|\xi^k D_\xi^m \Psi_{t,R}(\xi)| \leq c \sum_{l=0}^{k} C_k^l L^l l^{2l} \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} |D_\eta^m G(t,\eta)| d\eta \leq$$

$$\leq cc_3 \overline{B}^m m^m t^{-1} \sum_{l=0}^{k} C_k^l L^l l^{2l} \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} \exp\{-a_0 t^{-1/2} |\eta|^{1/2}\} d\eta.$$

За допомогою безпосередніх обчислень знаходимо, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} \exp\{-a_0 t^{1/2} |\eta|^{1/2}\} d\eta \leq c_4 \tilde{L}^k k^{2(k-l)} t^{k-l+1}, c_4, \tilde{L} > 0.$$

Таким чином,

$$|\xi^k D_\xi^m \Psi_{t,R}(\xi)| \leq cc_3 c_4 \overline{B}^m m^m \sum_{l=0}^{k} C_k^l L^l \tilde{L}^{k-l} t^k l^{2l} k^{2(k-l)} \leq$$

$$\leq \overline{c}\overline{B}^m \overline{L}^k k^{2k} m^m, \tag{21}$$

де $\overline{c} = cc_3c_4$, $\overline{L} = 2\max\{L, \tilde{L}t\}$. Отже, $\Psi_{t,R}(\xi) \in S_2^1$ при кожному $t > 1$ і довільному $R > 0$. Далі безпосередньо переконуємося в тому, що $\Psi_{t,R}(\xi) \to \Psi_t(\xi)$ при $R \to +\infty$ рівномірно по ξ разом з усіма своїми похідними на кожному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Крім того, сукупність функцій $|\xi^k D_\xi^m \Psi_{t,R}(\xi)|$, $\{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+$, рівномірно обмежена (відносно R) у просторі S_2^1 (ця властивість випливає з оцінок (21), у яких сталі $\overline{c}, \overline{B}, \overline{L} > 0$ не залежать від R). Це і означає виконання умови а).

З умови а) випливає умова б), оскільки в досконалому просторі кожна обмежена множина є компактною.

Використовуючи властивості а), б), отримаємо співвідношення

$$\langle u(t,\cdot), \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)(f * \check{\varphi})(y) dy.$$

Оскільки $f \in (S_{2,*}^1)'$ – згортувач у просторі S_2^1, то $f * \check{\varphi} \in S_2^1$. Тоді, врахувавши оцінки (17) (при $s = 0$) отримаємо, що

$$|\langle u(t,\cdot), \varphi \rangle| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,-y)|\, |(f * \check{\varphi})(y)| dy \leq \frac{c}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} (G * \check{\varphi})(y) dy \leq \frac{c_0}{t} \to 0, t \to +\infty,$$

для довільної функції $\varphi \in S_2^1$, тобто $u(t,\cdot) \to 0$ при $t \to +\infty$ у просторі $(S_2^1)'$. Теорема доведена. □

Якщо узагальнена функція f в умові (20) є фінітною (тобто носій f ($\mathrm{supp} f$) – обмежена множина в $\mathbb{R}$), то можна говорити про рівномірне прямування до нуля на $\mathbb{R}$ при $t \to +\infty$ розв'язку $u(t,x)$ задачі (7), (20). Зауважимо, що кожна фінітна узагальнена функція є згортувачем у просторах типу S. Ця властивість випливає із загального результату, який стосується теорії досконалих просторів (див. [2, с. 173]): якщо Φ – досконалий простір із диференційовною операцією зсуву, то кожний фінітний функціонал є згортувачем у просторі Φ. Фінітні функціонали утворюють досить широкий клас. Зокрема, кожна обмежена замкнена множина $M \subset \mathbb{R}$ є носієм деякої фінітної функції [9].

Теорема 3. *Нехай $u(t,x)$ – розв'язок задачі* (7), (20) *з функцією f в умові* (20)*, яка є елементом простору $(S^{\beta}_{2,*})' \subset (S^{1}_{2,*})'$, $\beta > 1$ і $\mathrm{supp} f$ – обмежена множина в $\mathbb{R}$. Тоді $u(t,x) \to 0$ при $t \to +\infty$ рівномірно на $\mathbb{R}$.*

Наведемо схему доведення сформульованого твердження. Нехай $supp\ f \subset [a_1, b_1] \subset [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}$. Розглянемо функцію $\varphi \in S^{\beta}_{2}$, $\beta > 1$, таку, що $\varphi(x) = 1$, $x \in [a_1, b_1]$, $supp\ \varphi \subset [a_2, b_2]$. Така функція існує, оскільки простір S^{β}_{2} при $\beta > 1$ містить фінітні функції [2]. Подамо функцію $u(t,x)$ у вигляді

$$u(t,x) = \langle f_\xi, \varphi(\xi) G(t, x-\xi)\rangle + \langle f_\xi, \gamma(\xi) G(t, x-\xi)\rangle,$$

де $\gamma = 1 - \varphi$. Оскільки

$$\mathrm{supp}\,(\gamma(\xi) G(t, x-\xi)) \cap \mathrm{supp} f = \varnothing,$$

то

$$u(t,x) = t^{-1}\langle f_\xi, t\varphi(\xi) G(t, x-\xi)\rangle.$$

Для доведення твердження залишається встановити, що сукупність функцій $\Phi_{t,x}(\xi) = t\varphi(\xi)G(t, x-\xi)$ обмежена в просторі S^{β}_{2}, $\beta > 1$, при великих значеннях t і $x \in \mathbb{R}$ (ця властивість випливає з оцінок (17)).

Наприклад, якщо в умові (20) $f = \delta$, то δ – згортувач у просторах типу S і $\mathrm{supp}\delta = \{0\}$, при цьому $u(t,x) = \delta * G(t,x) = G(t,x)$. З оцінок (17) безпосередньо випливає, що $G(t,x) \to 0$ при $t \to +\infty$ рівномірно на $\mathbb{R}$.

Зауваження 4. *Оскільки $a(\sigma) = (1 + \sigma^2 + \sigma^4)^{1/4}$, $a(0) = 1$, то із співвідношення*

$$F[G(t,\cdot)] = Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma) = \int_{\mathbb{R}} G(t,x) e^{i\sigma x} dx, t > 0,$$

випливає формула

$$\int_{\mathbb{R}} G(t,x) dx = Q_1(t,0) Q_2(0) = \lambda_0 e^{-t}, \lambda_0 = \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(0) e^{-t_k}\Big)^{-1}$$

і $\int_{\mathbb{R}} G(t,x) dx \to 0$ при $t \to +\infty$.

Список літератури

[1] *Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.* Integrals and derivatives of fractional order and their applications. – Minsk: Nauka i thenika, 1987. – 688 p.

[2] *Gelfand I.M., Shylov G.E.* Spaces of basic and generalized functions . – M.: Fizmatgiz, 1958. – 307 p.

[3] *Dezin A.A.* General questions of the theory of boundary value problems . – M.: Nauka, 1980. – 208 p.

[4] *Nahushev A.M..* Equations of mathematical biology . – M.: Vysshaya shkola, 1995. – 301 p.

[5] *Gorodetskyi V.V., Martyniuk O.V.* Cauchy problem and nonlocal problems for first-order evolution equations on a time variable : Monograph. – Chernivtsi: Vydavnychyi dim "Rodovid", 2015. – 400 p.

[6] *Belavin I.A., Kapitsa S.P., Kurdyumov S.P.* Mathematical model of global demographic processes taking into account spatial distribution // Zhur. vych. matematyky i mat. fizuky. – 1998. – V. 38, N 6. – P. 885–902.

[7] *Gorodetskyi V.V., Myronyk V.I.* Two-point problem for one class of evolutionary equations . II // Differents. uravneniya. – 2010. – V. 46, N 4. – P. 520–526.

[8] *Gorodetskyi V.V., Nagnibida N.I., Nastasiev P.P.* Methods for solving functional analysis problems. – Kiev: Vysshaya shkola, 1990. – 479 p.

[9] *Gorodetskyi V.V.* Boundary properties of solutions of parabolic-type equations smooth in a layer. – Chernivtsi: Ruta, 1998. – 219 p.

Надійшло 26.11.2021

Bodnaruk S.B., Gorodetskyi V.V., Kolisnyk R.S., Shevchuk N.M. *Nonlocal by time problem for some differential-operator equation in spaces of S and S' types* , Bukovinian Math. Journal. **9**, 2 (2021), 53–69.

In the theory of fractional integro-differentiation the operator $A := \Big(I - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)$ is often used. This operator called the Bessel operator of fractional differentiation of the order of $1/2$. This paper investigates the properties of the operator $B := \Big(I - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^4}{\partial x^4}\Big)$, which can be understood as a certain analogue of the operator A. It is established that B is a self-adjoint operator in Hilbert space $L_2(\mathbb{R})$, the narrowing of which to a certain space of S type (such spaces are introduced in [2]) matches the pseudodifferential operator $F^{-1}_{\sigma\to x}[a(\sigma)F_{x\to\sigma}]$ constructed by the function-symbol $a(\sigma) = (1 + \sigma^2 + \sigma^4)^{1/4}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ (here F, F^{-1} are the Fourier transforms).

This approach allows us to apply effectively the Fourier transform method in the study of the correct solvability of a nonlocal by time problem for the evolution equation with the specified operator. The correct solvability for the specified equation is established in the case when the initial function, by means of which the nonlocal condition is given, is an element of the space of the generalized function of the Gevrey ultradistribution type. The properties of the fundamental solution of the problem was studied, the representation of the solution in the form of a convolution of the fundamental solution of the initial function is given.