Теплінський Ю. В.

ПРО НАБЛИЖЕННЯ МАЙЖЕ-ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНОЇ ЗЛІЧЕННОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ КВАЗІПЕРІОДИЧНИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ ДЕЯКОЇ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ

Добре відомо, що велика кількість прикладних задач у різних розділах математики, фізики, техніки потребує досліджень проблем існування коливних розв'язків диференціальних систем, що є їх математичними моделями. Особливо це стосується задач нелінійної механіки. У наш час коливними рухами динамічних систем за В. В. Немицьким називають їх рекурентні рухи. Як відомо з теорем Біркгофа, траєкторії таких рухів містять мінімальні компактні множини динамічних систем. До класу рекурентних рухів зокрема належать квазіперіодичні та майже-періодичні рухи. Широко відомі фундаментальні теореми Амеріо і Фавара, що стосуються існування майже-періодичних розв'язків лінійних та нелінійних систем. Становить також інтерес дослідження поведінки рухів динамічної системи в околі рекурентної траєкторії. Пізніше стало зрозумілим, що питання існування таких траєкторій тісно пов'язане з існуванням у таких систем інваріантних торів, для побудови яких зручно застосовувати метод функції Гріна-Самойленка. Тут розглядається нелінійна система диференціальних рівнянь, яка визначена на декартовому добутку нескінченновимірного тору $\mathcal{T}_\infty$ та простору обмежених числових послідовностей $\mathbf{m}$. Задача полягає у відшуканні достатніх умов, при яких задана система рівнянь має сім'ю майже-періодичних у сенсі Бора розв'язків, залежних від параметра $\psi \in \mathcal{T}_\infty$, кожен з яких можна наблизити квазіперіодичним розв'язком деякої лінійної системи рівнянь, визначеної на скінченновимірному торі.

Ключові слова і фрази: інваріантний тор, функція Гріна-Самойленка, квазіперіодичні та майже-періодичні функції.

Ivan Ogiyenko Kamyanets-Podilsky National University, Kamyanets-Podilsky, Ukraine
e-mail: *teplinsky.yuriy@gmail.com*

Вступ

Зліченними системами диференціальних рівнянь в широкому розумінні слова називають рівняння, визначені в банаховому просторі обмежених числових послідовностей. Тут ми розглянемо неілінійну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi, x)x + \varepsilon f(\varphi), \tag{1}$$

УДК 517.929.7
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34K10.

де ε — додатний параметр, вектор частот $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) \in \mathbf{m}$, $\omega_i > 0$ при всіх натуральних i, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots)$, $A(\varphi, x) = (a_{i,j}(\varphi, x))_{i,j=1}^{\infty}$ — нескінченна матриця з дійсними елементами, $\mathbf{m}$ — простір обмежених послідовностей дійсних чисел,

$$\|\omega\| = \sup_i \{\omega_i\} = \omega_0 < \infty, \ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \mathbf{m}, \ \|x\| = \sup_i \{|x_i|\},$$

$f(\varphi) = (f_1(\varphi), f_2(\varphi), \dots, f_n(\varphi), \dots)$ — векторна функція з дійсними координатами, причому матриця $A(\varphi, x)$ та функція $f(\varphi)$ 2π-періодичні відносно φ_i (i=1,2,3,...), що дає можливість визначити їх на декартовому добутку $\mathcal{T}_\infty \times D$, $D = \{x \in \mathbf{m} | \|x\| \le d = const < \infty\}$ та нескінченновимірному торі $\mathcal{T}_\infty$ відповідно і вважати неперервними на своїх областях визначення. Вважатимемо також, що

$$\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{(\varphi,x) \in \mathcal{T}_\infty \times \mathcal{D}} |a_{ij}(\varphi, x)| = A = const < \infty$$

і при всіх $\{\varphi, \bar{\varphi}\} \subset \mathcal{T}_\infty$ виконуються нерівності $\|f(\varphi)\| \le F$ та $\|f(\varphi) - f(\bar{\varphi})\| \le L\|\varphi - \bar{\varphi}\|$, де F і L – додатні сталі, а частоти ω_i є несумірними, тобто з рівності $\sum_{i=1}^{\infty} k_i \omega_i = 0$, де k_i – цілі числа, випливає, що $k_i = 0 \ \ \forall i = 1, 2, 3, \dots$.

Підставивши розв'язок першого рівняння системи (1) $\varphi = \omega t + \psi$ з початковою умовою $\varphi(0) = \psi \in \mathcal{T}_\infty$ у друге її рівняння, одержимо систему

$$\frac{dx}{dt} = A(\omega t + \psi, x)x + \varepsilon f(\omega t + \psi), \tag{2}$$

залежну від $\psi \in \mathcal{T}_\infty$ як від параметру, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots)$.

Основна задача полягає у відшуканні достатніх умов, при яких система рівнянь (1) або, що те саме, система рівнянь (2) мають інваріантний тор, і наблизити породжуючу його функцію $u(\psi)$ з потрібною точністю аналогічною функцією, побудованою для системи рівнянь, одержаної з даної в процесі її лінеаризації. Після цього застосовується процес укорочення останньої системи відносно кутової змінної і функція, яка породжує її інваріантний тор, апроксимується аналогічною функцією для лінійної укороченої системи, визначеної на декартовому добутку $\mathcal{T}_n \times \mathbf{m}$, де $\mathcal{T}_n$ — скінченновимірний тор. Він вкритий траєкторіями квазіперіодичних розв'язків вказаної укороченої системи, якими і можна наблизити майже-періодичні розв'язки системи (1).

При цьому майже-періодичні функції розуміються в сенсі Бора [1, 2, 3] і для побудови процесу лінеаризації системи (1) застосовується метод функції Гріна-Самойленка [4, 5] без використання поняття "грубості"цієї функції. Зауважимо, що багато питань, пов'язаних із квазіперіодичними функціями, висвітлено в [4], а з інваріантними торами зліченних систем еволюційних рівнянь — в [6, 7]. І, нарешті, задачу, що розглядається в цій статті, для випадків лінійної та квазілінійної зліченних систем розв'язано в [8, 9].

Нагадаємо, що інваріантним тором системи рівнянь (1) називають поверхню $\mathbf{T}$ в просторі $\mathbf{m}$, визначену відображенням $u(\psi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathbf{m}$, а саме

$$x = u(\psi) = \{u_1(\psi), u_2(\psi), \dots, u_n(\psi), \dots\}, \ \psi \in \mathcal{T}_\infty,$$

при умові, що функція $u(\psi) \in C^0(\mathcal{T}_\infty)$, обмежена на $\mathcal{T}_\infty$, функції $u_i(\omega t + \psi)$ $(i = 1, 2, 3, \dots)$ неперервно диференційовні по $t \in R^1$ і

$$\frac{du(\omega t + \psi)}{dt} = A(\omega t + \psi, u(\omega t + \psi))u(\omega t + \psi) + \varepsilon f(\omega t + \psi) \tag{3}$$

для всіх $t \in R^1$, $\psi \in \mathcal{T}_\infty$, де векторна функція $u(\omega t + \psi)$ диференціюється у покоординатному сенсі.

1 Допоміжне твердження

Норми вектора $f(\varphi)$ та матриці $A(\varphi, x)$ визначимо рівностями:

$$\|f(\varphi)\| = \sup_i \{|f_i(\varphi)|\}, \ \|\varphi\| = \sup_i \{|\varphi_i|\},$$

$$\|A(\varphi, x)\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}(\varphi, x)|,$$

$$\|f(\varphi)\|_0 = \sup_{\varphi \in \mathcal{T}_\infty} \|f(\varphi)\|, \ \|A(\varphi, x)\|_0 = \sup_{(\varphi, x) \in \mathcal{T}_\infty \times \mathcal{D}} \|A(\varphi, x)\|.$$

Очевидно, що $\|A(\varphi, x)\| \le \|A(\varphi, x)\|_0 \le A$.

Тепер оберемо таку довільну нескінченну матрицю $B(\varphi) = (b_{i,j}(\varphi))_{i,j=1}^{\infty}$ з дійсними 2π-періодичними відносно φ_i $(i = 1, 2, 3, \dots)$ елементами, для якої виконуються умови:

a) $\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\varphi \in \mathcal{T}_\infty} |b_{ij}(\varphi)| = B = const < \infty$,

b) $\|B(\varphi_1) - B(\varphi_2)\| \le L_1 \|\varphi_1 - \varphi_2\|$ $\forall \{\varphi_1, \varphi_2\} \subset \mathcal{T}_\infty$, $L_1 = const > 0$.

Як відомо [6,9], при цих умовах однорідна система рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = B(\omega t + \psi)x \tag{4}$$

має матрицант $\Omega_\tau^t(\psi) = (\omega_{ij}(t, \tau, \psi))_{i,j=1}^{\infty}$.

Припустимо, що для нього виконуються нерівності:

$$sup_i \sum_{j=1}^{\infty} sup_{(t,\tau,\psi) \in R^1 \times R^1 \times \mathcal{T}_\infty} |\omega_{ij}(t, \tau, \psi)| < \infty,$$

$$\|\Omega_\tau^t(\psi)\| \le K \exp\{-\gamma |t - \tau|\}, \tag{5}$$

де K та γ – додатні сталі, що не залежать від t, τ, ψ.

В [9] при зроблених вище припущеннях доведено, що вказаний матрицант неперервний у сенсі норми $\|\cdot\|$ по змінній $\tau \in R^1$ рівномірно відносно $\psi \in \mathcal{T}_\infty$ та по цьому параметру.

Розглянемо систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = B(\omega t + \psi)x + B^1(\omega t + \psi)x + \varepsilon f(\omega t + \psi), \tag{6}$$

де $B^1(\varphi) = (b^1_{i,j}(\varphi))_{i,j=1}^{\infty}$ — довільна нескінченна матриця з дійсними 2π-періодичними відносно φ_i $(i = 1, 2, 3, \dots)$ елементами, для якої виконуються умови, аналогічні до умов a та b, що стосувалися матриці B :

c) $\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\varphi\in\mathcal{T}_\infty} |b^1_{ij}(\varphi)| = B^1 = const < \infty$,

d) $\|B^1(\varphi_1) - B^1(\varphi_2)\| \le L^1\|\varphi_1 - \varphi_2\|$ $\forall\{\varphi_1, \varphi_2\} \subset \mathcal{T}_\infty$, $L^1 = const > 0$.

Сформулюємо наступне твердження, яке становить не лише допоміжний, але й самостійний інтерес.

Лема. *Нехай виконуються умови a, b, c, d. Якщо при цьому $KB^1 < \gamma$ та*

$$\varepsilon \le \min\{\frac{d(\gamma - B^1K)}{KF}; \frac{\gamma}{KB^1}\},$$

то система рівнянь (6) має інваріантний тор $\mathbf{\Theta}$, породжуюча функція якого задовольняє умову Гельдера з коефіцієнтом $\frac{1}{2}$ відносно $\psi \in \mathcal{T}_\infty$.

Доведення. Розглянемо спочатку систему

$$\frac{dx}{dt} = B(\omega t + \psi)x + \varepsilon f(\omega t + \psi), \tag{7}$$

Умова (5) забезпечує існування для системи рівнянь (4) функції Гріна-Самойленка задачі про лінійні розширення динамічних систем на торах, що має вигляд

$$G_0(\tau, \psi) = \begin{cases} \Omega^0_\tau(\psi), & \text{якщо} \quad \tau \le 0; \\ 0, & \text{якщо} \quad \tau > 0 \end{cases}.$$

У цьому разі система (7) має інваріантний тор $\mathbf{T^0}$, породжений функцією

$$u^0(\psi) = \varepsilon \int_{-\infty}^{0} \Omega^0_\tau(\psi) f(\omega\tau + \psi)d\tau,$$

причому $\|u^0(\psi)\| \le \frac{\varepsilon KF}{\gamma} \le d$. Цей тор вкритий траєкторіями розв'язків $x^0(t, \psi)$ рівняння (7), що залежать від параметра $\psi \in \mathcal{T}_\infty$ і визначаються рівностями

$$x^0(t, \psi) = u^0(\omega t + \psi) = \varepsilon \int_{-\infty}^{t} \Omega^t_\tau(\psi) f(\omega\tau + \psi)d\tau.$$

Використовуючи нерівність

$$\|\Omega^0_\tau(\varphi) - \Omega^0_\tau(\bar\varphi)\| \le \left(\frac{2K^3L_1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi - \bar\varphi\|^{\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{\gamma}{2}|\tau|\},$$

наведену в теоремі 1 з [9], неважко переконатися, що функція $u^0(\psi)$ неперервна відносно $\psi \in \mathcal{T}_\infty$, тобто $u^0(\psi) \in C^0(\mathcal{T}_\infty)$, причому $\forall\{\psi, \bar\psi\} \subset \mathcal{T}_\infty$

$$\|u^0(\psi) - u^0(\bar\psi)\| \le K^0\|\psi - \bar\psi\|^{\frac{1}{2}},$$

де

$$K^0 = \frac{\varepsilon}{\gamma}\left\{2F\left(\frac{2K^3L_1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} + K(2LF)^{\frac{1}{2}}\right\}, K^0 = const > 0.$$

Отже, функція $u^0(\psi)$ задовольняє відносно ψ умову Гельдера з показником $\frac{1}{2}$.

Запишемо тепер систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = B(\omega t+\psi)x + B^1(\omega t+\psi)u^0(\omega t+\psi) + \varepsilon f(\omega t+\psi).$$

Вона має інваріантний тор $\mathbf{T^1}$, породжений функцією

$$u^1(\psi) = \int_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0(\psi)[B^1(\omega\tau+\psi)u^0(\omega\tau+\psi) + \varepsilon f(\omega\tau+\psi)]d\tau.$$

При цьому $\|u^1(\psi)\|_0 \le \|u^0(\psi)\|_0(\frac{KB^1}{\gamma}+1)$. Покажемо, що функція $u^1(\psi)$ теж задовольняє умову Гельдера відносно $\psi \in \mathcal{T}_\infty$ з показником $\frac{1}{2}$. Дійсно, не дуже складні, але громіздкі перетворення ведуть до оцінки

$$\|u^1(\psi) - u^1(\bar{\psi})\| \le K^1\|\psi-\bar{\psi}\|^{\frac{1}{2}},$$

де

$$K^1 = \frac{\varepsilon}{\gamma}\{2\left(\frac{2K^3L_1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} B^1 d + K(2B_1L^1)^{\frac{1}{2}}d + KK^0B^1 +$$

$$+2\left(\frac{2K^3L_1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} F + K(2FL)^{\frac{1}{2}}\} = const > 0. \tag{8}$$

Позначимо

$$\Delta = \frac{\varepsilon}{\gamma}\{2\left(\frac{2K^3L_1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} B^1 d + K(2B_1L^1)^{\frac{1}{2}}d +$$

$$+2\left(\frac{2K^3L_1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} F + K(2FL)^{\frac{1}{2}}\} = const > 0,$$

звідки

$$K^1 = \Delta + \frac{\varepsilon KB^1}{\gamma}K^0. \tag{9}$$

Аналогічні міркування показують, що система рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = B(\omega t+\psi)x + B^1(\omega t+\psi)u^1(\omega t+\psi) + \varepsilon f(\omega t+\psi)$$

теж має інваріантний тор $\mathbf{T^2}$, породжений функцією

$$u^2(\psi) = \int_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0(\psi)[B^1(\omega\tau+\psi)u^1(\omega\tau+\psi) + \varepsilon f(\omega\tau+\psi)]d\tau.$$

При цьому $\|u^2(\varphi)\|_0 \le \|u^0(\psi)\|_0\{(\frac{KB^1}{\gamma})^2 + \frac{KB^1}{\gamma} + 1\}$ та $\|u^2(\psi) - u^2(\bar{\psi})\| \le K^2\|\psi-\bar{\psi}\|^{\frac{1}{2}}$, де стала K^2 задовольняє рівність (8), в якій замість K^1 та K^0 покладено K^2 та K^1 відповідно, тобто має місце рівність $K^2 = \Delta + \frac{\varepsilon KB^1}{\gamma}K^1$, аналогічна до рівності (9).

Очевидно, цей процес можна продовжувати нескінченно. Індуктивні міркування приводять до висновку, що $\forall n = 1,2,3,\dots$ система рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = B(\omega t+\psi)x + B^1(\omega t+\psi)u^{n-1}(\omega t+\psi) + \varepsilon f(\omega t+\psi) \tag{10}$$

має інваріантний тор $\mathbf{T^n}$, породжений функцією

$$u^n(\psi) = \int_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0(\psi)[B^1(\omega\tau+\psi)u^{n-1}(\omega\tau+\psi) + \varepsilon f(\omega\tau+\psi)]d\tau,$$

причому при умовах леми

$$\|u^n(\psi)\|_0 \le \|u^0(\psi)\|_0 \sum_{i=0}^{n} (\frac{KB^1}{\gamma})^i \le \|u^0(\psi)\|_0 \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{KB^1}{\gamma})^i \le \frac{\varepsilon KF}{\gamma - KB^1} \le d.$$

Тор $\mathbf{T^n}$ вкритий траєкторіями розв'язків $x^n(t,\psi)$ рівняння (10), що залежать від параметра $\psi \in \mathcal{T}_\infty$ і визначаються рівностями

$$x^n(t,\psi) = u^n(\omega t+\psi) = \int_{-\infty}^{t} \Omega_\tau^t(\psi)[B^1(\omega\tau+\psi)u^{n-1}(\omega\tau+\psi) + \varepsilon f(\omega\tau+\psi)]d\tau.$$

Очевидно, що функції $u^n(\psi)$ при всіх натуральних n задовольняють відносно ψ на торі $\mathcal{T}_\infty$ умову Гельдера з показником $\frac{1}{2}$. При цьому $\forall n = 2,3,4\ldots$ справджуються співвідношення

$$\|u^n(\psi) - u^n(\bar\psi)\| \le K^n \|\psi - \bar\psi\|^{\frac{1}{2}}, \quad K^n = \Delta + \frac{\varepsilon KB^1}{\gamma} K^{n-1} = const. \tag{11}$$

Таким чином $\{u^n(\psi)\}$ $(n = 0,1,2,3,\ldots)$ є послідовністю рівномірно неперервних за нормою відносно $\psi \in \mathcal{T}_\infty$ функцій. До того ж ця послідовність є рівностепенево відносно n неперервною при умові, що $\varepsilon KB^1 < \gamma$. Останнє безпосередньо випливає з (11).

Це означає, що для всіх $t \in R^1$, $\psi \in \mathcal{T}_\infty$ справджується рівність

$$\frac{du^n(\omega t+\psi)}{dt} = B(\omega t+\psi)u^n(\omega t+\psi) + B^1(\omega t+\psi)u^{n-1}(\omega t+\psi) + \varepsilon f(\omega t+\psi). \tag{12}$$

При цьому послідовність $\{u^n(\psi)\}$ $(n = 0,1,2,3,\ldots)$ рівномірно відносно $\psi \in \mathcal{T}_\infty$ збігається до деякої рівномірно неперервної за нормою відносно ψ фунуції $U(\psi)$, оскільки при $\frac{KB^1}{\gamma} < 1$ вона є фундаментальною в повному просторі $\mathbf{m}$, що випливає з оцінки

$$\|u^{n+1}(\psi) - u^n(\psi)\|_0 \le \frac{KB^1}{\gamma} \|u^n(\psi) - u^{n-1}(\psi)\|_0,$$

яка виконується при всіх натуральних n. Перейшовши до границі в рівності [12] при $n \to \infty$, переконуємося, що функція $U(\psi)$ визначає інваріантний тор $\mathbf{\Theta}$ системи рівнянь (6). □

2 Основні теореми

Теорема 1. *Припустимо, що існує матриця $B(\varphi)$, яка задовольняє умови a, b, та нерівність (5), $\|A(\varphi,x) - A(\bar\varphi,\bar x)\| \le L_2(\|\varphi - \bar\varphi\| + \|x - \bar x\|)$ при всіх $\{\varphi,\bar\varphi\} \subset \mathcal{T}_\infty$, $\{x,\bar x\} \subset D$. Якщо при цьому справджуються нерівності*

$$\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{(\varphi,x)\in\mathcal{T}_\infty\times\mathcal{D}} |a_{ij}(\varphi,x) - b_{ij}(\varphi)| \le \xi = const > 0,$$

$$\varepsilon KF \le d[\gamma - K\xi], \quad K(L_2 d + \xi) < \gamma,$$

то система рівнянь (1) має інваріантний тор $\mathbf{T}$*, породжуюча функція якого задовольняє умову Гельдера з коефіцієнтом* $\frac{1}{2}$ *відносно* $\psi \in \mathcal{T}_\infty$.

Доведення. Введемо позначення $P(\varphi, x) = A(\varphi, x) - B(\varphi)$ і запишемо систему рівнянь (1) у вигляді

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \frac{dx}{dt} = B(\varphi)x + P(\varphi, x)x + \varepsilon f(\varphi), \tag{13}$$

а систему (2) – у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = B(\omega t + \psi)x + P(\omega t + \psi, x)x + \varepsilon f(\omega t + \psi) \tag{14}$$

відповідно, та побудуємо для неї процес лінеаризації. Розпочнемо із системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = B(\omega t + \psi)x + P(\omega t + \psi, 0) \times 0 + \varepsilon f(\omega t + \psi),$$

яка співпадає з системою (7) і визначає інваріантний тор $\mathbf{T}^{\mathbf{0}}_* = \mathbf{T}^{\mathbf{0}}$, породжений функцією $u^0_*(\psi) = u^0(\psi)$, що задовольняє відносно ψ умову Гельдера з показником $\frac{1}{2}$.

Далі розглянемо систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = B(\omega t + \psi)x + P(\omega t + \psi, u^0_*(\omega t + \psi))u^0_*(\omega t + \psi) + \varepsilon f(\omega t + \psi). \tag{15}$$

Легко переконатися, що при умовах теореми 1 система (15) має інваріантний тор $\mathbf{T}^{\mathbf{1}}_*$, породжений функцією

$$u^1_*(\psi) = \int_{-\infty}^{0} \Omega^0_\tau(\psi)\{P(\omega\tau + \psi, u^0_*(\omega\tau + \psi))u^0_*(\omega\tau + \psi) + \varepsilon f(\omega\tau + \psi)\}d\tau,$$

причому справджуються нерівності

$$\|u^1_*(\psi)\|_0 \le \frac{K}{\gamma}\{\xi\|u^0_*(\varphi)\|_0 + \varepsilon F\} \le \frac{\varepsilon KF}{\gamma}\{\frac{\xi K}{\gamma} + 1\} \le d.$$

Для скорочення досить громіздких подальших записів введемо такі формальні позначення:

$$f(\omega\tau + \psi) = f(\tau, \psi), \quad f(\omega\tau + \psi) - f(\omega\tau + \bar{\psi}) = \overline{f(\tau, \psi)}, \quad \Omega^0_\tau(\psi) - \Omega^0_\tau(\bar{\psi}) = \overline{\Omega^0_\tau(\psi)},$$

$$P(\omega\tau + \psi, u^k_*(\omega t + \psi)) = P_k(\tau, \psi), \quad P_k(\tau, \psi) - P_k(\tau, \bar{\psi}) = \overline{P_k(\tau, \psi)},$$

$$u^k_*(\psi) - u^k_*(\bar{\psi}) = \overline{u^k_*(\psi)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Використовуючи їх, для різниці $u^1_*(\psi) - u^1_*(\bar{\psi})$ отримаємо рівність

$$\overline{u^1_*(\psi)} = \int_{-\infty}^{0} \overline{\Omega^0_\tau(\psi)}\varepsilon f(\tau, \psi)d\tau + \int_{-\infty}^{0} \overline{\Omega^0_\tau(\psi)}P_0(\tau, \psi)u^0_*(\psi)d\tau +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} \Omega^0_\tau(\bar{\psi})\overline{P_0(\tau, \psi)}u^0_*(\psi)d\tau + \int_{-\infty}^{0} \Omega^0_\tau(\bar{\psi})P_0(\tau, \bar{\psi})\overline{u^0_*(\psi)}d\tau + \int_{-\infty}^{0} \Omega^0_\tau(\bar{\psi})\varepsilon \overline{f\tau, \varphi)}d\tau.$$

Позначимо інтеграли, що містяться в правій частині цієї рівності, через I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 у порядку їх слідування. Для них одержуються оцінки:

$$\|I_1\| \le \frac{2\varepsilon\beta F}{\gamma}\|\psi-\bar\psi\|^{\frac{1}{2}}, \quad \|I_2\| \le \frac{2\beta d\xi}{\gamma}\|\psi-\bar\psi\|^{\frac{1}{2}},$$

$$\|I_3\| \le \frac{Kd}{\gamma}\{(2L_2+L_1)\sqrt{\pi}+L_2K^0\}\|\psi-\bar\psi\|^{\frac{1}{2}},$$

$$\|I_4\| \le \frac{KK_0\xi}{\gamma}\|\psi-\bar\psi\|^{\frac{1}{2}}, \quad \|I_5\| \le \frac{K\varepsilon\sqrt{2LF}}{\gamma}\|\psi-\bar\psi\|^{\frac{1}{2}},$$

де $\beta = (\frac{2K^3L_1}{\gamma})^{\frac{1}{2}}$. Після нескладних перетворень приходимо до нерівності

$$\|\overline{u^1_*(\psi)}\| \le \left\{\Delta_* + \frac{K(dL_2+\xi)}{\gamma}K^0\right\}\|\psi-\bar\psi\|^{\frac{1}{2}} = K^1_*\|\psi-\bar\psi\|^{\frac{1}{2}}, \tag{16}$$

де

$$\Delta_* = \frac{1}{\gamma}\{2\varepsilon\beta F + 2\beta d\xi + 2\sqrt{\pi}(KdL_2+L_1) + K\varepsilon\sqrt{2LF}\} = const > 0, \ K^1_* = const > 0.$$

Тому функція $u^1_*(\psi)$ є обмеженою за нормою сталою d і рівномірно неперервною відносно ψ на торі $\mathcal{T}_\infty$. Це дає можливімть в рівняння (15) замість $u^0_*(\psi)$ підставити $u^1_*(\psi)$ і знайти інваріантний тор $\mathbf{T^2_*}$ одержаного рівняння з відповідною породжуючою функцією $u^2_*(\psi)$.

Індуктивні міркування приводять до висновку, що $\forall n = 1,2,3,\ldots$ система рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = B(\omega t+\psi)x + P(\omega t+\psi, u^{n-1}_*(\omega t+\psi))u^{n-1}_*(\omega t+\psi) + \varepsilon f(\omega t+\psi) \tag{17}$$

має інваріантний тор $\mathbf{T^n_*}$, породжений функцією

$$u^n_*(\psi) = \int_{-\infty}^0 \Omega^0_\tau(\psi)\{P(\omega\tau+\psi, u^{n-1}_*(\omega\tau+\psi))u^{n-1}_*(\omega\tau+\psi) + \varepsilon f(\omega\tau+\psi)\}d\tau.$$

Дійсно, при умовах теореми 1 функції $u^n_*(\psi)$ при всіх натуральних n є обмеженими за нормою сталою d на торі $\mathcal{T}_\infty$, що випливає з нерівностей

$$\|u^n_*(\psi)\|_0 \le \|u^0_*(\psi)\|_0\sum_{i=0}^n(\frac{K\xi}{\gamma})^i \le \|u^0_*(\psi)\|_0\sum_{i=0}^\infty(\frac{K\xi}{\gamma})^i \le \frac{\varepsilon KF}{\gamma-K\xi} \le d.$$

Крім того, при всіх $n = 2,3,4,\ldots$ справджуються нерівності, аналогічні до оцінки (16):

$$\|\overline{u^n_*(\psi)}\| \le \left\{\Delta_* + \frac{K(dL_2+\xi)}{\gamma}K^{n-1}_*\right\}\|\psi-\bar\psi\|^{\frac{1}{2}} = K^n_*\|\psi-\bar\psi\|^{\frac{1}{2}},$$

де K^n_* – додатні сталі. Отже, функції $u^n(\psi)$ при всіх натуральних n задовольняють відносно ψ на торі $\mathcal{T}_\infty$ умову Гельдера з показником $\frac{1}{2}$, тобто є рівномірно неперервними по ψ. Більше того, ці функції є рівностепенево неперервними по ψ відносно n при умові, що $K(dL_2+\xi)<\gamma$, що випливає з рівностей

$$K_*^{n+1}-K_*^n=\frac{K(dL_2+\xi)}{\gamma}(K_*^n-K_*^{n-1}), n=1,2,3,\dots.$$

Інваріантний тор $\mathbf{T_*^n}$ вкритий траєкторіями розв'язків $x_*^n(t,\psi)$ рівняння (17), що залежать від параметра $\psi\in\mathcal{T}_\infty$ і визначаються рівностями

$$x_*^n(t,\psi)=u_*^n(\omega t+\psi)=\int_{-\infty}^t\Omega_\tau^t(\psi)\{P(\omega\tau+\psi,u_*^{n-1}(\omega\tau+\psi))u_*^{n-1}(\omega\tau+\psi)+\varepsilon f(\omega\tau+\psi)\}d\tau.$$

Це означає, що для всіх $t\in R^1$, $\psi\in\mathcal{T}_\infty$ справджується рівність

$$\frac{du_*^n(\omega t+\psi)}{dt}=B(\omega t+\psi)u_*^n(\omega t+\psi)+P(\omega t+\psi,u_*^{n-1}(\omega t+\psi))u_*^{n-1}(\omega t+\psi)+\varepsilon f(\omega t+\psi). \quad (18)$$

При цьому послідовність $\{u_*^n(\psi)\}$ $(n=0,1,2,3,\dots)$ рівномірно відносно $\psi\in\mathcal{T}_\infty$ збігається до деякої рівномірно неперервної за нормою відносно ψ фунуції $U_*(\psi)$, оскільки при всіх $n=1,2,3,\dots$ справджується нерівність

$$\|u_*^{n+1}(\psi)-u_*^n(\psi)\|_0\le\frac{K(dL_2+\xi)}{\gamma}\|u_*^n(\psi)-u_*^{n-1}(\psi)\|_0,$$

яка свідчить про те, що при $K(dL_2+\xi)<\gamma$ ця послідовність є фундаментальною в повному просторі $\mathbf{m}$, а отже, рівномірно відносно $\psi\in\mathcal{T}_\infty$ збіжною. Перейшовши до границі в рівності [18] при $n\to\infty$, переконуємося, що функція $U_*(\psi)$ визначає інваріантний тор $\mathbf{T}$ систем рівнянь (13) або (14) і одночасно систем рівнянь (1) або (2).

На завершення доведення надамо оцінку точності наближення функції $U_*(\psi)$ функцією $u_*^n(\psi)$. Легко побачити, що для цього достатньо оцінити залишковий член R_n числового ряду

$$\|u_*^0(\psi)\|_0+\sum_{n=1}^{\infty}\|u_*^n(\psi)-u_*^{n-1}(\psi)\|_0.$$

Врахувавши, що нерівність

$$\|u_*^1(\psi)-u_*^0(\psi)\|_0\le\frac{K^2\xi F\varepsilon}{\gamma^2}=C^*=const>0$$

веде до індуктивної нерівності

$$\|u_*^n(\psi)-u_*^{n-1}(\psi)\|_0\le\left(\frac{K(dL_2+\xi)}{\gamma}\right)^{n-1}C^*,$$

і позначивши дріб $\frac{K(dL_2+\xi)}{\gamma}$ черз p, отримаємо шукану оцінку

$$R_n=\sum_{i=n}^{\infty}\|u_*^i(\psi)-u_*^{i-1}(\psi)\|_0\le C^*\frac{p^{n-1}}{1-p}, \quad (19)$$

оскільки за умовою теореми $p<1$. Аналогічна оцінка $\|x(t,\psi)-x^n(t,\psi)\|\le C^*\frac{p^{n-1}}{1-p}$ виконується і для розв'язків $x(t,\psi)=U_*(\omega t+\psi)$ та $x_*^n(t,\psi)=u_*^n(\omega t+\psi)$ систем рівнянь (2) та (17) відповідно, що завершує доведення теореми 1. □

Зауваження 1. *Існуванання інваріантного тору системи рівнянь (1) забезпечується існуванням матриці $B(\varphi)$ з вказаними вище властивостями. Така матриця може існувати не одна. Тому ця система може мати й інші інваріантні тори, окрім тору* $\mathbf{T}$.

Надалі вважатимемо, що $A(\varphi, x)$, $B(\varphi)$, та $f(\varphi)$ задовольняють посилені умови Коші-Ліпшиця відносно φ з коефіцієнтами $L_2^*(m)$, $L_1^*(m)$ та $L^*(m)$ відповідно, якщо кожен з них прямує до нуля при $m \to \infty$ і справджуються нерівності

$$\|A(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \ldots, x) - A(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \overline{\varphi_{m+1}}, \overline{\varphi_{m+2}}, \ldots, \bar{x})\| \leq$$
$$\leq L_2^*(m)(\sup\{|\varphi_{m+1} - \overline{\varphi_{m+1}}|, |\varphi_{m+2} - \overline{\varphi_{m+2}}|, \ldots\} + \|x - \bar{x}\|),$$
$$\|B(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \ldots) - B(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \overline{\varphi_{m+1}}, \overline{\varphi_{m+2}}, \ldots)\| \leq$$
$$\leq L_1^*(m) \sup\{|\varphi_{m+1} - \overline{\varphi_{m+1}}|, |\varphi_{m+2} - \overline{\varphi_{m+2}}|, \ldots\},$$
$$\|f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \ldots) - f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \overline{\varphi_{m+1}}, \overline{\varphi_{m+2}}, \ldots)\| \leq$$
$$\leq L^*(m) \sup\{|\varphi_{m+1} - \overline{\varphi_{m+1}}|, |\varphi_{m+2} - \overline{\varphi_{m+2}}|, \ldots\},$$

де

$$(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \ldots), \quad (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \overline{\varphi_{m+1}}, \overline{\varphi_{m+2}}, \ldots)$$

– довільні точки з $\mathcal{T}_\infty$, перші m відповідних координат яких попарно співпадають, $\{x, \bar{x}\} \subset D$.

Очевидно, що при $m = 0$ ці умови перетворюються у звичайні умови Коші-Ліпшиця, які були використані при доведенні теореми 1, якщо покласти $L^*(0) = L$, $L_1^*(0) = L_1$, та $L_2^*(0) = L_2$.

Тепер повернемося до системи рівнянь (17) і розглянемо відповідну їй укорочену відносно φ до m-го порядку, тобто визначену на m-вимірному торі $\mathcal{T}_m$, систему рівнянь виду

$$\frac{dx}{dt} = B(\omega^{(m)}t + \psi^{(m)})x + P(\omega^{(m)}t + \psi^{(m)}, u_*^{n-1}(\omega^{(m)}t + \psi^{(m)}))u_*^{n-1}(\omega^{(m)}t + \psi^{(m)}) +$$
$$+\varepsilon f(\omega^{(m)}t + \psi^{(m)}), \tag{20}$$

де

$$\psi^{(m)} = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m, 0, 0, 0, \ldots), \ \omega^{(m)} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m, 0, 0, 0, \ldots).$$

Очевидно, що матрицант $\Omega_\tau^t(\psi^{(m)})$ однорідної системи $\frac{dx}{dt} = B(\omega^{(m)}t + \psi^{(m)})x$ задовольняє нерівність (5), де K та γ не залежать від t, τ та будь-якого натурального числа m . Тоді система (20) має інваріантний тор $\mathbf{T}_*^{\mathbf{n},\mathbf{m}}$, що породжується функцією

$$u_*^n(\psi^{(m)}) = \int_{-\infty}^0 \Omega_\tau^0(\psi^{(m)})\{P(\omega^{(m)}\tau + \psi^{(m)}, u_*^{n-1}(\omega^{(m)}\tau + \psi^{(m)}))u_*^{n-1}(\omega^{(m)}\tau + \psi^{(m)}) +$$
$$+\varepsilon f(\omega^{(m)}\tau + \psi^{(m)})\}d\tau,$$

і сім'ю розв'язків $x_*^n(t, \psi^{(m)})$, які залежать від параметра $\psi^{(m)} \in \mathcal{T}_m$, траєкторії яких належать цьому інваріантному тору:

$$x_*^n(t, \psi^{(m)}) = u_*^n(\omega^{(m)}t + \psi^{(m)}) =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \Omega_\tau^0(\psi^{(m)})\{P(\omega^{(m)}\tau + \psi^{(m)}, u_*^{n-1}(\omega^{(m)}\tau + \psi^{(m)}))u_*^{n-1}(\omega^{(m)}\tau + \psi^{(m)}) +$$

$$+\varepsilon f(\omega^{(m)}\tau + \psi^{(m)})\}d\tau.$$

Покажемо тепер, що послідовність функцій $\{u_*^n(\psi^{(m)})\}$ при $m \to \infty$ збігається до функції $\underline{u_*^n(\psi)}$ в сенсі норми рівномірно відносно $\psi \in \mathcal{T}_\infty$. Дійсно, підставивши $\psi^{(m)}$ у вираз $\overline{u_*^n(\psi)}$ замість $\bar{\psi}$, згідно доведення теореми 1 отримаємо оцінку

$$\|u_*^n(\psi) - u_*^n(\psi^{(m)})\| \leq K_*^n(m) 2\sqrt{\pi},$$

причому $\lim_{n\to\infty} K_*^n(m) = 0$, що випоиває з посилених умов Коші-Ліпшиця, накладених на матриці $A(\varphi, x)$, $B(\varphi)$, та функцію $f(\varphi)$. Тоді рівномірно відносно $t \in R^1$

$$\|u_*^n(\omega t + \psi) - u_*^n(\omega^m t + \psi^{(m)})\| \leq K_*^n(m) 2\sqrt{\pi},$$

тобто послідовність $x_*^n(t, \psi^{(m)})$ розв'язків рівняння (20) рівномірно відносно $t \in R^1$ збігається до розв'язку $x_*^n(t, \psi)$ рівняння (17).

Нагадаємо, що векторну функцію називають майже-періодичною або квазіперіодичною, якщо такими є всі її координати. Зрозуміло, що функції $x_*^n(t, \varphi^{(m)})$ при всіх натуральних m є квазіперіодичними. У цьому разі функції $x_*^n(t, \varphi)$ є майже-періодичними при всіх натуральних n. Тоді система рівнянь (1) має сім'ю майже-періодичних розв'язків $x(t, \psi)$, траєкторії яких покривають її інваріантний тор $\mathbf{T}$.

Сформулюємо тепер основний результат цієї статті.

Теорема 2. *Припустимо, що для системи рівнянь (1) виконуються всі умови теореми 1, причому матриці $A(\varphi, x)$, $B(\varphi)$ та функція $f(\varphi)$ задовольняють посилені умови Коші-Ліпшиця відносно $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$.*

Тоді система рівнянь (1) має сім'ю майже-періодичних у сенсі Бора розв'язків $x(t, \psi)$, залежних від параметра $\psi \in \mathcal{T}_\infty$, кожен з яких рівномірно відносно ψ можна наблизити із наперед заданою точністю квазіперіодичним розв'язком $x_*^n(t, \psi^{(m)})$ системи рівнянь (20).

Зауваження 2. *Наближати розв'язок $x(t, \psi)$ системи (1) розв'язком $x_*^n(t, \psi^{(m)})$ з наперед заданою точністю можна різними способами щодо обрання числа n з рівності (19) та порядку укорочення m. Відмітимо, що константи $K_*^n(m)$ одержано конструктивним шляхом і процес їх відшукання можна реалізувати на комп'ютері.*

Список літератури

[1] Bohr H. A. Almost Periodic Functions. Chelsea, New York, 1947.

[2] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. Наука, Москва, 1967.

[3] Левитан Б. М. Почти-периодические функции. Гостехиздат, Москва, 1953.

[4] Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Наука, Москва, 1987.

[5] Самойленко А. М. *О сохранении инвариантного тора при возмущении.* Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970, **34** (6), 1219–1240.

[6] Samoilenko A. M., Teplinskii Yu. V. Countable Systems of Differential Equations. VSP, Utrecht-Boston, 2003.

[7] Samoilenko A. M., Teplinsky Yu. V. Elements of Matematical Theory of Evolutionary Equations in Banach Spaces. World Scientific. Series A, Vol. 86, Singapore, 2013.

[8] Теплінський Ю. В. *Наближений метод побудови майже-періодичних розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь, визначених на нескінченновимірних торах.* Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. Кам'янець-Подільський, 2020. Вип. 21, 137–144. DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.

[9] Теплінський Ю. В. *Про інваріантні тори квазілінійних зліченних систем диференціальних рівнянь, визначених на нескінченновимірних торах.* Нелінійні коливання. 2020, **23** (4), 253–264. http://umj.imath.kiev.ua/ISSN 1562–3076.

Список літератури

[1] Bohr H. A. Almost Periodic Functions. Chelsea, New York, 1947.

[2] Demidovich B. P. Lectures on Mathematical Theory of Stability. Nauka, Moscow, 1967. (in Russian)

[3] Levitan B. M. Almos Periodic Functions. Gostekhisdat, Moskow, 1953. (in Russian)

[4] Samoilenko A. M. Elements of the Mathematical Theory of Multifrequency Oscillations. Nauka, Moskow,1987. (in Russian)

[5] Samoilenko A. M. *On the preservation of an invariant torus under perturbations.* Izv. Akad. Nauk SSSR. 1970, **34** (6), 1219-1240. (in Russian)

[6] Samoilenko A. M., Teplinskii Yu. V. Countable Systems of Differential Equations. VSP, Utrecht-Boston, 2003.

[7] Samoilenko A. M., Teplinsky Yu. V. Elements of Matematical Theory of Evolutionary Equations in Banach Spaces. World Scientific. Series A, Vol. 86, Singapore, 2013.

[8] Teplinsky Yu. V. *Approximate method of constructing almost-periodic solutions of linear systems of differential equations defined on infinite-dimensional tori.* Mathematical and computer modelling. Series: Physical end mathematical sciences: scientific journal. V. M. Glushkov Institute of National Academy of Sciences of Ukraine, Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University, Kamianets-Podilskyi, 2020. ISSUE 21, 137–144. DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21. (in Ukrainian)

[9] Teplinsky Yu. V. *On invariant tori of quasilinear countable systems of differential equations defined on infinite-dimensional tori.* Nonlinear Oscillations. 2020, **23** (4), 253-264. http://umj.imath.kiev.ua/ISSN 1562–3076. (in Ukrainian)

Надійшло 16.11.2021

Teplinsky Yu.V. *On approximation of almost-periodic solutions for a non-linear countable system of differential equations by quasi-periodic solutions for some linear system*, Bukovinian Math. Journal. **9**, 2 (2021), 111–123.

It is well-known that many applied problems in different areas of mathematics, physics, and technology require research into questions of existence of oscillating solutions for differential systems, which are their mathematical models. This is especially true for the problems of celestial mechanics. Novadays, by oscillatory motions in dynamical systems, according to V. V.

Nemitsky, we call their recurrent motions. As it is known from Birkhoff theorem, trajectories of such motions contain minimal compact sets of dynamical systems. The class of recurrent motions contains, in particular, both quasi-periodic and almost-periodic motions. There are renowned fundamental theorems by Amerio and Favard related to existence of almost-periodic solutions for linear and non-linear systems. It is also of interest to research the behavior of a dynamical system's motions in a neighborhood of a recurrent trajectory. It became understood later, that the question of existence of such trajectories is closely related to existence of invariant tori in such systems, and the method of Green-Samoilenko function is useful for constructing such tori. Here we consider a non-linear system of differential equations defined on Cartesian product of the infinite-dimensional torus $\mathcal{T}_\infty$ and the space of bounded number sequences $\mathbf{m}$. The problem is to find sufficient conditions for the given system of equations to possess a family of almost-periodic in the sense of Bohr solutions, dependent on the parameter $\psi \in \mathcal{T}_\infty$, every one of which can be approximated by a quasi-periodic solution of some linear system of equations defined on a finite-dimensional torus.