Працьовитий М.В.,[1] Гончаренко Я.В.,[2] Дмитренко С.О.,[3] Лисенко І.М.,[4] Ратушняк С.П.[5]

ПРО ОДИН КЛАС ФУНКЦІЙ З ФРАКТАЛЬНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

У роботі розглядається одне узагальнення функцій, які Бл. Сендов називав «двоично собственно-подобные», здійснюється аналіз зв'язків об'єкта вивчення з відомими класами фрактальних функцій, з геометрією числових рядів, розподілами випадкових величин з незалежними випадковими цифрами двосимвольного Q_2-зображення, з теорією фракталів. Для функцій цього класу вивчаються структурні, варіаційні, інтегральні, диференціальні та фрактальні властивості.

Ключові слова і фрази: Q_2-зображення чисел, Q_2-циліндр, основне метричне відношення, множина неповних сум ряду, квазіпоказникова функція, сингулярна функція, експоненційний розподіл на відрізку, функція з фрактальними властивостями, фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича.

[1,2,4]National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv, Ukraine
[1,5]Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
[3]National Academy of Educational Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine
e-mail: *prats4444@gmail.com, goncharenko.ya.v@gmail.com,sergey@inlay.com.ua, iryna.pratsiovyta@gmail.com,ratush404@gmail.com*

Вступ

У роботі [11] Бл. Сендов розглядав функції, ним названі *двійково власне-подібними*, кожна з яких визначалась своєю числовою послідовністю (λ_k) ненульових елементів такою, що $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$, і функціональними співвідношеннями:

$$f(x+2^{-k}) = \lambda_k f(x), \quad x \in \nabla^2_{a_1\ldots a_k 0}, \ k = 1, 2, ...,$$

де $\nabla^2_{a_1\ldots a_k 0} = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} 2^{-i}a_i; 2^{-k} + \sum\limits_{i=1}^{k} 2^{-i}a_i\right)$, $a_i \in A \equiv \{0, 1\}$.

Функції цього класу мають представлення

$$f(x = \Delta^2_{a_1\ldots a_k\ldots}) = \prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{a_k(x)}, \ \text{де } x = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}a_k \equiv \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}.$$

УДК 517.5, 519.21, 511.72
2010 *Mathematics Subject Classification:* 26A46, 26A21, 26A30.
Світлій пам'яті професора Володимира Кириловича Маслюченка присвячується.

Легко бачити, що даному класу належать всі показникові функції (справді, функції $y = a^x$ відповідає послідовність $\lambda_k = a^{2^{-k}}$), а при $\lambda_k = 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ маємо $f(x) = 1$.

Акцент у згаданій роботі Сендова зроблено на питаннях неперервності функції за Гаусдорфом, інтегральних та «фрактальних» властивостях функцій цього класу, а також на їх використанні для конструювання системи ортогональних функцій типу Уолша (Вулша) і пакету перетворень Хаара.

А до чого приведе використання замість класичного двійкового зображення аргумента деякого іншого його двосимвольного зображення? Дана робота присвячена саме цьому питанню. Укрупнення моделі класу функцій ми отримуємо за рахунок використання узагальнення класичного двійкового зображення чисел відрізка $[0;1]$.

Нехай $\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...}$ — Q_2-зображення числа $x \in [0;1]$, тобто для заданого додатного числа q_0 і числа $q_1 \equiv 1 - q_0$ розглядається розклад

$$x = \alpha_1 q_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}(\alpha_k q_{1-\alpha_k}\prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i}) \equiv \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...},$$

де $\alpha_k \in \{0,1\} \equiv A$, який називається [14] Q_2-представленням числа x. Якщо $q_0 = \frac{1}{2}$, то Q_2-зображення є класичним двійковим [12].

У даній роботі основним об'єктом вивчення є функція

$$f(x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...}) = \prod_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{\alpha_k(x)}, \tag{1}$$

де (λ_k) — наперед задана послідовність додатних чисел така, що нескінченний добуток $P \equiv \prod\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k$ є абсолютно збіжним.

Нагадаємо, що нескінченний добуток $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k \equiv \lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\lambda_k$ називається *збіжним*, якщо збігається послідовність (P_n) його частинних добутків $P_n \equiv \prod\limits_{k=1}^{n}\lambda_k$ до числа, відмінного від нуля. У протилежному випадку, він називається *розбіжним*, зокрема розбіжним до нуля. Нескінченний добуток $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається добуток $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + |a_n|)$, що рівносильно збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Оскільки існує зліченна множина чисел, які мають два зображення ($\Delta^{Q_2}_{c_1...c_m1(0)} = \Delta^{Q_2}_{c_1...c_m0(1)}$, їх ми називаємо Q_2-*бінарними*), то корекність означення функції рівністю (1) забезпечується домовленістю розглядати лише перше з вказаних зображень таких чисел, а саме те, що має період (0). Решта чисел називаються Q_2-*унарними*, в них коректність означення функції очевидна.

Нас цікавлять структурні, варіаційні, інтегральні, диференціальні та фрактальні властивості функції (1), а також її зв'язки з відомими класами фрактальних функцій (сингулярних, ніде не монотонних тощо) [15].

Очевидними є наступні рівності:

1) $f(0 = \Delta^{Q_2}_{(0)}) = 1$, $f(1 = \Delta^{Q_2}_{(1)}) = P$, $f(x = \Delta^{Q_2}_{c_1...c_m1(0)}) = \lambda_1^{c_1}\lambda_2^{c_2}...\lambda_m^{c_m}\lambda_{m+1}$;

2) $\frac{f(\Delta^{Q_2}_{a_1 a_2 \ldots a_k \ldots})}{f(\Delta^{Q_2}_{b_1 b_2 \ldots b_k \ldots})} = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{a_k - b_k}$, зокрема, $f(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m c \alpha_{m+2} \ldots}) = \lambda_{m+1}^{2c-1} f(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m [1-c] \alpha_{m+2} \ldots})$.

Остання рівність виражає властивість структурної подібності функції f.

Примітка 1. Оскільки $\lambda_k > 0$, то $\lambda_k = e^{v_k}$ для деякого дійсного числа v_k, а тому рівність (1) записується у формі

$$f(x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}) = \prod_{k=1}^{\infty} e^{v_k \alpha_k} = e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k \alpha_k}, \tag{2}$$

причому з абсолютної збіжності нескінченного добутку $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_k \cdot \ldots$ випливає абсолютна збіжність ряду $v_1 + v_2 + \ldots + v_k + \ldots$.

Кажуть [16], що функція має фрактальні властивості, якщо виконується принаймні одна з умов: вона трансформує фрактальну розмірність борелівських множин або має
1) хоча би одну фрактальну множину рівня;
2) фрактальний графік (як множину в $\mathbb{R}^2$);
3) фрактальну множину точок несталості (спадання, зростання тощо);
4) фрактальну множину особливостей (диференціального або іншого характеру);
5) розподіл значень при рівномірному розподілі аргумента, який зосереджений на фракталі; тощо.

1 Структурні властивості і множина значень функції

Нагадаємо, що *неповною сумою (підсумою)* збіжного числового ряду

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = (u_1 + u_2 + \ldots + u_k) + r_k = S_k + r_k, \tag{3}$$

визначеною множиною $M \subset \mathbb{N}$, називається число $x = x(M) = \sum\limits_{i \in M} u_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i u_i$, де $\varepsilon_i = 1$, якщо $i \in M$; $\varepsilon_i = 0$, якщо $i \notin M$. *Множиною неповних сум (підсум)* ряду (3) називається множина $E(u_n)$ всіх його підсум, тобто $E(u_n) = \{x : x = \sum\limits_{n \in M} u_n, M \in 2^{\mathbb{N}}\}$, де M — пробігає сім'ю всіх підмножин множини натуральних чисел.

Множина неповних сум (підсум) абсолютно збіжного числового ряду є континуальною і досконалою [3], вона належить до одного з трьох топологічних типів [4, 7]:

1) є скінченним об'єднанням відрізків; 2) є ніде не щільною множиною;

3) є двостороннім канторвалом — об'єднанням континуальної ніде не щільної множини і зліченної множини відрізків, а саме множиною, гомеоморфною множині підсум ряду

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \ldots + \frac{3}{4^n} + \frac{2}{4^n} + \ldots,$$

що рівносильно, гомеоморфною множині $T \equiv C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n-1} = [0;1] \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_{2n}$, де $G_k = \bigcup\limits_{\alpha_1 \in \{0,2\}} \ldots \bigcup\limits_{\alpha_{k-1} \in \{0,2\}} (\Delta^3_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} 1(0)}; \Delta^3_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} 1(2)})$, $\Delta^3_{c_1 \ldots c_k} \equiv \frac{c_1}{3} + \ldots + \frac{c_k}{3^k} + \ldots$, $c_i \in \{0, 1, 2\}$.

Загальна теорія геометрії числових рядів, яка вивчає тополого-метричні властивості множин їх неповних сум, достатньо бідна. Вона містить ряд складних проблем, які стосуються критеріїв нуль-мірності множини підсум, її канторвальності тощо. Сьогодні прогрес теорії забезпечується за рахунок вивчення множин неповних сум рядів з певними умовами однорідності, які належать масивним багатопараметричним класам [5, 8, 10].

Оскільки означення функції f ґрунтується на ланцюжку залежностей

$$[0;1] \ni x \leftrightarrow (\alpha_n) \in L \to \varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \alpha_i(x) \to f(x) = e^{\varphi(x)},$$

де $L = A \times A \times ...$ — простір послідовностей нулів та одиниць, то очевидним є наступне твердження.

Лема 1. *Функція f має структуру: $f(x) = e^{\varphi(x)}$, де*

$$\varphi(x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = v_1\alpha_1(x) + v_2\alpha_2(x) + ... + v_n\alpha_n(x) + ...$$

Наслідок 1. *Множина значень функції f з точністю до зліченної множини є образом множини неповних сум ряду $v_1 + v_2 + ... + v_n + ...$ під дією функції $y = e^x$, тобто є проміжком, об'єднанням проміжків, ніде не щільною множиною або канторвалом.*

Оскільки, дбаючи про коректність означення функції, ми заборонили використання зображення Q_2-бінарних чисел, які мають період (1), то з множини неповних сум ряду, взагалі кажучи, вилучаються точки (числа) виду $u = v_1\alpha_1 + v_2\alpha_2 + ... + v_m\alpha_m + r_m$, де $r_m = v_{m+1} + v_{m+2} + ...$, які утворюють зліченну множину.

Приклад 1. Якщо $v_n = \frac{2}{3^n}$, то множина значень функції f є ніде не щільною нуль-множиною Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої дорівнює $\log_3 2$.

Справді, множиною неповних сум ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ є класична множина Кантора, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої дорівнює $\log_3 2$. Оскільки функція $y = e^x$ зберігає розмірність борелівських множин [1], то в даному випадку множини значень функцій f і φ мають рівні розмірності.

Приклад 2. Якщо $v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$, то множиною значень функції f є відрізок $[e^{-\frac{1}{3}}; e^{\frac{2}{3}}]$.

Справді, множина неповних сум ряду $v_1 + v_2 + ...$ є відрізок $[-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$.

Справедливе більш загальне твердження.

Теорема 1. *Якщо $\lambda_k = e^{v_k}$, $v_k \geq r_k \equiv v_{k+1} + v_{k+2} + ... > 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, то функція f, означена рівністю (1), є неспадною, причому зростаючою при виконані строгої нерівності, в цьому випадку її множина значень E_f є ніде не щільною множиною , яка має міру Лебега рівну нулю лише тоді, коли $\lim\limits_{k\to\infty} 2^k r_k = 0$, а її фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича обчислюється за формулою $\alpha_0(E_f) = -\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\log_2 r_n}$.*

Доведення. З умови $v_k \geq r_k \equiv v_{k+1} + v_{k+2} + ... > 0$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ випливає, що функція $\varphi(x)$ є неспадною (причому це не залежить від основи q_0, оскільки всі Q_2-зображення є топологічно еквівалентними [13]).

Справді, якщо $x_1 < x_2$, то $x_1 = \Delta^{Q_2}_{c_1...c_{k-1}0\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}...}$, $x_2 = \Delta^{Q_2}_{c_1...c_{k-1}1\alpha'_{k+1}\alpha'_{k+2}...}$, причому $\alpha_{k+m} - \alpha'_{k+m} \neq 1$ для деякого m. Тоді

$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \geq \varphi(\Delta^{Q_2}_{c_1...c_{k-1}1(0)}) - \varphi(\Delta^{Q_2}_{c_1...c_{k-1}0(1)}) = v_k - (v_{k+1} + v_{k+2} + ...) = v_k - r_k \geq 0.$

Якщо $v_k > r_k$, то $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \geq v_k - r_k > 0$, тобто функція строго зростає. В цьому випадку, згідно з теоремою Какея [3], її множина значень E_φ є ніде не щільною досконалою множиною канторівського типу, міра Лебега якої, як відомо [13], обчислюється за формулою $\lambda(E_\varphi) = \lim\limits_{k\to\infty} 2^k r_k$.

Оскільки показникові функції володіють властивістю N, тобто образом множини нульової міри Лебега під дією функції є нуль-множина Лебега, то $\lambda(E_f) = 0$ лише тоді, коли $\lambda(E_\varphi) = 0$.

Функція $y = e^x$ зберігає розмірність Гусдорфа-Безиковича борелівських множин (див. [1]), тому розмірності множин E_f і E_φ рівні, а розмірність останньої, як відомо [13], обчислюється за вказаною в теоремі формулою. □

2 Неперервність та стрибки функції

Теорема 2. *Функція f неперервна в кожній Q_2-унарній точці, а в Q_2-бінарній точці неперервна справа.*

Доведення. Нехай $x_0 = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$ — довільне Q_2-унарне число. Розглянемо $x = \Delta^{Q_2}_{a_1...a_n...}$ таке, що $x \neq x_0$. Тоді існує m таке, що $a_m \neq \alpha_m$, але $a_i = \alpha_i$ при $i < m$. Тому маємо

$$\frac{f(x)}{f(x_0)} = \prod_{i=1}^{m-1} \lambda_i^{a_i-\alpha_i} \cdot \lambda_m^{a_m-\alpha_m} \cdot \prod_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i^{a_i-\alpha_i},$$

але $\prod\limits_{i=1}^{m-1} \lambda_i^{a_i-\alpha_i} = 1$, $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_m = 1 = \lim\limits_{m\to\infty} \prod\limits_{i=1}^{m-1} \lambda_i^{a_i-\alpha_i}$. Отже, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, тобто функція f є неперервною в точці x_0.

Розглянемо Q_2-бінарну точку $x_0 = \Delta^{Q_2}_{c_1c_2...c_m1(0)} = \Delta^{Q_2}_{c_1c_2...c_m0(1)}$. Нехай $x > x_0$ і достатньо близьке до x_0. Тоді $x = \Delta^{Q_2}_{c_1...c_m1\underbrace{0...0}_{k}\alpha_{m+k+2}...}$, причому серед членів послідовності (α_{m+k+2}) є одиниці, разом з цим умова $x \to x_0$ рівносильна тому, що $k \to \infty$. Оскільки $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{f(x_0)} = 1$, то f — неперервна в точці x_0 справа. □

Лема 2. *Нехай $x_0 = \Delta^{Q_2}_{c_1c_2...c_m1(0)}$. Тоді*

$$\delta(x_0) \equiv \lim_{x\to x_0-0}[f(x_0) - f(x)] = \lambda_1^{c_1}...\lambda_m^{c_m}(\lambda_{m+1} - \prod_{i=2}^{\infty}\lambda_{m+i}). \tag{4}$$

Якщо $\lambda_{m+1} \neq \lambda_{m+2} \cdot \lambda_{m+3} \cdot ...$, тобто $v_{m+1} \neq v_{m+2} + v_{m+3} + ...$, то стрибок $\delta(x_0)$ функції f у точці x_0 обчислюється за формулою (4).

Доведення. Нехай $x < x_0$. Якщо x достатньо близьке до x_0, то $x = \Delta^{Q_2}_{c_1...c_m0\underbrace{1...1}_{k}\alpha_{m+k+2}...}$, причому серед членів послідовності (α_{m+2+k}) є 0 і $x \to x_0$ рівносильно $k \to \infty$. Тому

$$\lim_{x\to x_0}[f(x_0) - f(x)] = \lambda_1^{c_1}...\lambda_m^{c_m}(\lambda_{m+1} - \frac{P}{\lambda_1...\lambda_m\lambda_{m+1}}),$$

тобто виконується рівність (4). Отже, у випадку розривності функції в точці x_0 її стрибок обчислюється за цією формулою. □

Наслідок 2. *У Q_2-бінарній точці $x_0 = \Delta^{Q_2}_{c_1c_2...c_m1(0)}$ функція f є неперервною зліва тоді і тільки тоді, коли $\lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} \cdot \lambda_{m+3} \cdot ...$, тобто $v_{m+1} = v_{m+2} + v_{m+3} + ...$.*

Теорема 3. *Функція f, означена рівністю (1), неперервна на відрізку $[0;1]$ тоді і тільки тоді, коли $\lambda_k = e^{\frac{b}{2^k}}$ для деякого $b \in \mathbb{R}$ і всіх $k \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Для того щоб функція f була неперервною в кожній Q_2-бінарній точці, необхідно і достатньо, щоб умова (4) виконувалась для будь-якого $m \in \mathbb{Z}_0$, тобто щоб $r_k = v_k = \frac{r_0}{2^k}$ для будь–якого $k \in N$. Справді, умова $r_k = v_k$ рівносильна $v_k = r_{k-1} - v_k$, тобто $v_k = \frac{r_{k-1}}{2}$, а це рівносильно $v_k = \frac{r_0}{2^k}$, де $r_0 = v_1 + v_2 + ... + v_k + ...$. □

Лема 3. *Якщо $\lambda_n = 1$ для всіх $n \geq m$, то функція f кусково стала, а саме є константою на кожному Q_2-циліндрі рангу m.*

Доведення. Справді, нехай $x \in \Delta^{Q_2}_{c_1...c_m} \setminus \{\Delta^{Q_2}_{c_1...c_m(1)}\}$, тоді $x = \Delta^{Q_2}_{c_1...c_m\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}...}$ і

$$f(x) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{c_i} \cdot \prod_{i=1}^{\infty} \lambda_{m+i}^{\alpha_{m+i}} = P_m \cdot 1.$$ □

3 Модуль неперервності та циліндричні властивості функції

Означення 1. *Q_2-модулем рангу k неперервності функції f називається число*

$$\mu(f;k) = \sup\{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in \Delta^{Q_2}_{c_1...c_k}, (c_1, ..., c_k) \in A^k\}.$$

Означення 2. *Функція f називається неперервною за Гаусдорфом, якщо виконується умова*

$$\lim_{k\to\infty} \mu(f,k) = 0.$$

Лема 4. *Мають місце співвідношення:*

$$A_m \equiv \inf_{x\in\Delta^{Q_2}_{c_1...c_m}} f(x) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{c_i} \cdot \prod_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k^{\beta_k},\ \text{де}\ \beta_k = \begin{cases} 0, & \text{якщо}\ \lambda_k \geq 1, \\ 1, & \text{якщо}\ \lambda_k < 1; \end{cases}$$

$$B_m \equiv \sup_{x\in\Delta^{Q_2}_{c_1...c_m}} f(x) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{c_i} \cdot \prod_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k^{\gamma_k},\ \text{де}\ \gamma_k = \begin{cases} 0, & \text{якщо}\ \lambda_k < 1, \\ 1, & \text{якщо}\ \lambda_k \geq 1; \end{cases}$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{A_m}{B_m} = 1,\ \text{тобто}\ \lim_{m\to\infty} (A_m - B_m) = 0.$$

Доведення. Перші дві рівності очевидні. Розглянемо відношення $\frac{A_m}{B_m} = \prod\limits_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k^{\beta_k - \gamma_k}$. Оскільки $\beta_k - \gamma_k \in \{-1, 0, 1\}$, $\lambda_k \to 1$ $(k \to \infty)$ і нескінченний добуток є абсолютно збіжним, то $\frac{A_m}{B_m} \to \infty$, коли $m \to \infty$. □

Наслідок 3. *Функція f неперервна за Гаусдорфом.*

Клас всіх функцій, означених рівністю (1), позначатимемо через S, а клас неперервних функцій через S_c.

4 Інтегральні властивості

Оскільки функція f має не більш ніж зліченну множину точок розриву, то вона є інтегровною за Лебегом.

Лема 5. *Для функції f, означенної рівністю(1), виконується*

$$\int_0^1 f(x)dx = \prod_{k=1}^{\infty}(q_0 + \lambda_k q_1). \tag{5}$$

Доведення. Оскільки $f(\Delta^{Q_2}_{1\alpha_2\alpha_3\ldots}) = \lambda_1 f(\Delta^{Q_2}_{0\alpha_2\alpha_3\ldots})$, то

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{\Delta_0^{Q_2}} f(x)dx + \int_{\Delta_1^{Q_2}} f(x)dx = \int_{\Delta_0^{Q_2}} f(x)dx + \lambda_1 \int_{\Delta_0^{Q_2}} f(t)d(q_0 + \frac{q_1}{q_0}t) =$$
$$= \int_{\Delta_0^{Q_2}} f(x)dx + \lambda_1 \frac{q_1}{q_0} \int_{\Delta_0^{Q_2}} f(t)dt = (1 + \frac{\lambda_1 q_1}{q_0}) \int_{\Delta_0^{Q_2}} f(x)dx.$$

Аналогічно міркуючи, за k кроків отримаємо

$$\int_0^1 f(x)dx = \prod_{i=1}^{k}(1 + \frac{\lambda_i q_1}{q_0}) \cdot \int_0^{q_0^k} f(x)dx.$$

Оскільки $f(x) \to 1$, коли $x \to 0$, то $\int_0^{q_0^k} f(x)dx = q_0^k(1 + \xi_k)$, де (ξ_k) – нескінченно мала послідовність. Тоді

$$\int_0^1 f(x)dx = \prod_{i=1}^{k}(q_0 + \lambda_i q_1)(1 + \xi_k).$$

Спрямувавши k до нескінченності, отримуємо рівність (5). □

Аналогічними міркуваннями можна довести наступне твердження.

Лема 6. *Якщо f і g — функції класу S, яким відповідають послідовності (λ_k), (μ_k), то*

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \prod_{k=1}^{\infty}(q_0 + \lambda_k \mu_k q_1). \tag{6}$$

При $q_0 = \frac{1}{2}$ маємо $\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1+\lambda_k\mu_k}{2}$

Зауваження 1. *Інтегральні властивості функції $f(x) = e^{\varphi(x)}$, означеної рівністю (2), в значній мірі залежать від інтегральних властивостей її внутрішньої функції $\varphi(x)$, для неперервних функцій f вони визначаються самоафінними властивостями графіка функції φ (про це йдеться нижче).*

5 Неперервні функції класу S

Означення 3. *Функцію f назвемо квазіпоказниковою, якщо вона має таку структуру: $f(x) = a^{g(x)}$, де $g(x)$ — неперервна строго монотонна функція, причому зростаюча при $a > 1$ і спадна при $0 < a < 1$.*

Теорема 4. *Неперервні на $[0;1]$ функції класу S вичерпуються квазіпоказниковими. Більше того, якщо $f \in S_c$, то $f(x) = a^{g(x)}$, де $g(x)$ при $q_0 \neq \frac{1}{2}$ є сингулярно неперервною строго зростаючою функцією розподілу випадкової величини, цифри Q_2-зображення якої є незалежними, однаково розподіленими і рівноймовірними, а при $q_0 = \frac{1}{2}$ функція $g(x) = x$.*

Доведення. Згідно з теоремою 3, якщо $f \in S_c$, то
$f(x) = e^{b\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k(x)}{2^k}} = a^{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k(x)}{2^k}} = a^{g(x)}$, де $a = e^b$, а $\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \xrightarrow{g} \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$.

Як відомо [13], функція $g(x)$ є функцією розподілу випадкової величини $\xi = \Delta^{Q_2}_{\xi_1\ldots\xi_n\ldots}$, цифри (ξ_n) Q_2-зображення якої є незалежними випадковими величинами з розподілами

$$P\{\xi_n = 0\} = \frac{1}{2} = P\{\xi_n = 1\}.$$

Відомо [13], що вона є строго зростаючою і при $q_0 \neq \frac{1}{2}$ сингулярною (неперервною функцією, похідна якої рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега).

Зауважимо, що коли $f \in S_c$ і $b > 0$, то функція g є оберненою до сингулярної функції Салема [9] (див. також [2, 6]), яка є функцією розподілу випадкової величини, цифри двійкового зображення якої є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, що набувають значень 0 і 1 з ймовірностями q_0 і q_1 відповідно. □

Лема 7. *Графік Γ_g складової $g(x) = \frac{1}{2}\alpha_1(x) + \ldots + \frac{1}{2^k}\alpha_k(x) + \ldots$ неперервної функції $f(x) = a^{g(x)}$ є самоафінною множиною зі структурою:*

$$\Gamma_g = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \quad \text{де } \Gamma_i = \gamma_i(\Gamma_g),\ \gamma_i : \begin{cases} x' = \Delta^{Q_2}_{i\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots} = iq_{1-i} + q_i x, \\ y' = \Delta^2_{i\alpha_1(y)\alpha_2(y)\ldots} = \frac{i}{2} + \frac{1}{2}y; \end{cases} \quad i = 0, 1.$$

Доведення. Спочатку покажемо, що $\Gamma_i \subset \Gamma_g$. Нехай $M(x;y) \in \Gamma_g$, тобто
$M : \begin{cases} x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \\ y = g(x) = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \ldots; \end{cases}$ і $\gamma_i(M) = M'(x';y') : \begin{cases} x' = \Delta^{Q_2}_{i\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}, \\ y' = \Delta^2_{i\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}. \end{cases}$
Очевидно, що $y' = g(x')$. Отже, $\Gamma_i \subset \Gamma_g$.

Тепер покажемо, що $\Gamma_g \subset \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Нехай $M(x;y) \in \Gamma_g$, тобто $x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, $y = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$. Тоді або $\alpha_1 = 0$, або $\alpha_1 = 1$. Нехай $\alpha_1 = i$, тобто $x = \Delta^{Q_2}_{i\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$, $y = \Delta^2_{i\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$. Очевидно, що $\gamma_i(M_0(x_0;y_0)) = M(x;y) \in \Gamma_i$, де $x_0 = \Delta^{Q_2}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$, $y_0 = \Delta^2_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$. Таким чином, $\Gamma_g = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. □

Наслідок 4. *Має місце рівність*

$$\int\limits_0^1 g(x)dx = q_1 = 1 - q_0.$$

6 Варіаційні властивості

Лема 8. *Якщо для послідовності* (λ_n) *нескінченну кількість разів виконуються нерівності* $\lambda_n > 1$, $\lambda_k < 1$, $n, k \in \mathbb{N}$, *то функція* $f(x)$ *ніде не монотонна.*

Доведення. З умови теореми випливає, що існує послідовність натуральних чисел (n_k) така, що $\lambda_{n_k} > 1$, а $\lambda_{n_k+1} < 1$. Очевидно, що для доведення ніде не монотонності функції досить показати, що вона не є монотонною на жодному з Q_2-циліндрів.

Розглянемо довільний циліндр $\Delta^{Q_2}_{c_1\dots c_m}$ і йому належний циліндр $\Delta^{Q_2}_{c_1\dots c_m\dots c_{n_k}}$. Точки $x_1 = \Delta^{Q_2}_{c_1\dots c_{n_k}1(0)}$, $x_2 = \Delta^{Q_2}_{c_1\dots c_{n_k}11(0)}$, $x_3 = \Delta^{Q_2}_{c_1\dots c_{n_k}111(0)}$ належать останньому, причому $x_1 < x_2 < x_3$. Згідно з вище вказаною властивістю функції маємо $f(x_2) = \lambda_{n_k+2}f(x_1)$, $f(x_3) = \lambda_{n_k+3}f(x_2)$. Оскільки

$$[f(x_2) - f(x_1)][f(x_3) - f(x_2)] = f(x_1)f(x_2)[\lambda_{n+2} - 1][\lambda_{n+3} - 1] < 0,$$

то функція f на циліндрі $\Delta^{Q_2}_{c_1\dots c_m\dots c_{n_k}}$, а отже, і на циліндрі $\Delta^{Q_2}_{c_1\dots c_m}$, не є монотонною. Оскільки для будь-якого $(a; b) \subset [0; 1]$ легко вказати циліндр, який повністю належить інтервалу $(a; b)$, то з довільності вибору розглянутого циліндра випливає висновок: функція f ніде не монотонна. $\square$

Зауважимо, що умови даного твердження виконуються, якщо $v_n = \frac{(-1)^{k-1}}{2^k}$, але в цьому випадку функція не є неперервною.

Теорема 5. *Якщо нерівність* $v_n < r_n$ *виконується для нескінченної кількість значень* n, *то функція* f *є ніде не монотонною.*

Доведення. Очевидно, що коли $v_n < r_n$, то існує таке натуральне $s = s(n)$, що виконується нерівність $v_n < v_{n+1} + v_{n_2} + \dots + v_{n+s}$.

Для обґрунтування висновку теореми досить довести, що функція f не є монотонною на жодному з Q_2-циліндрів. Нехай $\Delta^{Q_2}_{c_1\dots c_m}$ — довільний Q_2-циліндр. Розглянемо точки: $x_1 = \Delta^{Q_2}_{c_1\dots c_m\underbrace{1\dots1}_{k}(0)}$, $x_2 = \Delta^{Q_2}_{c_1..c_m\underbrace{1\dots1}_{k-1}0\underbrace{1\dots1}_{l}(0)}$, $x_3 = \Delta^{Q_2}_{c_1..c_m\underbrace{1\dots1}_{k-1}0\underbrace{1\dots1}_{p}(0)}$, де $v_{m+k} < r_{m+k}$, $l < p$, $v_{m+k} < v_{m+k+1} + v_{m+k+2} + \dots + v_{m+k+p}$.

Очевидно, що $x_2 < x_3 < x_1$, разом з цим,
$\varphi(x_3) - \varphi(x_1) = (v_{m+k+1} + v_{m+k+2} + \dots + v_{m+k+p}) - v_{m+k} > 0$,
$\varphi(x_3) - \varphi(x_2) = (v_{m+l+1} + v_{m+l+2} + \dots + v_{m+k+p}) > 0$.

Тоді функція $\varphi(x)$ — не є монотонна на $\Delta^{Q_2}_{c_1\dots c_m}$. А отже, такою є і $f(x) = e^{\varphi(x)}$. Враховуючи початкове зауваження, робимо висновок, що функція $f(x)$ ніде не монотонна. $\square$

7 Узагальнення конструкції

Перехід від класичного двійкового зображення до Q_2-зображення збагатив сім'ю сингулярно неперервними функціями і функціями з різноплановими фрактальними властивостями. Якщо замість Q_2-зображення аргумента використовувати його узагальнення — Q_2^*-зображення, то клас функцій S суттєво розширюється, збагачуючись не лише кількістю об'єктів, а й функціями з принципово новими властивостями. При цьому частина наведених фактів залишиться правильними.

Список літератури

[1] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // Ergod.Th. & Dynam. Sys., 2004, 24, 1–16.

[2] *Chatterji S.D.* Certain induced measures on the unit interval // Journal London Math. Soc., 1963, **38**, 325–331.

[3] *Kakeya S.* On the partial sums of an infinite series // Tohoku Sci Rep., 1914. 3, №4, 159–164.

[4] *Guthrie J.A., Nymann J.E.* The topological structure of the set of subsums pf an infinite series// Collog. Math., 1988, 55, №2, 323–327.

[5] *Markitan V. P., Pratsiovytyi M. V., Savchenko I. O.* Superfractality of the set of incomplete sums of one positive series // Ukr. Mat. Zh., 2018, 70, № 10, 1403–1416.

[6] *Marsaglia G.* Random variables with independent binary digits // Ann. Math. Statist., 1971, 42, № 2, 1922-1929.

[7] *Nymann J.E., Saenz R.A.* On the paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series // The topological structure of the set of subsums pf an infinite series// Collog. Math., 1995, 68, 259–264.

[8] *Pratsiovytyi M., Makarchuk O., Karvatsky D.* Lebesgue structure of asymmetric Bernoulli convolution based on Jacobsthal–Lucas sequence, Random operators and stochastic equations// Random Oper. Stoch. Equ., 2020, 28(2), 123–130.

[9] *Salem R.* On some singular monotonic functions which are strigly increasing // Trans. Amer. Math. Soc., 1943, 53, 423-439.

[10] *Vynnyshyn Ya., Markitan V., Pratsiovytyi M., Savchenko I.* Positive series whose sets of incomplete sums are Cantorvals// Proceedings of the International Geometry Center, 2019, 12(2), 26–42. (in Ukrainian)

[11] *Sendov Bl. Kh.* Binary self-similar fractal functions// Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, 1999, vol. 5, № 2, 589–595. (in Russian)

[12] *Pratsiovytyi M.V.* Geometry of the classic binary representation of real numbers. — Kyiv: Nats. Pedagog. Mykhailo Dragomanov Univ., 2012. (in Ukrainian)

[13] *Pratsiovytyi M.V.* Fractal approach to the study of singular distributions — Kyiv: Nats. Pedagog. Mykhailo Dragomanov Univ., 1998. (in Ukrainian)

[14] *Pratsiovytyi M.V.* Random variables with independent Q_2-symbols// Asymptotic Methods in the Study of Stochastic Models, Inst. Math. Nation. Acad. Sci. Ukraine, Kyiv, 1987, 92–102. (in Russian)

[15] *Pratsiovytyi M.V., Ratushniak S.P.* Independent digits of Q_2-representation of random variable with a given distribution // Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2019, vol. 16, № 3, 79–91. (in Ukrainian)

[16] *Pratsiovytyi M.V., Ratushniak S.P.* Continuous nowhere monotone nondifferentiable function with fractal properties defined in terms Q_2-representation // Nonlinear oscillations, 2020, Vol. 23, № 2, 231–252. (in Ukrainian)

Надійшло 12.08.2021

Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Dmytrenko S.O., Lysenko I.M., Ratushniak S.P. *About one class of functions with fractal properties*, Bukovinian Math. Journal. **6**, 1 (2021), 273–283.

We consider one generalization of functions, which are called as «binary self-similar functions» by Bl. Sendov. In this paper, we analyze the connections of the object of study with well known classes of fractal functions, with the geometry of numerical series, with distributions of random variables with independent random digits of the two-symbol Q_2-representation, with theory of fractals. Structural, variational, integral, differential and fractal properties are studied for the functions of this class.