Філіпчук М.П.

ПРО ОДНУ ДВОТОЧКОВУ КРАЙОВУ ЗАДАЧУ ДЛЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ БАГАТЬМА ПЕРЕТВОРЕНИМИ АРГУМЕНТАМИ

Розглядається крайова задача для системи диференціальних рівнянь із скінченною кількістю перетворених аргументів у випадку лінійних двоточкових крайових умов.

Для дослідження питання існування та наближеної побудови розв'язку цієї задачі використано модифікацію чисельно-аналітичного методу А.М. Самойленка, у якій відсутнє визначальне рівняння, тобто метод має лише аналітичну складову.

Отримано достатні умови існування єдиного розв'язку розглядуваної крайової задачі та оцінку похибки побудованих послідовних наближень.

На конкретних прикладах проілюстровано використання розробленої модифікації методу.

Ключові слова і фрази: чисельно-аналітичний метод, крайова задача, перетворений аргумент, система диференціальних рівнянь.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine
e-mail: *m.filipchuk@chnu.edu.ua*

Вступ

Доволі ефективним методом дослідження різноманітних крайових задач для систем диференціальних рівнянь є добре відомий чисельно-аналітичний метод А.М. Самойленка [1, 2, 3].

У праці [4] за допомогою стандартної схеми цього методу досліджено питання існування та наближеної побудови розв'язку двоточкової крайової задачі для системи диференціальних рівнянь із скінченною кількістю перетворених аргументів вигляду

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), \dots, x(\lambda_k(t))), \tag{1}$$

$$Ax(0) + Bx(T) = d, \tag{2}$$

де $t \in [0, T]$, $T = const > 0$; $x, f \in \mathbb{R}^n$; $\lambda_i : [0, T] \to [0, T]$ $(i = \overline{1, k})$ – довільні неперервні відображення, A і B – сталі $n \times n$ матриці, d – сталий n-вимірний вектор.

УДК 517.929.7
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34K10.

При цьому припускалося, що для деяких фіксованих дійсних чисел $k_1 \neq k_2$ виконується співвідношення

$$\det(k_1 A + k_2 B) \neq 0. \tag{3}$$

Нескладно переконатися, що якщо умова (3) виконуватиметься при $k_1 = k_2$, тобто

$$\det(A + B) \neq 0, \tag{4}$$

то використати схему з [4] в цьому випадку не вдасться, оскільки побудовані в ній послідовні наближення $x_m(t, x_0)$ і визначальні функції $\Delta_m(x_0)$ уже не залежатимуть від шуканого параметра x_0, внаслідок чого буде неможливо задовольняти відповідні визначальні рівняння методу.

Виявляється, для крайової задачі (1), (2), (4) можна запропонувати модифіковану схему чисельно-аналітичного методу, де взагалі не виникатиме визначальне рівняння, тобто метод матиме лише аналітичну складову.

1 Основний результат: модифікована схема методу

Як і раніше [4], функцію $f(t, x, y_1, \dots, y_k)$ вважатимемо визначеною та неперервною в області

$$(t, x, y_1, \dots, y_k) \in [0, T] \times D^{k+1},$$

де D – замкнена обмежена область в $\mathbb{R}^n$, обмеженою вектором $M \in \mathbb{R}^n$, $M_i > 0$ $(i = \overline{1, n})$, і задовольняючою умову Ліпшіца по $x, y_1, \dots, y_k$ з матрицею $K = \{k_{ij} \geq 0;\ i, j = \overline{1, n}\}$:

$$|f(t, x, y_1, \dots, y_k)| \leq M, \tag{5}$$

$$|f(t, \overline{x}, \overline{y_1}, \dots, \overline{y_k}) - f(t, \overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y_1}}, \dots, \overline{\overline{y_k}})| \leq K \left(|\overline{x} - \overline{\overline{x}}| + \sum_{i=1}^{k} |\overline{y_i} - \overline{\overline{y_i}}| \right). \tag{6}$$

Тут

$$|f(t, x, y_1, \dots, y_k)| = (|f_1(t, x, y_1, \dots, y_k)|, \dots, |f_n(t, x, y_1, \dots, y_k)|)$$

і нерівність між векторами розуміється покомпонентно.

Достатні умови розв'язності крайової задачі (1), (2), (4) дає наступне твердження.

Теорема. *Нехай виконуються умови:*

1) вектор $w_0 = S^{-1}d$ лежить в області D разом зі своїм $\beta = TCM$-околом, де

$$S = A + B, \quad C = \max\{|S^{-1}A|, |S^{-1}B|\}$$

($\max$ береться покомпонентно);

2) найбільше власне значення матриці $Q = (k+1)TCK$ не перевищує одиниці:

$$\lambda_{max}(Q) < 1.$$

Тоді крайова задача (1), (2), (4) має в області D єдиний розв'язок $x^*(t)$, який є рівномірною границею послідовних наближень

$$x_0(t) = w_0,$$

$$x_m(t) = w_0 + S^{-1}A\int\limits_0^t f(s, x_{m-1}(s), x_{m-1}(\lambda_1(s)), \ldots, x_{m-1}(\lambda_k(s)))ds-$$

$$-S^{-1}B\int\limits_t^T f(s, x_{m-1}(s), x_{m-1}(\lambda_1(s)), \ldots, x_{m-1}(\lambda_k(s)))ds, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

причому

$$|x^*(t) - x_m(t)| \leq Q^m(E - Q)^{-1}\beta \tag{8}$$

для всіх $m = 1, 2, \ldots$ *і* $t \in [0, T]$.

Доведення. Покажемо, що в просторі неперервних вектор-функцій послідовність (7) є фундаментальною, а отже, і рівномірно збіжною.

Встановимо спочатку, що всі функції $x_m(t)$ містяться в області D. На підставі (7), враховуючи (5), маємо:

$$|x_1(t) - w_0| \leq |S^{-1}A|Mt + |S^{-1}B|M(T - t) \leq TCM = \beta. \tag{9}$$

Тому, з врахуванням умови 1), $x_1(t) \in D$. Індукцією нескладно показати, що для всіх $m = 1, 2, \ldots$ і $t \in [0, T]$ функції $x_m(t)$ вигляду (7) не виходять за межі області D.

Покладаючи $r_{m+1}(t) = |x_{m+1}(t) - x_m(t)|$, на підставі (7) із врахуванням (6) маємо:

$$r_{m+1}(t) \leq |S^{-1}A|K\int\limits_0^t \omega_m(s)ds + |S^{-1}B|K\int\limits_t^T \omega_m(s)ds. \tag{10}$$

де $\omega_m(s) = r_m(s) + \sum\limits_{i=1}^{k} r_m(\lambda_i(s))$.

Згідно з (9),

$$r_1(t) = |x_1(t) - w_0| \leq \beta,$$

тому з (10) при $m = 1$ знаходимо:

$$r_2(t) \leq (k+1)|S^{-1}A|K\beta t + (k+1)|S^{-1}B|K\beta(T - t) =$$

$$= (k+1)\left[|S^{-1}A|t + |S^{-1}B|(T - t)\right]K\beta \leq (k+1)TCK\beta = Q\beta.$$

Індукцією можна довести, що для всіх $t \in [0, T]$

$$r_{m+1}(t) \leq Q^m\beta, \quad m = 0, 1, \ldots.$$

Тому для $j \geq 1$ маємо нерівність:

$$|x_{m+j}(t) - x_m(t)| \leq \sum_{i=1}^{j} r_{m+i}(t) \leq \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i}\right)\beta = Q^m\left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^i\right)\beta. \tag{11}$$

Умова 2) гарантує виконання співвідношень

$$\lim_{m\to\infty} Q^m = 0, \quad \sum_{i=0}^{j-1} Q^i \leq (E - Q)^{-1}. \tag{12}$$

Тоді з (11) та (12) на підставі критерію Коші випливає, що послідовність $x_m(t)$ вигляду (7) рівномірно збігається при $m \to \infty$ для всіх $t \in [0, T]$ і

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t) = x^*(t). \tag{13}$$

Оскільки, в чому нескладно переконатися безпосередньою перевіркою, всі послідовні наближення $x_m(t)$ задовольняють крайові умови (2), то і гранична функція $x^*(t)$ також їх задовольняє.

При $j \to \infty$ із (11), враховуючи (13) та (12), для всіх $m = 1, 2, \ldots$ і $t \in [0, T]$ отримуємо оцінку (8).

Крім цього, переходячи з врахуванням (13) у (7) до границі при $m \to \infty$, бачимо, що функція $x^*(t)$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = w_0 + S^{-1}A \int_0^t f(s, x(s), x(\lambda_1(s)), \ldots, x(\lambda_k(s)))ds-$$

$$-S^{-1}B \int_t^T f(s, x(s), x(\lambda_1(s)), \ldots, x(\lambda_k(s)))ds.$$

Отже, гранична функція $x^*(t)$ справді є розв'язком крайової задачі (1), (2), (4). Доведемо тепер єдиність цього розв'язку.

Нехай $y(t)$ – довільний розв'язок крайової задачі (1), (2), (4). Тоді, як нескладно перевірити, він є розв'язком інтегрального рівняння

$$y(t) = w_0 + S^{-1}A \int_0^t f(s, y(s), y(\lambda_1(s)), \ldots, y(\lambda_k(s)))ds-$$

$$-S^{-1}B \int_t^T f(s, y(s), y(\lambda_1(s)), \ldots, y(\lambda_k(s)))ds.$$

Аналогічно, як і вище, нескладно встановити, що для всіх $t \in [0, T]$

$$|y(t) - x_0(t)| = |y(t) - w_0| \le TCM = \beta,$$

$$|y(t) - x_1(t)| \le (k+1)TCK\beta = Q\beta,$$

і, за індукцією,

$$|y(t) - x_m(t)| \le Q^m\beta, \quad m = 0, 1, \ldots.$$

Таким чином, $x_m(t) \to y(t)$ при $m \to \infty$ рівномірно на $[0, T]$. З єдиності границі послідовності випливає, що $y(t) = x^*(t)$ для всіх $t \in [0, T]$. Єдиність розв'язку $x^*(t)$ доведено. Теорему доведено. □

Зауваження. *При $k = 1$ (у випадку наявності в системі лише одного перетвореного аргументу) отримані результати співпадають з результатами, наведеними в [5], а при $k = 0$ (у випадку відсутності в системі перетворених аргументів) – з результатами, наведеними в [6].*

2 Приклади використання модифікованої схеми методу

Проілюструємо використання розробленої модифікованої схеми чисельно-аналітичного методу на конкретних прикладах. Для простоти обмежимося розглядом скалярних випадків.

Приклад 1. *Розглянемо крайову задачу*

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{3}x(t) - \frac{1}{3}x(\frac{t}{2}) - \frac{1}{2}x(\frac{t}{3}) + 6,$$

$$x(0) + x(1) = 6,$$

де $t \in [0,1]$, $D = [-3, 9]$.

Легко бачити, що в цьому випадку

$$k = 2,\ T = 1,\ A = 1,\ B = 1,\ d = 6,$$

$$A + B = 2 \neq 0,\ M = \frac{23}{2},\ K = \frac{1}{2},$$

$$S = 2,\ S^{-1} = \frac{1}{2},\ C = \frac{1}{2},$$

$$w_0 = 3,\ \beta = \frac{23}{4},\ Q = \frac{3}{4},$$

а тому виконуються всі умови теореми.

Послідовні наближення, знайдені згідно з (7), мають вигляд:

$$x_0(t) = 3,$$

$$x_1(t) = \frac{9}{2}\,t + \frac{3}{4} = 4.5\,t + 0.75,$$

$$x_2(t) = \frac{45}{8}\,t + \frac{3}{16} = 5.625\,t + 0.1875,$$

$$x_3(t) = \frac{189}{32}\,t + \frac{3}{64} = 5.90625\,t + 0.046875,$$

$$x_4(t) = \frac{765}{128}\,t + \frac{3}{256} = 5.9765625\,t + 0.01171875,$$

$$x_5(t) = \frac{3069}{512}\,t + \frac{3}{1024} = 5.994140625\,t + 0.0029296875,$$

$$x_6(t) = \frac{12285}{2048}\,t + \frac{3}{4096} = 5.99853515625\,t + 0.000732421875,$$

$$\ldots$$

$$x_m(t) = \frac{3\,(4^m - 1)}{(4^m)\,/\,2}\,t + \frac{3}{4^m} = 6\,t\left(1 - \frac{1}{4^m}\right) + \frac{3}{4^m},$$

$$\ldots.$$

Дана послідовність рівномірно збігається в області D до граничної функції $x^*(t) = 6\,t$, яка і є точним розв'язком розглядуваної крайової задачі.

Приклад 2. *Розглянемо крайову задачу*

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{3}x(t) - \frac{1}{3}x(t^2) + \frac{1}{3}x(t^3) - 1,$$

$$x(0) + x(1) = 6,$$

де $t \in [0,1]$, $D = [0,6]$.

Легко бачити, що в цьому випадку

$$k = 2,\ T = 1,\ A = 1,\ B = 1,\ d = 6,$$

$$A + B = 2 \neq 0,\ M = 3,\ K = \frac{1}{3},$$

$$S = 2,\ S^{-1} = \frac{1}{2},\ C = \frac{1}{2},$$

$$w_0 = 3,\ \beta = \frac{3}{2},\ Q = \frac{1}{2},$$

а тому виконуються всі умови теореми.

Послідовні наближення, знайдені згідно з (7), мають вигляд:

$$x_0(t) = 3,$$

$$x_m(t) = 3,\ m = 1, 2, \ldots.$$

Дана послідовність рівномірно збігається в області D до граничної функції $x^*(t) = 3$, яка і є точним розв'язком розглядуваної крайової задачі.

Список літератури

[1] Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Наукова думка, Киев, 1985.

[2] Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Наукова думка, Киев, 1992.

[3] Samoilenko A.M., Ronto M. Numerical-Analytic Methods in the Theory of Boundary-Value Problems. World Scientific, River Edge, NJ, 2000. https://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/3962

[4] Філіпчук М.П. *Двоточкова крайова задача для системи з багатьма перетвореними аргументами.* Буковин. мат. журн. 2017, **5** (1-2), 139–143. http://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/243

[5] Філіпчук М.П. Метод усереднення в крайових задачах для диференціальних рівнянь з відхиленим аргументом. Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. Чернівці, 1999.

[6] Трофимчук Е.П., Коваленко А.В. *Численно-аналитический метод А.М. Самойленко без определяющего уравнения.* Укр. мат. журн. 1995, **47** (1), 138–140. http://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/5396

Список літератури

[1] Samoilenko A.M., Ronto N.I. Numerical-Analytic Methods for the Investigation of Solutions of Boundary-Value Problems. Naukova Dumka, Kiev, 1985. (in Russian)

[2] Samoilenko A.M., Ronto N.I. Numerical-Analytic Methods in the Theory of Boundary-Value Problems for Ordinary Differential Equations. Naukova Dumka, Kiev, 1992. (in Russian)

[3] Samoilenko A.M., Ronto M. Numerical-Analytic Methods in the Theory of Boundary-Value Problems. World Scientific, River Edge, NJ, 2000. doi:10.1142/3962

[4] Filipchuk M.P. *Two-point boundary value problem for a system with many transformed arguments.* Bukovinian Math. J. 2017, **5** (1-2), 139–143. http://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/243 (in Ukrainian)

[5] Filipchuk M.P. Averaging Method in Boundary-Value Problems for Differential Equations with Deviated Argument. Candidate-Degree Thesis. Chernivtsi, 1999. (in Ukrainian)

[6] Trofimchuk E.P., Kovalenko A.V. *A.M. Samoilenko's numerical-analytic method without determining equation.* Ukr. Math. J. 1995, **47** (1), 163–166. doi:10.1007/BF01058810 (translation of Ukr. Mat. Zh. 1995, **47** (1), 138–140. http://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/5396 (in Russian))

Надійшло 04.01.2021

Filipchuk M.P. *On a two-point boundary value problem for a system of differential equations with many transformed arguments*, Bukovinian Math. Journal. **9**, 1 (2021), 284–290.

A.M. Samoilenko's numerical-analytic method is a well-known and effective research method of solvability and approximate construction of the solutions of various boundary value problems for systems of differential equations.

The investigation of boundary value problems for new classes of systems of functional-differential equations by this method is still an actual problem.

A boundary value problem for a system of differential equations with finite quantity of transformed arguments in the case of linear two-point boundary conditions is considered at this paper.

In order to study the questions of the existence and approximate construction of a solution of this problem, we used a modification of A.M. Samoilenko's numerical-analytic method without determining equation, i.e. the method has an analytical component only.

Sufficient conditions for the existence of a unique solution of the considered boundary value problem and an error estimation of the constructed successive approximations are obtained.

The use of the developed modification of the method is illustrated by concrete examples.