Bukovinian Math. Journal. 2021, **9**, 1, 210–229 Буковинський матем. журнал 2021, Т.9, №1, 210–229

Кушнір А. С., Маслюченко О. В.

ПАРИ ГАНА І НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ З ДАНИМИ ЕКСТРЕМАЛЬНИМИ РОЗШАРУВАННЯМИ

В даній роботі продовжуються дослідження зв'язків між парами Гана і нарізно неперервними функціями, що були розпочаті В. К. Маслюченком. Пара функцій (g, h), що визначені на топологічному просторі називається парою Гана, якщо $g \le h$, g напівнеперервна зверху і h напівнеперервна знизу. Кажуть, що пара Гана (g, h) породжена деякою функцією f, що залежить від двох змінних, якщо інфімум відносно другої змінної від функції f рівний g, а супремум – h. Встановлено, що для довільного досконало нормального простору X і непсевдокомпактного простору Y кожна пара Гана на X породжується деякою неперервною функцією на $X \times Y$. А також, для довільного досконало нормального простору X і простору Y, який має нерозріджену компактифікацію кожна пара Гана на X породжується деякою нарізно неперервною функцією на $X \times Y$.

Ключові слова і фрази: пара Гана, напівнеперервна функція, нарізно неперервна функція, мінімальне розшарування, максимальне розшарування.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Department of Mathematical Analysis, Kotsiubynskoho 2, 58012 Chernivtsi , Ukraine (Kushnir A. S.)
Institute of Mathematics, University of Silesia in Katowice, Bankowa 12, 40-007 Katowice, Poland and Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Department of Mathematical Analysis, Kotsiubynskoho 2, 58012 Chernivtsi , Ukraine (Maslyuchenko O. V.)
e-mail: *kushnir.anastasiia@chnu.edu.ua (Kushnir A. S.),*
ovmasl@gmail.com (Maslyuchenko O. V.)

Вступ

У 1917 році Ганс Ган встановив, що для довільного метричного простору X і двох дійсних функцій $g, h : X \to \mathbb{R}$ таких, що $g \le h$, g напівнеперервна зверху і h напівнеперервна знизу, існує неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$ з $g \le f \le h$. Пізніше було одержано ряд узагальнень цього результату на ширші класи просторів: Дьєдоне – на клас паракомпактних просторів, а Тонгом [1] і Катетовим [2] – на клас нормальних просторів. Насправді, теорема Тонга-Катетова стверджує навіть більше: а саме, що ця

УДК 515.12; 517.51
2010 *Mathematics Subject Classification:* 26A21, 26A15, 26B25, 46A55, 54H05, 54C20, 54C30.
This research was supported by the University of Silesia Mathematics Department (Iterative Functional Equations and Real Analysis program)

© Кушнір А. С., Маслюченко О. В., 2021

властивість є характеристичною для нормальності топологічного простору. В недавній роботі [3] було запропоновано такого сорту пари функцій називати парами Гана. Точніше, *парою Гана* на просторі X в [3] називається пара (g,h) функцій $g,h : X \to \mathbb{R}$ таких, що $g(x) \le h(x)$ на X, де g напівнеперервна зверху і h напівнеперервна знизу. Ми будемо розглядати також пари Гана зі значеннями в $\overline{\mathbb{R}}$. Зокрема, в роботі [3] було показано, що для довільного топологічного простору X, множини Y і неперервної відносно першої змінної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ дві функції $\wedge_f, \vee_f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, що діють за формулами

$$\wedge_f(x) = \inf_{y\in Y} f(x,y) \text{ та } \vee_f(x) = \sup_{y\in Y} f(x,y), \text{ для } x \in X$$

утворюють пару Гана на просторі X (що правда, там вони позначалися I_f та S_f відповідно). Ми будемо казати, що функція f *породжує пару Гана* (g,h), якщо $\wedge_f = g$ і $\vee_f = h$. Більше того, там було доведено, що для довільного досконало нормального простору X з нормальним квадратом і діагоналлю типу G_δ і для довільної пари Гана (g,h) на X такої, що g неперервна (чи, відповідно, h неперервна) існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ така, що $g(x) \le f(x,y) \le h(x)$ для $(x,y) \in X \times Y$ і $\vee_f = h$ (чи, відповідно $\wedge_f = g$). А також, у випадку, коли X та Y є відрізками в $\mathbb{R}$ показано існування такої функції, що $\wedge_f = g$ і $\vee_f = h$.

Тут ми узагальнюємо результати статті [3] на значно ширші класи просторів, але для пар Гана зліченного типу (тобто таких, що g і h є границями монотонних послідовностей неперервних функцій). Зауважимо, що за теоремою Тонга [1] (див. також [5, 1.7.15(c)]) кожна напівнеперервна функція на досконало нормальному просторі автоматично є парою Гана зліченного типу. Отже, для досконало нормальних просторів основні результати цієї статті можна сформулювати наступним чином.

Теорема (A)**.** *Нехай X – досконало нормальний простір, Y – непсевдокомпактний топологічний простір і (g,h) пара Гана на X. Тоді існує неперервна функція $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ така, що $\wedge_f = g$ і $\vee_f = h$.*

Теорема (B)**.** *Нехай X – досконало нормальний простір, Y – топологічний простір, який має нерозріджену компактифікацію і (g,h) пара Гана на X. Тоді існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ така, що $\wedge_f = g$ і $\vee_f = h$.*

1 Індекс досконалої нормальності та узагальнення теорем Тонга і Бурбакі

Нехай X – топологічний простір. Нагадаємо, що функція $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ називається *напівнеперервною зверху (знизу) в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного числа $\gamma > f(x_0)$ (чи, відповідно, $\gamma < f(x_0)$) існує окіл U точки x_0 такий, що $f(x) < \gamma$ (чи, відповідно, $f(x) > \gamma$) для довільного $x \in U$. Функцію f називатимемо *напівнеперервною зверху (знизу)*, якщо вона є такою в кожній точці $x \in X$. Позначатимемо $\mathbb{I} = [0;1]$. На відрізку $\mathbb{I}$ завжди розглядатимемо топологію, індуковану з $\mathbb{R}$. Як добре відомо, існує неперервний зростаючий гомеоморфізм $\ell : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{I}$. Його можна визначити, наприклад, за правилом

$\ell(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{|x|+1} + 1\right)$, $\ell(-\infty) = 0$, $\ell(+\infty) = 1$. Цей гомеоморфізм називатимемо *обмежувальним перетворенням.* Наступне твердження дозволяє зводити вивчення $\overline{\mathbb{R}}$-значних напівнеперервних функцій до вивчення $\mathbb{I}$-значних напівнеперервних функцій.

Твердження 1. *Нехай X – топологічний простір, $\ell : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{I}$ – обмежувальне перетворення. Функція $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ буде напівнеперервною зверху (знизу) тоді і тільки тоді, коли такою буде композиція $\ell \circ f : X \to \mathbb{I}$.*

Сукупність усіх замкнених підмножин X позначатимемо $\mathcal{C}_X$. Підмножина U топологічного простору X називається *функціонально відкритою*, якщо існує неперервна функція $u : X \to \mathbb{I}$ така, що $U = u^{-1}\big((0;1]\big)$. Символом $\mathcal{T}_X$ (відповідно $\mathcal{T}_X^0$) позначатимемо сукупність усіх (функціонально) відкритих підмножин X. Як відомо, T_1-простір X буде цілком регулярним тоді і тільки тоді, коли функціонально відкриті множини утворюють базу X. Для цілком регулярного простору X покладемо

$$pn(X) = \min\Big\{\mathfrak{m} \geq \aleph_0 : \forall\, G \in \mathcal{T}_X \ \exists \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_X^0 \ \Big|\ G = \bigcup \mathcal{U} \text{ і } |\mathcal{U}| \leq \mathfrak{m}\Big\}$$

Кардинальне число $pn(X)$ називатимемо *індексом досконалої нормальності* X. Зрозуміло, що для цілком регулярного простору X рівність $pn(X) = \aleph_0$ рівносильна досконалій нормальності X, адже $\mathcal{T}_X^0$ інваріантна відносно зліченних об'єднань. Зрозуміло, що для T_1-простору кожна множина може бути записана у вигляді перетину деякої системи відкритих множин. Тому для довільного T_1-простору X можна ввести наступну кардинальну характеристику [6]

$$\Psi(X) = \min\Big\{\mathfrak{m} \geq \aleph_0 : \forall\, F \in \mathcal{C}_X \ \exists \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_X \ \Big|\ F = \bigcap \mathcal{U} \text{ і } |\mathcal{U}| \leq \mathfrak{m}\Big\}$$

Ми називатимемо це кардинальне число *індексом досконалості* X, адже рівність $\Psi(X) = \aleph_0$ означає, що простір X є досконалим. Як звичайно, символами $hl(X)$ та $w(X)$ позначатимемо *спадкове число Ліндедефа* та *вагу* топологічного простору X. Тобто

$$hl(X) = \min\Big\{\mathfrak{m} \geq \aleph_0 : \forall \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_X \ \exists \mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}_X \ \Big|\ \bigcup \mathcal{U} = \bigcup \mathcal{V} \text{ і } |\mathcal{V}| \leq \mathfrak{m}\Big\},$$

$$w(X) = \min\Big\{\mathfrak{m} \geq \aleph_0 : \exists \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_X, |\mathcal{B}| \leq \mathfrak{m} \ \forall\, G \in \mathcal{T}_X \ \exists \mathcal{B}_G \subseteq \mathcal{B} \ \Big|\ G = \bigcup \mathcal{B}_G\Big\}.$$

Твердження 2. *Нехай X – цілком регулярний топологічний простір. Тоді $\Psi(X) \leq pn(X) \leq hl(X) \leq w(X)$. Більше того, якщо X нормальний, то $pn(X) = \Psi(X)$.*

Доведення. Нерівність $hl(X) \leq w(X)$ є добре відомою [5], а нерівність $pn(X) \leq hl(X)$ негайно випливає з означень. Покажемо, що $\Psi(X) \leq pn(X)$. Нехай $\mathfrak{p} = pn(X)$. Візьмемо замкнену множину F в X. Покладемо $G = X \setminus F$. З означення $pn(X)$ випливає, що існує сім'я $(U_s)_{s\in S}$ функціонально відкритих множин U_s в X така, що $|S| = \mathfrak{p}$ і $G = \bigcup\limits_{s\in s} U_s$. Виберемо такі неперервні функції $u_s : X \to \mathbb{I}$, що $U_s = u_s^{-1}\big((0;1]\big)$. Розглянемо відкриті множини $V_{s,n} = u_s^{-1}\big([0;\frac{1}{n})\big)$. Тоді

$$X \setminus \bigcap_{(s,n)\in S\times\mathbb{N}} V_{s,n} = \bigcup_{(s,n)\in S\times\mathbb{N}} X \setminus V_{s,n} = \bigcup_{s\in S} \bigcup_{n=1}^{\infty} u_s^{-1}\big([\tfrac{1}{n};1]\big) = \bigcup_{s\in S} u_s^{-1}\big((0;1]\big) = \bigcup_{s\in S} U_s = G.$$

А значить, $F = X \setminus G = \bigcap\limits_{(s,n)\in S\times\mathbb{N}} V_{s,n}$. Отже, врахувавши, що $|S \times \mathbb{N}| = \mathfrak{p} \cdot \aleph_0 = \mathfrak{p}$, одержимо, що $\Psi(X) \le \mathfrak{p}$.

Припустимо тепер, що X нормальний і доведемо рівність $\Psi(X) = pn(X)$. Нехай $\mathfrak{n} = \Psi(X)$. Досить показати, що $pn(X) \le \mathfrak{n}$. Розглянемо відкриту множину G в X. Нехай $F = X \setminus G$. З означення $\Psi(X)$ маємо, що існує така сім'я $(G_s)_{s\in S}$ відкритих множин, що $F = \bigcap\limits_{s\in S} G_s$ і $|S| = \mathfrak{n}$. З леми Урисона [5, 1.5.11] отримуємо, що для довільного $s \in S$ існує неперервна функція $u_s : X \to \mathbb{I}$ така, що $u_s(x) = 0$ при $x \in F$ і $u_s(x) = 1$ при $x \in X \setminus G_s$. Тоді множини $U_s = u_s^{-1}\big((0;1]\big)$ є функціонально відкритими. Врахувавши, що $X \setminus G_s \subseteq U_s \subseteq G$ матимемо, що

$$G = X \setminus F = X \setminus \bigcap_{s\in S} G_s = \bigcup_{s\in S} X \setminus G_s \subseteq \bigcup_{s\in S} U_s \subseteq G.$$

А тому $G = \bigcup\limits_{s\in S} U_s$. Отже, оскільки $|S| = \mathfrak{n}$, то $pn(X) \le \mathfrak{n}$. □

Теорема 1. *Нехай X – цілком регулярний простір і $\mathfrak{p} = pn(X)$. Тоді*

$(sc)_{\mathfrak{p}}$ *для довільної напівнеперервної знизу (зверху) функції $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ існує сім'я $(f_s)_{s\in S}$ неперервних функцій $f_s : X \to \overline{\mathbb{R}}$ таких, що $|S| = \mathfrak{p}$ і $f(x) = \sup\limits_{s\in S} f_s(x)$ (чи, відповідно, $f(x) = \inf\limits_{s\in S} f_s(x)$) для довільного $x \in X$.*

Більше того, якщо X – довільний топологічний простір і для певного $\mathfrak{m} \ge \aleph_0$ виконується $(sc)_{\mathfrak{m}}$, то X є цілком регулярним і $pn(X)$ є найменшим з таких кардинальних чисел $\mathfrak{m} \ge \aleph_0$, що задовольняють $(sc)_{\mathfrak{m}}$.

Доведення. Ми розглянемо тільки випадок напівнеперервних знизу функцій (другий випадок одержується заміною f на $-f$).

Перевіримо $(sc)_{\mathfrak{p}}$. Нехай T – деяка множина потужності $\mathfrak{p}$. Розглянемо деяку напівнеперервну знизу функцію f. За твердженням 1 можна вважати, що $f : X \to \mathbb{I}$. Покладемо $S = \mathbb{I} \cap \mathbb{Q}$. Візьмемо $s \in S$. Позначимо $G_s = f^{-1}\big((s;1]\big)$. Оскільки $|T| = pn(X)$, то існує сім'я $(U_{s,t})_{t\in T}$ функціонально відкритих множин $U_{s,t}$ така, що $G_s = \bigcup\limits_{t\in T} U_{s,t}$. Розглянемо неперервні функції $u_{s,t} : X \to \mathbb{I}$ такі, що $U_{s,t} = u_{s,t}^{-1}\big((0;1]\big)$. Покладемо $P = S \times T \times \mathbb{N}$. Для довільного $p = (s,t,n) \in P$ визначимо функцію $f_p : X \to [0;t]$ покладаючи

$$f_p(x) = \min\Big\{s,\ n \cdot u_{s,t}(x)\Big\}, \quad x \in X.$$

Зрозуміло, що $f_p(x) \le f(x)$, а значить, $\sup\limits_{p\in P} f_p(x) \le f(x)$ для довільного $x \in X$.

Доведемо зворотну нерівність. Зафіксуємо $x \in X$. Якщо $f(x) = 0$, то все зрозуміло. Нехай $f(x) > 0$. Візьмемо $\gamma < f(x)$. Виберемо $s \in S$ з $\gamma < s < f(x)$. Тоді $x \in G_s$. Отже, існує $t \in T$ таке, що $x \in U_{s,t}$. Тоді $u_{s,t}(x) > 0$. Значить, існує номер $n \in \mathbb{N}$ такий, що $n \cdot u_{s,t}(x) > s$. Тоді для $p = (s,t,n)$ матимемо, що $f_p(x) = s > \gamma$.

Таким чином, ми показали, що $\sup\limits_{p\in P} f_p(x) = f(x)$ для довільного $x \in X$. Врахувавши, що $|P| = |S| \cdot |T| \cdot |\mathbb{N}| = \aleph_0 \cdot \mathfrak{p} \cdot \aleph_0 = \mathfrak{p}$, одержуємо $(sc)_{\mathfrak{p}}$.

Припустимо тепер, що X – довільний топологічний простір. Позначимо

$$\mathfrak{n} = \min\big\{\mathfrak{m} \geq \aleph_0 : (sc)_{\mathfrak{m}}\big\}.$$

Оскільки властивість $(sc)_{\mathfrak{p}}$ виконується, то $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{p}$ Доведемо, що $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{n}$. Візьмемо відкриту множину G в X і розглянемо її характеристичну функцію $f = \mathbf{1}_G$. Тоді f є напівнеперервною знизу, а тому існує сім'я $(f_s)_{s\in S}$ неперервних функцій $f_s : X \to \overline{\mathbb{R}}$ таких, що $|S| \leq \mathfrak{m}$ і $f(x) = \sup\limits_{s\in S} f_s(x)$ для довільного $x \in X$. В такому разі, множини $U_s = f_s^{-1}\big((0;1]\big)$ будуть функціонально відкритими, причому $G = \bigcup\limits_{s\in S} U_s$. Отже, X – цілком регулярний і $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{p}$. □

Функцію f називатимемо *функціонально напівнеперервною зверху (знизу)*, якщо існує сім'я неперервних функцій $f_s : X \to \overline{\mathbb{R}}$ таких, що $f(x) = \inf\limits_{s\in S} f_s(x)$ (чи відповідно, $f(x) = \sup\limits_{s\in S} f_s(x)$) для довільного $x \in X$. Якщо, крім того, $|S| = \mathfrak{m}$ то казатимемо, що f є *$\mathfrak{m}$-функціонально напівнеперервною зверху (знизу)*. Якщо $\mathfrak{m} = \aleph_0$, то функцію f називатимемо *зліченно функціонально напівнеперервною зверху (знизу)*.

Зауважимо, що кожна функціонально напівнеперервна зверху (знизу) функція є напівнеперервною зверху (знизу). Для цілком регулярних просторів справедливо і обернене твердження, яке випливає з теореми 1

Наслідок 1 (Бурбакі [7])**.** *T_1-простір X буде цілком регулярним тоді і тільки тоді, коли кожна напівнеперервна зверху (знизу) функція $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ є функціонально напівнеперервною зверху (знизу) функцією.*

При $\mathfrak{p} = \aleph_0$ отримуємо наступний наслідок з теореми 1.

Наслідок 2 (Тонг [1], Катетов [2])**.** *T_1-простір X буде досконало нормальним тоді і тільки тоді, коли кожна напівнеперервна зверху (знизу) функція $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ є зліченно функціонально напівнеперервною зверху (знизу) функцією.*

Детальніше про історію цих результатів і короткі вказівки до їх доведення є також в [5, 1.17.15]

2 Напівнеперервні функції першого класу Бера

Нагадаємо, що функція $f : X \to Y$ називається *функцією першого класу Бера*, якщо існує послідовність неперервних функцій $f_n : X \to Y$ така, що $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ для кожного $x \in X$. Кажуть, що f є *функцією першого класу Лебеґа* (або інакше *F_σ-вимірною*), якщо для довільної відкритої в Y множини G прообраз $f^{-1}(G)$ є F_σ-множиною в X. Як відомо, для досконало нормального простору Y кожна функція першого класу Бера є функцією першого класу Лебеґа.

Теорема 2. *Нехай X – нормальний топологічний простір і $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Тоді наступні умови рівносильні:*

(*i*) *f зліченно функціонально напівнеперервна знизу;*

(*ii*) *існує зростаюча послідовність неперервних функцій $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ така, що $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для довільного $x \in X$;*

(*iii*) *для довільного $t \in \mathbb{R}$ множина $G_t = f^{-1}\big((t;+\infty]\big)$ є функціонально відкрита;*

(*iv*) *f є напівнеперервною знизу функцією першого класу Бера;*

(*v*) *для довільного $t \in \mathbb{R}$ множина $G_t = f^{-1}\big((t;+\infty]\big)$ є відкрита і типу F_σ.*

Більше того, для довільного топологічного простору X виконується, що

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v).$$

Доведення. Перш за все зауважимо, що за твердженням 1 можна вважати, що $f : X \to \mathbb{I}$. Розглянемо спочатку випадок, коли X – довільний топологічний простір.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Оскільки f є зліченно функціонально напівнеперервною знизу, то існує послідовність неперервних функцій $g_n : X \to \mathbb{I}$ така, що $f(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)$ для довільного $x \in X$. Розглянемо функції $f_n : X \to \mathbb{I}$, що визначені формулами $f_n(x) = \max\limits_{k\le n} g_k(x)$ для $x \in X$ та $n \in \mathbb{N}$. Тоді ці функції забезпечують виконання (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Нехай $f_n : X \to \mathbb{I}$ такі як в (ii) і $t \in \mathbb{I}$. Покладемо

$$u_{t,n}(x) = \max\big\{0, f_n(x) - t\big\} \quad \text{для } x \in X \text{ і } n \in \mathbb{N}.$$

Розглянемо функціонально відкриті множини $U_{t,n} = u_{t,n}^{-1}\big((0;1]\big)$. Тоді

$$U_{t,n} = \Big\{x \in X : u_{t,n}(x) > 0\Big\} = \Big\{x \in X : f_n(x) > t\Big\},$$

а тому, оскільки $f(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$, то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_{t,n} = \Big\{x \in X : \exists n \in \mathbb{N} \;\Big|\; f_n(x) > t\Big\} = \Big\{x \in X : f(x) > t\Big\} = G_t.$$

Отже, оскільки об'єднання послідовності функціонально відкритих множин є функціонально відкритою, то виконується (iii).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Покладемо $T = \mathbb{I}\cap\mathbb{Q}$. Для довільного $t \in T$ виберемо неперервну функцію $u_t : X \to \mathbb{I}$ таку, що $G_t = u_t^{-1}\big((0;1]\big)$. Покладемо

$$g_{t,n}(x) = \min\big\{1, n\cdot u_t(x)\big\} \quad \text{для} \quad x \in X, t \in T, n \in \mathbb{N}.$$

Тоді $g_{t,n}(x) \le t < f(x)$ для $x \in G_t$ і $g_{t,n}(x) = 0 \le f(x)$ для $x \in X \setminus G_t$. Таким чином, $\sup\limits_{t\in T, n\in\mathbb{N}} g_{t,n}(x) \le f(x)$. Доведемо зворотну нерівність. Візьмемо $x \in X$ і $\gamma < f(x)$. Тоді існує $t \in T$ таке, що $\gamma < t < f(x)$. Тоді $x \in G_t$, а значить, $u_t(x) > 0$. Отже, існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що $n \cdot u_t(x) > t$. В такому разі $g_{t,n}(x) = t > \gamma$. Звідси отримуємо, що $\sup\limits_{t\in T, n\in\mathbb{N}} g_{t,n}(x) \ge f(x)$. Таким чином, (i) виконується, адже множина $T \times \mathbb{N}$ зліченна.

Отже, ми перевірили, що

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii).$$

$(ii) \Rightarrow (iv)$. Очевидно.

$(iv) \Rightarrow (v)$. Випливає з того, що кожна функція першого класу Бера зі значеннями у досконало нормальному просторі належить до першого класу Лебеґа.

Залишилося перевірити імплікацію $(v) \Rightarrow (iii)$ для нормального простору X. Нехай $t \in \mathbb{I}$. Виберемо послідовність замкнених множин $F_{t,n}$ таку, що $G_t = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_{t,n}$. Далі за лемою Урисона [5] існують неперервні функції $u_{t,n} : X \to \mathbb{I}$ такі, що $u_{t,n}(x) = 0$ при $x \in X \setminus G_t$ і $u_{t,n}(x) = 1$ при $x \in F_{t,n}$. Тому, для функціонально відкритих множин $U_{t,n} = u_{t,n}^{-1}\big((0;1]\big)$ виконується, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_{t,n} = G_t$. Отже, G_t функціонально відкрита. $\square$

Замінюючи f на $-f$ встановлюємо наступний результат.

Теорема 3. *Нехай X – нормальний топологічний простір і $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Тоді наступні умови рівносильні:*

$(i)'$ *f зліченно функціонально напівнеперервна зверху;*

$(ii)'$ *існує спадна послідовність неперервних функцій $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ така, що $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для довільного $x \in X$;*

$(iii)'$ *для довільного $t \in \mathbb{R}$ множина $G_t = f^{-1}\big([-\infty;t)\big)$ є функціонально відкрита;*

$(iv)'$ *f є напівнеперервною зверху функцією першого класу Бера.*

$(v)'$ *для довільного $t \in \mathbb{R}$ множина $G_t = f^{-1}\big([-\infty;t)\big)$ є відкрита і типу F_σ.*

Більше того, для довільного топологічного простору X виконується, що

$$(i)' \Leftrightarrow (ii)' \Leftrightarrow (iii)' \Rightarrow (iv)' \Rightarrow (v)'.$$

Наступний приклад показує, що нормальність в попередній теоремі відкинути не можна.

Приклад 1. *Нехай множина $P = \mathbb{R} \times [0;+\infty)$ наділена топологією, що породжена базою, яка складається з відкритих прямокутників $(a;b) \times (c;d) \subseteq P$ а також множин вигляду $\big((a;b)\times(0;d)\big) \cup \big\{(x,0)\big\}$ з $a < x < b$. Тоді характеристична функція f замкненої множини $F = \big\{(\frac{1}{n},0) : n \in \mathbb{N}\big\}$ є напівнеперервною зверху функцією першого класу Бера, яка не є зліченно функціонально напівнеперервною зверху.*

Доведення. Позначимо $F_n = \big\{(\frac{1}{k},0) : k = 1,2,\ldots,n\big\}$ і $U_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \big(\frac{1}{k} - \frac{1}{n}; \frac{1}{k} + \frac{1}{n}\big) \times \big[0;\frac{1}{n}\big)$. Оскільки U_n відкриті в евклідовій топології на P, то існують функції $f_n : P \to \mathbb{I}$, які неперервні відносно евклідової топології на P і такі, що $f_n(p) = 1$ для $p \in F_n$ і $f_n(p) = 0$ для $p \in P \setminus U_n$. Але евклідова топологія слабша за топологію P, тому f_n неперервні на

P. Крім того, легко бачити, що $f_n(p) \to f(p)$ для кожного $p \in P$. Отже, f є функцією першого класу Бера.

Покажемо, що f не є зліченно функціонально напівнеперервна зверху. Припустимо, що це не так і існують неперервні функції $g_n : P \to \mathbb{R}$ такі, що $f(p) = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} g_n(p)$ для кожного $p \in P$. Позначимо $p_0 = (0,0)$. Оскільки $f(p_0) = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} g_n(p_0) = 0 < \frac{1}{2}$, то існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що $g_n(p_0) < \frac{1}{2}$. З неперервності g_n випливає, що існує такий окіл U_0 точки p_0 в P такий, що $g_n(p) < \frac{1}{n}$ для $p \in U_0$. З означення топології на P випливає, що існує $\varepsilon > 0$ таке, що $U = \big((-\varepsilon; \varepsilon) \times (0; \varepsilon)\big) \cup \{p_0\} \subseteq U_0$. Далі виберемо $k > n$ таке, що $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Позначимо $p_1 = (\frac{1}{k}, 0)$. Оскільки $g_n(p_1) \ge f(p_1) = 1 > \frac{1}{2}$, то існує такий окіл U_1 точки p_1 такий, що $g_n(p) > \frac{1}{2}$ для $p \in U_1$. Виберемо $\delta \in (0; \varepsilon)$ таке, що $V = \big((\frac{1}{k} - \delta; \frac{1}{k} + \delta) \times (0; \delta)\big) \cup \{p_1\} \subseteq U_1$. Покладемо $p_2 = (\frac{1}{k}, \frac{\delta}{2})$. Зрозуміло, що $p_2 \in U \cap V$, а значить, $f(p_2) < \frac{1}{2} < f(p_2)$, що неможливо. □

Простір X, що побудований прикладі 1 є гаусдорфовий, але навіть не регулярний. Рецензент запропонував приклад, який, таке враження, дає позитивну відповідь на це питання. А саме, прикладом такої функції буде характеристична функція множини $\mathbb{Q} \times \{0\}$ в класичній площині Немицького $\mathbb{P}$. Щоправда, його міркування вимагають пояснення того, що кожна неперервна функція $f : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ належить до першого класу відносно евклідової топології на $\mathbb{P}$. Зараз ми використовуючи ідею рецензента в дещо модифікуємо його приклад, перенісши його на квадрат прямої Зорґенфрея.

Приклад 2. *Нехай множина $Z = \mathbb{L} \times \mathbb{L}$ – квадрат прямої Зорґенфрея (див. [5, 1.2.2]). Тоді характеристична функція f замкненої множини $F = \big\{(x, -x) : x \in \mathbb{Q}\big\}$ є напівнеперервною зверху функцією першого класу Бера, яка не є зліченно функціонально напівнеперервною зверху.*

Доведення. Перш за все, занумеруємо $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Розглянемо відкрито-замкнені множини $W_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} [q_k; q_k + \frac{1}{n}) \times [-q_k; -q_k + \frac{1}{n})$. Зрозуміло, що тоді характеристичні функції f_n множин W_n є неперервними функціями, що поточково прямують до f. Отже, f є напівнеперервною зверху функцією, яка належить до першого класу Бера.

Припустимо, що f є зліченно функціонально напівнеперервною зверху. Тоді існує послідовність неперервних функцій $g_n : Z \to \overline{\mathbb{R}}$ таких, що $f(x) = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} g_n(x)$ для $x \in X$. Розглянемо неперервні функції $h_n(x) = \min\{1, g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)\}$, $x \in X$. Тоді $h_n : Z \to [0; 1]$ спадаючи прямують до f. А значить, для неперервної функції $h = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} h_n$ матимемо, що $F = h^{-1}(1)$. Розглянемо множини

$$E_n = \Big\{x \in \mathbb{R} : h(x + u, -x + v) < 1 - \tfrac{1}{n} \text{ для } u, v \in \big[0; \tfrac{1}{n}\big)\Big\}.$$

Тоді $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Отже, з теореми Бера про категорію випливає, що одна із множин E_n є десь щільною в $\mathbb{R}$ відносно звичайної топології. Тоді існують $a < b$ такі, що $b - a < \frac{1}{n}$ і $(a; b) \subseteq \overline{E}_n$. Виберемо деяке $x \in \mathbb{Q} \cap (a; b)$. Оскільки $h(x, -x) = 1$, то з неперервності h випливає, що існує $\varepsilon > 0$ таке, що $(x - \varepsilon; x + \varepsilon) \subseteq (a; b)$ і $f(x + u, -x + v) > 1 - \frac{1}{n}$ для довільних $u, v \in [0;\varepsilon)$. Виберемо точку $y \in (a;x) \cap E_n$. Тоді $u = x - y \in [0;\varepsilon) \subseteq [0;\frac{1}{n})$. Таким чином, $f(x,-y) = f(x,-x+u) > 1-\frac{1}{n} > f(y+u,y) = f(x,y)$, що неможливо. $\square$

3 Пари Гана і екстремальні розшарування

Пару (g,h) називатимемо *парою Гана* на X, якщо $g,h : X \to \overline{\mathbb{R}}$, причому $g(x) \leq h(x)$ для $x \in X$, функція g напівнеперервна зверху а функція h напівнеперервна знизу.

Для відображення $f : X \times Y \to Z$, як звичайно, позначатимемо

$$f^x(y) = f_y(x) = f(x,y)$$

для $x \in X$ і $y \in Y$. Функцію $f^x : Y \to Z$ (відповідно $f_y : X \to Z$) називають *вертикальним (горизонтальним) розшаруванням* функції f. Для довільної функції $f : X\times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *екстремальні розшарування* $\wedge_f, \vee_f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ і $\wedge^f, \vee^f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ вводяться наступним чином:

$$\wedge_f(x) = \inf_{y\in Y} f(x,y), \vee_f(x) = \sup_{y\in Y} f(x,y) \text{ для довільного } x \in X,$$

$$\wedge^f(y) = \inf_{x\in X} f(x,y), \vee^f(y) = \sup_{x\in X} f(x,y) \text{ для довільного } y \in Y.$$

Функцію $\wedge_f$ (відповідно $\wedge^f$) називатимемо *мінімальним розшаруванням* функції f відносно першої (другої) змінної, а функцію $\vee_f$ (відповідно $\vee^f$) – *максимальним розшаруванням* функції f відносно першої (другої) змінної

Як було зауважено в [3], має місце наступне

Твердження (Волошин Г. А., Маслюченко В. К., Мельник В. С. [3])**.** *Нехай X – топологічний простір, Y – деяка непорожня множина, $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ – функція, яка неперервна відносно першої змінної, $g = \wedge_f$ і $h = \vee_f$. Тоді (g,h) є парою Гана.*

Пару Гана (g,h) на X називатимемо

- *парою Гана, що породжена функцією* $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, якщо $g = \wedge_f$ і $h = \vee_f$;
- *скінченною парою Гана,* якщо $g,h : X \to \mathbb{R}$;
- *відокремною парою Гана,* якщо існує неперервна функція $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ така, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ для довільного $x \in X$;
- *неперервною парою Гана,* якщо функції g та h неперервні;
- *функціональною парою Гана,* якщо функції g і h функціонально напівнеперервні зверху і знизу відповідно;
- *парою Гана типу* $\mathfrak{m}$, якщо функції g і h $\mathfrak{m}$-функціонально напівнеперервні зверху і знизу відповідно;
- *парою Гана зліченного типу,* якщо функції g і h зліченно функціонально напівнеперервні зверху і знизу відповідно;

- *парою Гана першого класу Бера,* якщо функції g і h належать до першого класу Бера (тобто, є поточковими границями послідовностей неперервних функцій);

Наступне твердження випливає з означень і тверердження 1.

Твердження 3. *Нехай X – топологічний простір, $\ell : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{I}$ – обмежувальне перетворення, (g, h) є парою Гана на X, $g_1 = \ell \circ g$ і $h_1 = \ell \circ h$. Тоді функція $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ породжує пару Гана (g, h) в тому і тільки в тому випадку, коли функція $f_1 = \ell \circ f : X \times Y \to \mathbb{I}$ породжує пару Гана (g_1, h_1).*

Теорема 4 (Тонг [1])**.** *Нехай X – топологічний простір. Тоді*

(*i*) *якщо (g, h) – пара Гана зліченного типу на X, то (g, h) – відокремна пара Гана;*

(*ii*) *якщо X нормальний, то для кожної пари Гана (g, h) на X існує пара Гана зліченного типу (g_0, h_0) на X така, що $g(x) \le g_0(x) \le h_0(x) \le h(x)$ для $x \in X$;*

(*iii*) *T_1-простір X буде нормальним тоді і тільки тоді, коли кожна пара Гана є відокремною.*

(*iv*) *T_1-простір X буде досконало нормальним тоді і тільки тоді, коли кожна пара Гана (g, h) на X є парою Гана зліченного типу.*

Пункт (i) попередньої теореми випливає з загального ґраткового результату [1, Theorem 1]. Виявляється, що відокремну пару Гана типу $\mathfrak{m}$ можна охарактеризувати в термінах функцій, що породжують цю пару.

Теорема 5. *Нехай X – топологічний простір і $\mathfrak{m} \ge \aleph_0$. Тоді наступні умови рівносильні:*

(*i*) *(g, h) є відокремною парою Гана типу $\mathfrak{m}$;*

(*ii*) *існує непорожня множина $Y \subseteq C(X, \overline{\mathbb{R}})$ потужності $\le \mathfrak{m}$, для якої функція обчислення $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(x, y) = y(x)$ для $x \in X$, $y \in Y$, породжує пару Гана (g, h).*

(*iii*) *існує непорожня множина Y потужності $\le \mathfrak{m}$ і неперервна відносно першої змінної функція $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, яка породжує пару Гана (g, h).*

(*iv*) *існує топологічний простір Y зі щільністю $d(Y) \le \mathfrak{m}$ і нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, яка породжує пару Гана (g, h).*

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Оскільки (g, h) відокремна, то існує $u \in C(X, \overline{\mathbb{R}})$ така, що $g \le u \le h$. Нехай S – деяка множина потужності $\mathfrak{m}$. Оскільки (g, h) є парою Гана типу $\mathfrak{m}$, то існують функції $g_s, h_s \in C(X, \overline{\mathbb{R}})$, $s \in S$, такі, що

$$g(x) = \inf_{s \in S} g_s(x), \quad h(x) = \sup_{s \in S} h_s(x), \quad \text{для } x \in X.$$

Визначимо функції $v_s, w_s \in C(X, \overline{\mathbb{R}})$, покладаючи

$$v_s(x) = \min\big\{u(x), g_s(x)\big\}, \quad w_s(x) = \max\big\{u(x), h_s(x)\big\}, \quad \text{для } x \in X.$$

Тоді, оскільки $g \le u \le h$, то також матимемо, що

$$g(x) = \inf_{s \in S} v_s(x), \quad h(x) = \sup_{s \in S} w_s(x), \quad \text{для } x \in X.$$

Покладемо

$$Y = \Big\{ v_s : s \in S \Big\} \cup \Big\{ w_s : s \in S \Big\}.$$

Зрозуміло, що $Y \subseteq C(X, \overline{\mathbb{R}})$, причому, за теоремою Гессенберга [4, Theorem 3.5], маємо, що $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$, а тому $|Y| \le 2|S| = 2\mathfrak{m} \le \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$. Більше того, оскільки $g \le v_s \le u \le w_s \le h$ для довільного $s \in S$, то

$$g(x) = \inf_{y \in Y} y(x), \quad h(x) = \sup_{y \in Y} y(x), \quad \text{для } x \in X.$$

Таким чином, (ii) виконується.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Випливає з того, що функція обчислення неперервна відносно першої змінної.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Досить розглянути дискретну топологію на Y.

$(iv) \Rightarrow (iii)$. Оскільки $d(Y) \le \mathfrak{m}$, то існують множина Y_0 потужності $|Y_0| = \mathfrak{m}$ і $\varphi : Y_0 \to Y$ таке, що $\overline{\varphi(Y_0)} = Y$. Тоді функція $f_0 : X \times Y_0 \to \overline{\mathbb{R}}$, що діє за правилом $f_0(x, y) = f\big(x, \varphi(y)\big)$ для $x \in X$ і $y \in Y_0$ є неперервною відносно першої змінної і породжує пару (g, h).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Нехай S – множина потужності $\mathfrak{m}$. Оскільки $|Y| \le \mathfrak{m} = |S|$ і $Y \ne \varnothing$, то існує сюр'єкція $\eta : S \to Y$. Покладемо $u_s = f_{\eta(s)}$ для $s \in S$. Тоді матимемо, що

$$g(x) = \inf_{y \in Y} f(x, y) = \inf_{s \in S} f\big(x, \eta(s)\big) = \inf_{s \in S} u_s(x),$$

$$h(x) = \sup_{y \in Y} f(x, y) = \sup_{s \in S} f\big(x, \eta(s)\big) = \sup_{s \in S} u_s(x),$$

для довільного $x \in X$, а тому (g, h) є парою Гана типу $\mathfrak{m}$. Оскільки $S \ne \varnothing$, адже $|S| = \mathfrak{m} \ge \aleph_0$, то існує $s_0 \in S$. Тоді, оскільки $g \le u_{s_0} \le h$, то (g, h) є відокремною парою Гана. □

З теорем 4 і 5 негайно випливає

Наслідок 3. *Нехай X – топологічний простір. Тоді наступні умови рівносильні.*

(i) *(g, h) є парою Гана зліченного типу;*

(ii) *(g, h) є відокремною парою Гана зліченного типу;*

(iii) *існує послідовність неперервних функцій $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ така, що $g(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ і $h(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$;*

(iv) *існує непорожня не більш ніж зліченна множина $Y \subseteq C(X, \overline{\mathbb{R}})$, для якої функція обчислення $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(x, y) = y(x)$ для $x \in X$, $y \in Y$, породжує пару Гана (g, h);*

(*v*) *існує неперервна функція* $f : X \times \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$*, яка породжує пару Гана* (g, h)*;*

(*vi*) *існує сепарабельний топологічний простір* Y *і нарізно неперервна функція* $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$*, яка породжує пару Гана* (g, h)*.*

З теореми 1 одержуємо, що для цілком регулярного простору X виконується рівність

$$pn(X) = \min\big\{\mathfrak{m} \geq \aleph_0 : \text{ кожна пара Гана } (g,h) \text{ на } X \text{ є парою Гана типу } \mathfrak{m}\big\}$$

А тому з теорем 1 і 5 негайно випливає наступний результат.

Наслідок 4. *Нехай* X *– цілком регулярний простір і* $\mathfrak{p} = pn(X)$*. Тоді*

$(C_x)_{\mathfrak{p}}$ *для довільної відокремної пари Гана* (g, h) *існує множина* Y *потужності* $\mathfrak{p}$ *і неперервна відносно першої змінної функція* $f : X \times Y \to Z$*, яка породжує пару Гана* (g, h)*.*

Більше того, якщо X *довільний топологічний простір і для певного* $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$ *виконується* $(C_x)_{\mathfrak{m}}$*, то* X *є цілком регулярним і* $pn(X)$ *є найменшим з таких кардинальних чисел* $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$*, що задовольняють* $(C_x)_{\mathfrak{m}}$*.*

4 $\mathbb{R}$-щільні та $\mathbb{I}$-щільні простори

Нехай X і T – топологічні простори. Простір X називатимемо *T-щільним*, якщо існує неперервне відображення $f : X \to T$ таке, що $\overline{f(X)} = T$. Для нас важливу роль відіграватимуть $\mathbb{R}$-щільні та $\mathbb{I}$-щільні простори. Оскільки $\mathbb{R}$ гомеоморфний до $(0;1)$, то кожний $\mathbb{R}$-щільний простір є $\mathbb{I}$-щільним. Зауважимо також, що кожний $\mathbb{R}$-щільний простір не є компактним, а тому відрізок $\mathbb{I}$ є $\mathbb{I}$-щільним, але не є $\mathbb{R}$-щільним. Нагадаємо, що топологічний простір X називається *псевдокомпактним*, якщо кожна неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$ є обмеженою.

Теорема 6. *Топологічний простір* X *буде* $\mathbb{R}$*-щільним тоді і тільки тоді, коли він не є псевдокомпактним.*

Доведення. Нехай спочатку X є $\mathbb{R}$-щільним. Тоді існує неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$ така, що $\overline{f(X)} = \mathbb{R}$. Тоді f є необмеженою, а значить, X не є псевдокомпактним.

Нехай тепер X не є псевдокомпактним простором. Тоді існує необмежена неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$. Не буде обмеженням вважати, що $f \geq 0$ (бо інакше замість функції f треба розглянути функцію $|f|$).

Припустимо спочатку, що існує $y_0 \in \mathbb{R}$ таке, що $[y_0; +\infty) \subseteq f(X)$ і розглянемо функцію $g(x) = |f(x) - y_0|$, $x \in X$. Тоді $g : X \to [0; +\infty)$ є неперервною сюр'єкцією. Покладемо $h(x) = g(x) \sin g(x)$ для $x \in X$. Зрозуміло, що $h : X \to \mathbb{R}$ є неперервною сюр'єкцією, а тому X є $\mathbb{R}$-щільним.

Надалі вважатимемо, що для кожного $y \in \mathbb{R}$ виконується, що $[y; +\infty) \not\subseteq f(X)$. Тоді за індукцією можемо побудувати послідовність $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ таку, що

$$y_0 = 0 \text{ і } y_n \in \big[y_{n-1} + n; +\infty\big) \setminus f(X) \text{ для довільного } n \in \mathbb{N}.$$

В такому разі, $y_n \uparrow +\infty$ і $y_n \notin f(X)$ для $n \in \mathbb{N}$. Розглянемо множини $U_n = f^{-1}\big([y_{n-1}; y_n]\big)$. Зрозуміло, що U_n відкрито-замкнені. Нехай

$$N = \big\{n \in \mathbb{N} : U_n \neq \varnothing\big\}.$$

Тоді $X = \bigsqcup\limits_{n \in N} U_n$. Оскільки f необмежена, то N нескінченна. Тому існує біекція $\varphi : N \to \mathbb{Q}$. Визначимо функцію $\psi : X \to \mathbb{Q}$ покладаючи $\psi(x) = \varphi(n)$, якщо $x \in U_n$ для $n \in N$. Тоді ψ є неперервною біекцією X на $\mathbb{Q}$, а значить, образ $\psi(X)$ щільний в $\mathbb{R}$. Отже, X є $\mathbb{R}$-щільним. $\square$

Нагадаємо, що топологічний простір називається *нульвимірним*, якщо в ньому кожна точка має базу з відкрито-замкнених множин. Топологічний простір називається *розрідженим*, якщо кожна його непорожня підмножина має ізольовану точку.

Твердження 4. *Нехай X – цілком регулярний простір, який не є нульвимірним. Тоді X є $\mathbb{I}$-щільним.*

Доведення. Оскільки X не є нульвимірним, то існує точка $a \in X$ і її окіл U, який не містить відкрито-замкнених околів точки a. Далі, з того, що X є цілком регулярним, маємо, що існує неперервна функція $f : X \to \mathbb{I}$, така, що $f(a) = 1$ і $f(x) = 0$ при $x \in X \setminus U$. Покажемо, що $f(X) = \mathbb{I}$. Нехай це не так, і існує $y \in \mathbb{I} \setminus f(X)$. Тоді, оскільки $f(a) = 1$, то $y < 1$. Таким чином, множина $V = f^{-1}\big((y; 1]\big) = f^{-1}\big([y; 1]\big)$ є відкрито-замкненим околом точки a, що міститься в U, а це суперечить вибору U. $\square$

Нехай X – топологічний простір, $A \subseteq X$ і $x \in X$. Нагадаємо, що x називається *граничною точкою* множини A, якщо $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Множину усіх граничних точок множини A будемо позначати символом A^d. Як відомо, $A^d \subseteq \overline{A}$ і для T_1-простору виконується, що $A^d = \overline{A}^d$. Позначатимемо символом $\mathbb{O}\mathrm{n}$ клас усіх ординалів. Покладемо

$$A^{(0)} = \overline{A}, \quad A^{(1)} = A^d, \quad A^{(\alpha)} = \Big(\bigcap_{\xi < \alpha} A^{(\xi)}\Big)^d, \text{ якщо } \alpha \in \mathbb{O}\mathrm{n} \text{ і } \alpha > 1,$$

Зрозуміло, що трансфінітна сім'я $\big(A^{(\alpha)}\big)_{\alpha \in \mathbb{O}\mathrm{n}}$ спадає, а тому $A^{(\alpha)} = A^{(\alpha+1)}$ для деякого $\alpha \in \mathbb{O}\mathrm{n}$. Позначимо

$$r(A) = \min\Big\{\alpha \in \mathbb{O}\mathrm{n} : A^{(\alpha)} = A^{(\alpha+1)}\Big\}.$$

Тоді для множини $F = A^{(r(A))}$ матимемо, що $F^d = F$, а значить F не має ізольованих точок. Таким чином, для розрідженого простору X матимемо, що $X^{(r(X))} = \varnothing$ і тому

$$r(X) = \min\Big\{\alpha \in \mathbb{O}\mathrm{n} : X^{(\alpha)} = \varnothing\Big\}.$$

Твердження 5. *Нехай X – розріджений компакт. Тоді X не є $\mathbb{I}$-щільним.*

Доведення. Будемо міркувати індуктивно по $r(X)$. Зауважимо, що якщо $r(X) \leq 1$, то простір X скінченний, а значить X не є $\mathbb{I}$-щільним. Припустимо, що для деякого ординала $\alpha > 1$ виконується, що кожний компакт K з $r(K) < \alpha$ не є $\mathbb{I}$-щільним. Візьмемо деякий компакт X з $r(X)=\alpha$. Оскільки X компакт, то $\alpha=r(X)$ є ізольованим ординалом (бо інакше виявилося би що перетин непорожніх компактів $X^{(\xi)}$, $\xi<\alpha$, є порожній). Тоді $\alpha=\beta+1$ для деякого ординала β. Доведемо, що X не є $\mathbb{I}$-щільним.

Нехай це не так, і X є $\mathbb{I}$-щільним. Тоді існує неперервна функція $f: X\to\mathbb{I}$, для якої $\overline{f(X)}=\mathbb{I}$. А значить, оскільки X компактний, то $f(X)=\mathbb{I}$. Покладемо, $F=X^{(\beta)}$. Оскільки $\beta<\alpha=r(X)$, то $F\neq\varnothing$. Крім того, оскільки $X^{(\xi)}\supseteq X^{(\beta)}$ для $\xi\leq\beta$, $F=\bigcap\limits_{\xi\leq\beta}X^{(\xi)}=\bigcap\limits_{\xi<\alpha}X^{(\xi)}$. Тому, $F^d=X^{(\alpha)}=\varnothing$, а значить F скінченна непорожня множина. Тоді $E=f(F)$ є скінченною непорожньою підмножиною $\mathbb{I}$. Зрозуміло, що існує неперервна сюр'єкція $g:\mathbb{I}\to[-1;1]$ така, що $g\big(E\big)=\{-1\}$. Покладемо $h=g\circ f$. Тоді $h(F)=\{-1\}$ і образ $Y=h(X)$ щільний в $[-1;1]$. Нехай $G=h^{-1}\big([-1;0)\big)$. Зрозуміло, що G – відкритий окіл множини F. Позначимо, $K=X\setminus G$. В такому разі, $K^{(\beta)}\subseteq X^{(\beta)}=F$ і $K^{(\beta)}\subseteq K\subseteq X\setminus F$, а значить, $K^{(\beta)}=\varnothing$. Отже, $r(K)\leq\beta<\alpha$ і за індуктивним припущенням K не є $\mathbb{I}$-щільним. Але це суперечить тому, що для неперервного відображення $f_1:K\to\mathbb{I}$, $f_1(x)=|h(x)|$ для $x\in K$, образ $Y_1=f_1(K)$ щільний в $\mathbb{I}$, адже $Y\cap\mathbb{I}\subseteq Y_1$. $\square$

Твердження 6. *Нехай X – нульвимірний нерозріджений компакт. Тоді X є $\mathbb{I}$-щільним.*

Доведення. Покажемо, що існує сюр'єкція g простору X на канторів куб $\Delta=\{0;1\}^{\mathbb{N}}$. Позначимо, $D=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\{0;1\}^n$. Як звичайно для довільного $d=(d_1,\dots,d_n)\in D$ та $i=0,1$ покладаємо $d,i=(d_1,\dots,d_n,i)$ (якщо $d=\varnothing\in\{0,1\}^0$, то вважаємо, що $d,i=i\in\{0,1\}^1$).

Оскільки X не є розрідженим, то існує непорожня замкнена множина F в X без ізольованих точок. Тоді, користуючись нульвимірністю X, легко побудувати діадичну сім'ю $(U_d)_{d\in D}$ з відкрито-замкнених множин U_d таких, що $U_\varnothing=X$, $U_d\cap F\neq\varnothing$ і $U_d=U_{d,0}\cup U_{d,1}$ для довільного $d\in D$. В такому разі, для довільного $x\in X$ існує єдиний набір $g(x)=\big(\delta_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}\in\Delta$, для якого $x\in U_{g_n(x)}$, якщо $n\in\mathbb{N}$ і $g_n(x)=\big(\delta_k(x)\big)_{k=1}^{n}$. Візьмемо $\delta=(\delta_k)_{k=1}^{\infty}\in\Delta$ і покладемо $d_n=(\delta_k)_{k=1}^{n}$ для $n\in\mathbb{N}$. Оскільки F компактна і $(U_{d_n})_{n=1}^{\infty}$ – спадна послідовність відкрито-замкнених множин, які перетинаються з F, то існує $x\in F\cap\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}U_{d_n}$. Тоді $g_n(x)=d_n$ для кожного n, а значить $g(x)=\delta$. Таким чином, відображення $g:X\to\Delta$ є неперервною сюр'єкцією.

Залишилося врахувати, що канторів куб Δ, який гомеоморфний до звичайної канторової множини, можна неперервно і сюр'єктивно відобразити на відрізок $\mathbb{I}$ за допомогою відображення $\varphi(\delta)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\delta_k 2^{-k}$, де $\delta=(\delta_k)_{k=1}^{\infty}\in\Delta$ (у випадку звичайної канторової множини таке відображення називається канторовими сходами). Тоді відображення $f=\varphi\circ g$ буде неперервною сюр'єкцією X на $\mathbb{I}$. $\square$

Теорема 7. *Нехай X – цілком регулярний простір. Для того, щоб X був $\mathbb{I}$-щільним необхідно і досить, щоб X мав деяку нерозріджену компактифікацію.*

Доведення. Необхідність. Нехай X є $\mathbb{I}$-щільним. Тоді існує неперервна функція $f:X\to\mathbb{I}$ з щільним образом $f(X)$. Розглянемо її неперервне продовження $g:\beta X\to\mathbb{I}$ на компактифікацію Стоуна-Чеха βX простору X. Оскільки $g(\beta X)\supseteq f(X)$, то компакт βX є $\mathbb{I}$-щільним. Отже, βX є нерозрідженим за твердженням 5.

Достатність. Нехай X має деяку нерозріджену компактифікацію Y. Можна вважати, що X є всюди щільним підпростором Y. Тоді за твердженням 6 простір Y є $\mathbb{I}$-щільним. Отже, існує неперервна сюр'єкція $f : Y \to \mathbb{I}$. Тоді $\overline{f(X)} \supseteq f\big(\overline{X}\big) = f(Y) = \mathbb{I}$, а значить, X є $\mathbb{I}$-щільним. □

5 Побудова функцій з даними екстремальними розшаруваннями

Почнемо з побудови неперервних функцій, що породжують деяку пару Гана.

Теорема 8. *Нехай X – топологічний простір, Y – $\mathbb{R}$-щільний простір і (g, h) – пара Гана зліченного типу на X. Тоді існує неперервна функція $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, яка породжує пару Гана (g, h).*

Доведення. По-перше, за твердженнями 1 і 3 можна вважати, що $g, h : X \to \mathbb{I}$. Нехай $Y_0 = \big\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}_0\big\}$. Оскільки за теоремою 4 пара (g, h) є відокремною, то з теореми 5 випливає, що існує неперервна відносно першої змінної функція $f_0 : X \times Y_0 \to \mathbb{I}$, яка породжує пару Гана (g, h). Покладемо $f_1(x, y) = (2-2^n y) f_0\big(x, \frac{1}{2^n}\big) + (2^n y - 1) f_0\big(x, \frac{1}{2^{n-1}}\big)$ якщо $y \in \big[\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n-1}}\big]$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Нескладно перевірити, що функція $f_1 : X \times [0; 1) \to \mathbb{I}$ є неперервною і породжує пару Гана (g, h).

Оскільки Y є $\mathbb{R}$-щільним і $\mathbb{R}$ гомеоморфний до $(0; 1)$, то існує неперервне відображення $\varphi : Y \to (0; 1)$ з щільним образом. Тоді неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{I}$, що діє за правилом $f(x, y) = f_1\big(x, \varphi(y)\big)$ для $x \in X$ і $y \in Y$, теж породжує пару (g, h). □

Теорема 9 (Волошин Г., Маслюченко В., Мельник В. [3])**.** *Нехай X – досконало нормальний простір з нормальним квадратом діагоналлю типу G_δ, (g, h) – скінченна пара Гана на X, причому функція g (відповідно h) є неперервною. Тоді існує нарізно неперервна функція $f : X \times X \to \mathbb{R}$ така, що $g(x) \le f(x, y) \le h(x)$ для довільних $x, y \in X$, причому $\vee_f = h$ (відповідно $\wedge_f = g$).*

Теорема 10. *Нехай X – топологічний простір, Y – $\mathbb{I}$-щільний простір і (g, h) пара Гана зліченного типу на X. Тоді існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, яка породжує цю пару Гана.*

Доведення. За твердженнями 1 і 3 можна вважати, що $g, h : X \to \mathbb{I}$. За наслідком 3 існують неперервні функції $\varphi_n : X \to \mathbb{I}$ такі, що

$$g(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x) \quad \text{і} \quad h(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x)$$

для довільного $x \in X$. Нехай $\mathbb{H} = \mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ – гільбертів куб. Визначимо відображення $\varphi : X \to \mathbb{H}$ покладаючи $\varphi(x) = \big(\varphi_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$. Зрозуміло, що φ неперервне. Розглянемо функції $g_0, h_0, u : \mathbb{H} \to \mathbb{I}$, що діють за формулами

$$g_0(z) = \inf_{n\in\mathbb{N}} z_n, \quad h_0(z) = \sup_{n\in\mathbb{N}} z_n, \quad u(z) = z_1 \quad \text{для } z = (z_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{H}.$$

Оскільки координатні проекції в $\mathbb{H}$ є неперервними функціями, то функція u неперервна а функції g_0 і h_0 є напівнеперервними зверху і, відповідно, знизу, як інфімум, чи відповідно, супремум координатних проекцій. Крім того, зрозуміло, що $g_0(z) \leq u(z) \leq h_0(z)$ для довільного $z \in \mathbb{H}$. Отже, (g_0, h_0) є парою Гана на $\mathbb{H}$ причому $g = g_0 \circ \varphi$ і $h = h_0 \circ \varphi$.

Тоді (g_0, u) і (u, h_0) є парами Гана на $\mathbb{H}$ у яких одна із функцій неперервна. Врахувавши, що $\mathbb{H}$ метризовний, застосуємо теорему 9 до пар (g_0, u) і (u, h_0) і одержимо, що існують нарізно неперервні функції $f_1, f_2 : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{I}$, такі, що

$$g_0(x) \leq f_1(x,y) \leq u(x) \leq f_2(x,y) \leq h_0(x) \quad \text{для } x, y \in \mathbb{H};$$

$$g_0(x) = \inf_{y \in \mathbb{H}} f_1(x,y), \quad h_0(x) = \sup_{y \in \mathbb{H}} f_2(x,y), \quad \text{для } x \in \mathbb{H}.$$

Далі за теоремою Гана-Мазуркевича [8], оскільки $\mathbb{H}$ є метризовним локально зв'язним континуумом, то існує неперервна сюр'єкція $\gamma : \mathbb{I} \to \mathbb{H}$. Визначимо функцію $f_0 : \mathbb{H} \times \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ за формулою

$$f_0(x,t) = \begin{cases} f_1\big(x, \gamma(3t)\big) & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{3}; \\ (2-3t) f_1\big(x, \gamma(1)\big) + (3t-1) f_2\big(x, \gamma(0)\big) & , \quad \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}; \\ f_2\big(x, \gamma(3t-2)\big) & , \quad \frac{2}{3} \leq t \leq 1; \end{cases}$$

якщо $(x,t) \in \mathbb{H} \times \mathbb{I}$. Нескладно перевірити, що f_0 є нарізно неперервною функцією. Врахувавши, що

$$\mathbb{H} = \Big\{\gamma(3t) : 0 \leq t \leq \tfrac{1}{3}\Big\} = \Big\{\gamma(3t-2) : \tfrac{2}{3} \leq t \leq 1\Big\}$$

матимемо, що

$$g_0(x) = \inf_{0 \leq t \leq \frac{1}{3}} f_0(x,t), \quad h_0(x) = \sup_{\frac{2}{3} \leq t \leq 1} f_0(x,t),$$

Візьмемо тепер $t \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$ і $x \in \mathbb{H}$. Оскільки $2-3t, 3t-1 \in \mathbb{I}$ і $(2-3t)+(3t-1) = 1$, то $f_0(x,t)$ лежить між $f_0\big(x, \frac{1}{3}\big)$ та $f_0\big(x, \frac{2}{3}\big)$, а значить, $g_0(x) \leq f_0(x,t) \leq h_0(x)$ для таких x та t. Таким чином, нарізно неперервна функція $f_0 : \mathbb{H} \times \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ породжує пару Гана (g_0, h_0) на $\mathbb{H}$.

Оскільки Y є $\mathbb{I}$-щільним простором, то існує неперервне відображення $\psi : Y \to \mathbb{I}$, для якого образ $T = \psi(Y)$ щільний в $\mathbb{I}$. Визначимо функцію $f : X \times Y \to \mathbb{I}$ покладаючи

$$f(x,y) = f_0\big(\varphi(x), \psi(y)\big) \text{ для довільних } x \in X, y \in Y.$$

Зрозуміло, що f є нарізно неперервною функцію. Врахувавши, що $\overline{T} = \mathbb{I}$ і f_0 неперервна відносно другої змінної, матимемо, що довільного $x \in X$ виконуються рівності

$$g(x) = g_0\big(\varphi(x)\big) = \inf_{t \in \mathbb{I}} f_0\big(\varphi(x), t\big) = \inf_{t \in T} f_0\big(\varphi(x), t\big) = \inf_{y \in Y} f_0\big(\varphi(x), \psi(y)\big) = \inf_{y \in Y} f(x,y),$$

$$h(x) = h_0\big(\varphi(x)\big) = \sup_{t \in \mathbb{I}} f_0\big(\varphi(x), t\big) = \sup_{t \in T} f_0\big(\varphi(x), t\big) = \sup_{y \in Y} f_0\big(\varphi(x), \psi(y)\big) = \sup_{y \in Y} f(x,y).$$

Таким чином, функція f породжує пару Гана (g,h). □

З теорем 4, 8 і 10 випливає

Наслідок 5. *Нехай X – досконало нормальний топологічний простір, Y – $\mathbb{R}$-щільний ($\mathbb{I}$-щільний) простір і (g,h) пара Гана на X. Тоді існує неперервна (неперервна нарізно) функція $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, яка породжує цю пару Гана.*

6 Генеруючі простори

Топологічний простір Y називатимемо *C-генеруючим* для топологічного простору X, якщо для довільної відокремної функціональної пари Гана (g, h) на X існує неперервна функція $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, яка породжує цю пару Гана. Якщо функція f є тільки нарізно неперервною, то простір Y називатимемо *CC-генеруючим* для X. Зрозуміло, що кожний C-генеруючий для X простір є CC-генеруючим. Нескладно перевірити, що для неперервної функції $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ і компактного простору Y функції $\wedge_f$ та $\vee_f$ неперервні. Тому компактний простір Y буде C-генеруючим для X тоді і тільки коли, кожна напівнеперервна на X функція є неперервною, а це для T_1-просторів можливо тільки у випадку, коли X дискретний (адже тоді характеристична функція кожної одноточкової множини буде неперервною, а значить, одноточкові множини будуть відкритими). Крім того, з наслідку 4 негайно випливає наступне.

Наслідок 6. *Нехай X – цілком регулярний топологічний простір і Y – дискретний простір потужності $\geq pn(X)$. Тоді Y є C-генеруючим для X.*

В класі цілком регулярних просторів результати цієї статті об'єднуються в наступну характеризацію досконалої нормальності, з якої, зокрема, випливають теореми (A) і (B), які були сформульовані у вступі.

Теорема 11. *Нехай X – цілком регулярний простір. Тоді наступні умови рівносильні*

(0) *X – досконало нормальний;*

(1) *$\mathbb{N}$ є C-генеруючим для X;*

(2) *$(0; 1]$ є C-генеруючим для X;*

(3) *кожний $\mathbb{R}$-щільний простір є C-генеруючим для X;*

(4) *кожний непсевдокомпактний простір є C-генеруючим для X;*

(5) *існує сепарабельний простір, який є C-генеруючим для X;*

(6) *$\mathbb{N}$ є CC-генеруючим для X;*

(7) *$[0; 1]$ є CC-генеруючим для X;*

(8) *кожний $\mathbb{I}$-щільний простір є CC-генеруючим для X;*

(9) *кожний простір, що має нерозріджену компактифікацію, є CC-генеруючим для X;*

(10) *існує сепарабельний простір, який є CC-генеруючим для X.*

Доведення. (0) $\Rightarrow$ (1). Випливає з теорем 4 і наслідку 3.

(1) $\Rightarrow$ (0). Нехай h – деяка напівнеперервна знизу функція. За наслідком 1 функція h є функціонально напівнеперервною знизу. Тоді пара $(0, h)$ є очевидним чином відокремною парою Гана і, крім того, вона є функціональною. Отже, за означенням CC-генеруючих просторів з (1) випливає, що існує неперервна відносно першої змінної функція $f : X \times \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$, яка породжує пару $(0, h)$. Тоді, за наслідком 3 пара Гана $(0, h)$ є зліченного типу. А тому h є зліченно функціонально напівнеперервною знизу функцією. Отже, за наслідком 2, X є досконало нормальним.

(6) $\Leftrightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (10). Очевидно.

(10) $\Rightarrow$ (1). Випливає наслідку 3.

Таким чином, ми довели, що (0) $\Leftrightarrow$ (1) $\Leftrightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (6) $\Leftrightarrow$ (10).

Доведемо, що (0) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (5).

(0) $\Rightarrow$ (3). Випливає з теореми 4 і 8.

(3) $\Rightarrow$ (4). Випливає з теореми 6

(4) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (5). Очевидно.

Залишилось показати, що (0) $\Rightarrow$ (8) $\Rightarrow$ (9) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (10).

(0) $\Rightarrow$ (8). Випливає з теорем 4 і 10.

(8) $\Rightarrow$ (9). Випливає з теореми 7.

(9) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (10). Очевидно. □

І на завершення наведемо один результат про C-генеруючі простори для просторів, які не є досконало нормальними.

Теорема 12. *Нехай X – цілком регулярний топологічний простір. Тоді простір $Y = C^b(X)$ обмежених неперевних з топологією рівномірної збіжності є C-генеруючим для X.*

Доведення. Розглянемо деяку відокремну функціональну пару Гана (g, h) на X. За твердженнями 1 і 3 можна вважати, що $g, h : X \to \mathbb{I}$. Розглянемо множину

$$Y_0 = \Big\{ y \in Y : g(x) \le y(x) \le h(x) \text{ для кожного } y \in Y \Big\}.$$

Зрозуміло, що Y_0 є замкненою і опуклою підмножиною метризовного локально опуклого простору Y. Отже, за теоремою Дуґунжі [9] існує неперервне продовження $r : Y \to Y_0$ тотожного відображення $id_{Y_0} : Y_0 \to Y_0$. Зокрема, $r(Y) = Y_0$. Визначимо функцію $f : X \times Y \to \mathbb{I}$ за правилом $f(x, y) = r(y)(x)$ для довільних $x \in X$ та $y \in Y$. Оскільки r неперервна відносно топології рівномірної збіжності, то f є неперервною. Крім того, з теореми 5 і того, що $r(Y) = Y_0$, випливає, що

$$g(x) = \inf_{y \in Y_0} y(x) = \inf_{y \in Y} r(y)(x) = \wedge_f(x) \quad \text{і} \quad g(x) = \sup_{y \in Y_0} y(x) = \sup_{y \in Y} r(y)(x) = \vee_f(x).$$

для кожного $x \in X$. Отже, f породжує пару Гана (g, h). □

Наслідок 7. *Нехай X – цілком регулярний простір. Тоді $pn(X) \le d\big(C^b(X)\big)$.*

Для просторів, які не є досконало нормальними ми не можемо одразу переходити до пар Гана зліченного типу, а тому техніка, яка розроблена нами в цій статті, не працює у цьому випадку. Ми завершимо нашу роботу формулюванням кількох найбільш інтригуючих, на наш погляд, питань.

Питання 1. *Для яких топологічних просторів X виконується, що для довільної пари Гана (g, h) на X існує нарізно неперервна функція $f : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ така, що $\wedge_f = \wedge^f = g$ і $\vee_f = \vee^f = h$?*

Питання 2. *Чи буде простір $Y = C_p(X)$ неперервних функцій з топологією поточкової збіжності CC-генеруючим для цілком регулярного (нормального) простору X?*

Зауважимо, що для досконало нормального простору X відповідь на це питання позитивна (див. імплікацію $(0) \Rightarrow (8)$ теореми 11).

Питання 3. *Нехай компакт Y є CC-генеруючим для довільного досконало нормального простору. Чи вірно, що Y не є розрідженим?*

Питання 4. *Нехай X – топологічний простір, Y – псевдокомпактний простір і $f : X \times Y \to \mathbb{I}$ неперервна функція. Чи вірно, що функції $\wedge_f$ і $\vee_f$ неперервні?*

Стандартні покриттєві міркування показують, що відповідь на це питання позитивна для компактного простору Y.

Список літератури

[1] Tong, H. *Some characterizations of normal and perfectly normal spaces.* Duke Math. J. 19 (1952), 289–292.

[2] Katětov, M. *On real-valued functions in topological spaces.* Fund. Math. 38 (1951), 85–91.

[3] Voloshin, G. A., Maslyuchenko, V. K.; Mel'nik, V. S. *Hahn pairs and a zero inverse problem.* (in Ukrainian) Mat. Stud. 48 (2017), no. 1, 74–81.

[4] T. Jech, *Set Theory*, Springer-Verlag Heldermann Verlag, Berlin, 2003.

[5] R. Engelking, *General topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[6] Juhász, I. *Cardinal functions in topology—ten years later.* Second edition. Mathematical Centre Tracts, 123. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980. iv+160 pp.

[7] Bourbaki, N. *Éléments de mathématique. VIII. Premiere partie: Les structures fondamentales de l'analyse. Livre III: Topologie générale. Chapitre IX: Utilisation des nombres réels en topologie générale.* (in French) Actualités Sci. Ind., no 1045. Hermann et Cie., Paris, 1948. ii+101+ii pp.

[8] Bognár, M. *On the Hahn-Mazurkiewicz theorem.* Acta Math. Hungar. 102 (2004), no. 1-2, 37–83.

[9] Dugundji, J. *An extension of Tietze's theorem.* Pacific J. Math. 1 (1951), 353–367.

Надійшло 20.04.2021

Kushnir A. S., Maslyuchenko O. V. *Pairs of Hahn and separately continuous function*, Bukovinian Math. Journal. **9**, 1 (2021), 210–229.

In this paper we continue the study of interconnections between separately continuous function which was started by V. K. Maslyuchenko. A pair (g, h) of functions on a topological space is called a pair of Hahn if $g \leq h$, g is an upper semicontinuous function and h is a lower semicontinuous function. We say that a pair of Hahn (g, h) is generated by a function f, which depends on two variables, if the infimum of f and the supremum of f with respect to the second variable equals g and h respectively. We prove that for any perfectly normal space X and non-pseudocompact space Y every pair of Hahn on X is generated by a continuous function on $X \times Y$. We also obtain that for any perfectly normal space X and for any space Y having non-scattered compactification any pair of Hahn on X is generated by a separately continuous function on $X \times Y$.