

УМОВИ НЕКОЛИВНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ІТО ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Для нелінійних стохастичних рівнянь Іто вивчаються умови неколивності на півосі їх розв'язків. Відповідні достатні умови дані в термінах коефіцієнтів рівнянь.

We study non-fluctuating conditions for nonlinear stochastic Ito equations in semi-axis of their solutions. We provide corresponding sufficient conditions in terms of the coefficients of the equations.

Вступ. У даній роботі вивчаються умови неколивності траєкторії розв'язків нелінійних стохастичних рівнянь Іто на півосі.

Розв'язки, траєкторії яких з ймовірністю 1 мають нескінченно багато нулів на півосі, називаються коливними. В протилежному випадку вони називаються неколивними на додатній півосі.

Як відомо, рівняння Іто другого порядку є математичними моделями багатьох реальних об'єктів, що в процесі своєї еволюції зазнають дії випадкових факторів. Найпоширенішими прикладами таких об'єктів є механічні системи, що знаходяться в полі випадкових сил. При цьому відповідне диференціальне рівняння другого порядку виражає закон Ньютона еволюції даного об'єкта.

Наявність нескінченної кількості нулів розв'язку говорить про коливний характер еволюції досліджуваного об'єкта, а тому дослідження коливності розв'язків представляє як теоретичний, так і практичний інтерес. Предметом розгляду даної роботи є нелінійне стохастичне рівняння Іто другого порядку

$$\ddot{x} + p(t, x, \dot{x}) + q(t, x, \dot{x})\dot{W}(t) = 0, \quad (1)$$

що є природним узагальненням детермінованого рівняння другого порядку.

Точна постановка задачі і означення будуть дані в основній частині роботи.

У порівнянні зі звичайними диференціальними рівняннями, для яких теорія коливності розв'язків досить добре розвинена, теорія коливності стохастичних систем

ще знаходиться у стані становлення. Це пов'язано з тим, що присутність стохастичного члена в (1) накладає на вивчення його властивостей коливності ряд нових, на відміну від детермінованого випадку ($q \equiv 0$), труднощів.

По-перше, оскільки розв'язками рівняння (1) є випадкові процеси, то їх нулі є випадковими величинами із певними властивостями, а тому введення поняття нуля розв'язку потребує деяких додаткових конструкцій, на відміну від детермінованого випадку, де нулем розв'язку є звичайний нуль гладкої функції.

По-друге, розв'язки рівняння (1) на відміну від детермінованого випадку мають лише першу похідну. Останнє не дозволяє застосувати добре розвинуту в детермінованому випадку техніку дослідження коливності, що пов'язана з випуклістю розв'язку між двома послідовними нулями.

По-третє, питання коливності розв'язків рівняння (1) є сенс вивчати лише на нескінченних часових інтервалах, оскільки на скінченних часових інтервалах в силу теореми Струка-Варадана про носій ([1], теор.8.1, стор. 414) впливає, що розв'язки рівняння (1) з додатними ймовірностями можуть бути як коливними, так і неколивними.

Відзначимо ще одну особливість рівняння (1) чисто ймовірнісного характеру. Рівняння (1), переписане у вигляді системи, є частинним випадком стохастичних систем другого порядку. При цьому, здавалося б, воно повинно наслідувати всі властивості

систем другого порядку. Але дана система є системою з виродженою дифузійною, що значно ускладнює її дослідження чисто ймовірнісними методами.

Приведемо короткий огляд відомих нам в цьому напрямку результатів. Так в роботі [2] Мао розглядав рівняння $\ddot{x} + kx = h\dot{W}(t)$, де $W(t)$ – процес Вінера. Автор показав, що розв’язок з початковими даними $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ має нескінченно багато нулів на півосі, причому всі вони прості. Тут отримані також оцінки зверху і знизу математичного сподівання першого нуля розв’язку.

У роботі [3] автори розглянули більш загальний випадок, а саме рівняння

$$\ddot{x} + k(t, x, \dot{x}) = h\dot{W}(t),$$

для розв’язків якого встановлена оцінка $x^2(t) + \dot{x}^2(t) > 0$, при $t > 0$ з ймовірністю 1.

У роботі [4] для лінійних рівнянь $\ddot{x} + (p(t) + q(t)\dot{W}(t))x = 0$ з використанням методу асимптотичної еквівалентності для стохастичних систем [5] розвинута класична теорія коливності Штурма.

Дана робота складається з трьох частин: вступ; постановка задачі і основні означення; випадок неколивності.

2. Постановка задачі та основні означення. Перейдемо тепер до строгої постановки задачі та необхідних означень. Рівняння (1) будемо розуміти як наступну систему стохастичних рівнянь:

$$\begin{cases} dx_1 = x_2 dt, \\ dx_2 = -p(t, x_1, x_2) dt - q(t, x_1, x_2) dW(t). \end{cases} \quad (2)$$

Тут $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^1$, $t \geq 0$, $W(t)$ – стандартний процес Вінера, визначений при $t \geq 0$ на деякому повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ з фільтрацією $\{F_t, t \geq 0\}$, узгодженою з $W(t)$.

Означення 1. Неперервно диференційований при $t \geq 0$ з ймовірністю 1 випадковий процес $x(t)$ будемо називати розв’язком рівняння (1) при $t \geq 0$, якщо пара $(x(t), \dot{x}(t)) = (x_1(t), x_2(t))$ є розв’язком системи (2) при $t \geq 0$.

Відносно функцій $p(t, x_1, x_2)$ і $q(t, x_1, x_2)$ будемо вважати, що вони визначені і неперервні в області $t \geq 0$, $x_1 \in \mathbb{R}^1$, $x_2 \in \mathbb{R}^1$ за сукупністю змінних, а також задовольняють там по x_1, x_2 глобальну умову Ліпшиця та умову лінійного росту. Будемо також вважати, що $p(t, 0, 0) = q(t, 0, 0) = 0$. Останнє забезпечує існування нульового розв’язку у (2).

Введемо тепер, згідно з [4], поняття нуля розв’язку та його коливності.

По-перше відзначимо, що при зроблених припущеннях розв’язок системи (2) $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ із початковою умовою $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ (де $\bar{x}_0 = F_{t_0}$ – вимірна випадкова величина, що має другий момент) визначений при $t \geq t_0$ і сильно єдиний. При цьому, як випливає з леми 2.3 ([6], стор.205), точка $(0, 0)$ недосяжна для процесу $\bar{x}(t)$.

У наших позначеннях $x_1(t) = x(t)$.

Означення 2. Розв’язок $x(t)$ рівняння (1) назвемо нетривіальним при $t \geq t_0$, якщо

$$P\{x(t) \equiv 0, t \geq t_0\} = 0.$$

Нехай тепер $x(t)$ – деякий нетривіальний розв’язок рівняння (1) при $t \geq t_0 \geq 0$. Визначимо випадкову величину τ_1 наступним чином:

$$\tau_1 = \inf \{t > t_0 \mid x_1(t) = 0\}, \quad (3)$$

якщо множина під знаком інфімуму непорожня, і $\tau_1 = \infty$ в противному випадку.

Означення 3. Випадкову величину τ_1 , визначену формулою (3), назвемо першим нулем розв’язку $x(t)$ на інтервалі $t \geq t_0$, якщо $\tau_1 < \infty$ з ймовірністю 1.

Враховуючи тепер ту обставину, що точка $(0, 0)$ недосяжна для процесу $(x_1(t), x_2(t))$, а також гладкість компоненти $x_1(t)$, можна стверджувати, що в деякому правому напівоколі першого нуля τ_1 компонента $x_1(t)$ відмінна від нуля. Це дає змогу коректно визначити випадкову величину τ_2 :

$$\tau_2 = \inf \{t > \tau_1 \mid x_1(t) = 0\}, \quad (4)$$

якщо множина під знаком інфімуму не порожня, і $\tau_2 = \infty$ в противному випадку.

Цю випадкову величину назвемо другим нулем розв'язку $x(t)$ на інтервалі $t \geq t_0$, якщо $\tau_2 < \infty$ з ймовірністю 1.

Далі за індукцією можемо визначити послідовність нулів $\{\tau_n\}$ розв'язку $x(t)$ при $t \geq t_0$. При цьому два нулі τ_{n-1} і τ_n назвемо послідовними нулями розв'язку $x(t)$ на інтервалі $t \geq t_0$.

Якщо в даних побудовах $t_0 = 0$, то будемо говорити про нулі розв'язку на півосі.

Означення 4. *Нетривіальний розв'язок $x(t)$ рівняння (1) назвемо осцилюючим (колиливим) на півосі $t > 0$, якщо він має там нескінченно багато нулів. В протилежному випадку розв'язок назвемо неколивним.*

3. Нелінійний випадок неколивності. Приведемо результат про неколивність розв'язків рівняння (1). Для його отримання суттєву роль відіграє теорема про інваріантність політопа [7] для розв'язків стохастичної системи. Приведемо узагальнення відповідного результату із [7].

Розглянемо в просторі $\mathbb{R}^m$ систему стохастичних диференціальних рівнянь Іто

$$dx = f(t, x)dt + g(t, x)dW(t), \quad (5)$$

де $x \in \mathbb{R}^m$, $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g = [g_{ij}] : [0, \infty) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r$, $W(t)$ — r -мірний процес Вінера з незалежними компонентами.

Будемо вважати, що функції f і g задовольняють стандартні умови існування та сильної єдиності розв'язку задачі Коші (наприклад: глобальна умова Ліпшиця по x , лінійний ріст за цією ж змінною та неперервність за сукупністю змінних).

Нехай $a, n \in \mathbb{R}^m$. Через $P(a, n)$ позначимо наступну множину в $\mathbb{R}^m$:

$$P(a, n) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid (x - a, n) \geq 0\}.$$

Тут $(\cdot, \cdot)$ — звичайний скалярний добуток, $|\cdot|$ — норма вектора, $\|\cdot\|$ — норма матриці, що узгоджена з нормою вектора.

Політопом в просторі $\mathbb{R}^m$ називається наступна множина:

$$\bigcap_{\alpha \in I} P(a_\alpha, n_\alpha), \quad (6)$$

де $I = \{1, 2, \dots, N\}$ — скінченний набір натуральних чисел.

Означення 5. *Множину $K \in \mathbb{R}^m$ назвемо інваріантною для системи (5), якщо для кожного її розв'язку, такого, що $x(\tau) \in K$ з ймовірністю 1, виконується умова*

$$\mathbb{P}\{x(t) \in K, \forall t > \tau\} = 1.$$

Тут τ — марковський момент часу відносно фільтрації $\{F_t\}$.

Зауваження. *Означення 5 є узагальненням означення інваріантності із [7] на випадок випадкового моменту часу.*

Відносно інваріантності множини (6) справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай $K = \bigcap_{\alpha \in I} P(a_\alpha, n_\alpha)$ — політоп в $\mathbb{R}^m$. Припустимо, що коефіцієнти $f(t, x)$ і $g(t, x)$ системи (5) визначені при $t \geq 0$ і $x \in \mathbb{R}^m$ та задовольняють умови глобального лінійного росту по x та глобальну по x умову Ліпшиця.*

Множина K є інваріантною для системи (5) тоді і тільки тоді, коли для кожного $\alpha \in I$ і $x \in K$ таких, що $(x - a_\alpha, n_\alpha) = 0$ виконуються умови:

$$(f(t, x), n_\alpha) \geq 0, \quad (g_j(t, x), n_\alpha) = 0$$

для $t \geq 0, j = \overline{1, r}$.

Тут g_j — j -й вектор-стовпчик матриці $g = [g_{i,j}]$.

Доведення даної теореми проводиться за тією ж схемою, що і відповідний результат із [7] з заміною нульового моменту часу на довільний марківський момент τ такий, що $x(\tau) \in K$ з ймовірністю 1.

Повернемося тепер до рівняння (1), яке ми як і раніше будемо розуміти як систему рівнянь (2).

Відносно функцій $p(t, x_1, x_2)$ і $q(t, x_1, x_2)$ будемо вважати виконаними умови другої частини роботи.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай функції p та q задовольняють вказані перед теоремою умови. Якщо ж до того:*

- 1) $p(t, x_1, 0) \geq 0$ при $x_1 < 0, t \geq 0$;
- 2) $p(t, x_1, 0) \leq 0$ при $x_1 > 0, t \geq 0$;
- 3) $q(t, x_1, 0) = 0$ при $t \geq 0, x_1 \in \mathbb{R}^1$,

то всі нетривіальні розв'язки рівняння (1) неколивні на додатній півосі.

Доведення. Розглянемо фазову площину $x_1 O x_2$ для системи (2). При цьому координатні осі розбивають її на чотири квадранти. Покажемо, що перший і третій з них є інваріантними для системи (2).

Перший квадрант є політопом типу (6), якщо його записати у вигляді

$$M = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0; x_2 \geq 0\}.$$

При цьому $a_1 = 0$, $n_1 = l_1 = (1, 0)^*$, $a_2 = 0$, $n_2 = l_2 = (0, 1)^*$. Тут $*$ — означає транспонування. Тоді, очевидно

$$M = \bigcap_{\alpha \in I} P(a_\alpha, n_\alpha),$$

де $I = \{1; 2\}$. Границями даного політопа є лінії

$$\begin{aligned} j_1 &= \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0, x_2 \geq 0\} \quad \text{та} \\ j_2 &= \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 = 0\}. \end{aligned}$$

Функції f та g , що фігурують у теоремі 1, мають вигляд:

$$\begin{aligned} f(t, x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} x_2 \\ -p(t, x_1, x_2) \end{pmatrix}, \\ g(t, x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -q(t, x_1, x_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Перевіримо тепер виконання умов теореми 1.

Для границі j_1 маємо

$$(f, n_1) = (f, l_1) = x_2 \geq 0, \quad (g, n_1) = (g, l_1) = 0.$$

Для границі j_2 , в силу умов (7), отримуємо:

$$\begin{aligned} (f, n_2) &= (f, l_2) = -p(t, x_1, 0) \geq 0, \\ (g, n_2) &= (g, l_2) = -q(t, x_1, 0) = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, виконані всі умови теореми 1. Отже множина M є інваріантною для системи (2). Останнє означає, що крива $(x_1(t), x_2(t))$ з ймовірністю 1 не перетинає лінію $x_1 = 0$. Відзначимо також, що в силу першого рівняння в (2) маємо $\frac{dx_1}{dt} = x_2 > 0$,

а тому крива $(x_1(t), x_2(t))$ і не дотикається до лінії $x_1 = 0$.

Інваріантність третього квадранту випливає з аналогічних міркувань, якщо замість множини M розглянути множину політоп

$$M_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq 0, x_2 \leq 0\}.$$

При цьому також маємо, що $\frac{dx_1}{dt} = x_2 < 0$, а тому крива $(x_1(t), x_2(t))$ не тільки не перетинає лінію $x_1 = 0$, але й не дотикається до неї.

Отже, якщо нетривіальні розв'язки системи (2) стартують із першого чи третього квадранту, то вони в них і залишаються, не перетинаючи лінію $x_1 = 0$. Для розв'язку рівняння (1) з початковими даними $x(0) > 0$ і $\dot{x}(0) \geq 0$, або $x(0) < 0$, $\dot{x}(0) \leq 0$, це означає його неколивність.

Розглянемо тепер розв'язок рівняння (1), що стартує із другого квадранту (чи його границі). Якщо він є коливним, то він має принаймні один нуль τ_1 . Це означає, що з ймовірністю 1 $x(\tau_1) = 0$.

З першого рівняння системи (2) при цьому випливає, що $\dot{x}(\tau_1) > 0$. А тому крива $(x_1(t), x_2(t))$ при значеннях t з деякого правого околу точки τ_1 попадає в перший квадрант. В силу його інваріантності вона там і залишається. Отже, розв'язок, що стартує із другого квадранту, може перетворитися в нуль не більше одного разу, а отже є неколивним.

Аналогічно доводиться і неколивність розв'язків, що стартують із четвертого квадранту.

Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ветанаб С. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С. Ветанаб, Икеда // М. : Наука, 1986. — 445 с.
2. Mao X. Stochastic differential equations and their applications / X. Mao // Longman Scientific and Technical. — 1997. — P. 199–231.
3. Markus L. Stochastic oscillators / L. Markus, J. Weerasingle // Journal of differential equations. — 1998. — 71, N3. — P. 288–314.
4. Stanzhytskyi A. N. Asymptotic equivalence of linear stochastic Ito systems and oscillation of solutions

of linear second-order equations / A. N. Stanzhytskyi, A. P. Krenevich, I. G. Novak // Differential equations. – 2011. – **47**, N6. – P. 1799–813.

5. *Samoilenko A. M.* Qualitative and asymptotic analysis of differential equations with random perturbations / A. M. Samoilenko, O. M. Stanzhytskyi // World Scientific. – 2011. – 322 p.

6. *Khas'minskiy R. Z.* Stochastic stability differential equations / R. Z. Khas'minskiy // Sijthoff and Noordhoff. – 1980.

7. *Milan A.* Stochastic viability and comparison theorem / A. Milan // Collogium Math. Acad. Polonaise VLXVIII. – 1995. – P. 297–316.